Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 517.98

ПОРЯДКОВЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА КОНЕЧНО–АДДИТИВНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ФУНКЦИЙ

А. Е. Гутман, А. И. Сотников

Аннотация: Изучаются основные порядковые (а также некоторые метрические и алгебраические) свойства множества конечно-аддитивных переходных функций (на произвольном измеримом пространстве), наделенного структурой упорядоченной нормированной алгебры, и исследуется его связь с классическими пространствами линейных операторов, векторных мер и измеримых вектор-функций. В частности, рассматривается вопрос о разложении пространства переходных функций в сумму подпространств счетно-аддитивных и чисто конечно-аддитивных переходных функций.

Ключевые слова: переходная функция, марковский оператор, чисто конечно-аддитивная мера, векторная мера, измеримая вектор-функция, лифтинг пространства с мерой, упорядоченное векторное пространство, векторная решетка, K-пространство, банахова решетка, упорядоченная банахова алгебра.

§ 1. Введение

Пусть X — некоторое непустое множество, Σ — σ-алгебра его подмножеств. Пару (X, Σ) будем называть *измеримым пространством*, а элементы Σ — *измеримыми множествами.*

Обозначим через $B(X, \Sigma)$ или, более коротко, $B(X)$ банахово пространство всех ограниченных Σ-измеримых функций $f\colon X \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$.

В данной статье термин *мера* означает конечно-аддитивную функцию, действующую из σ-алгебры в $\mathbb{R}$. Следуя [1], будем обозначать через $ba(X, \Sigma)$ или $ba(\Sigma)$ векторное пространство всех ограниченных мер из Σ в $\mathbb{R}$, а через $ca(X, \Sigma)$ или $ca(\Sigma)$ — подпространство $ba(\Sigma)$, состоящее из всех счетно-аддитивных ограниченных мер. (Как известно, в случае бесконечной σ-алгебры Σ включение $ca(\Sigma) \subset ba(\Sigma)$ является строгим.)

В теории вероятностей цепь Маркова однозначно определяется *переходной вероятностью* — произвольной функцией $p\colon X \times \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей следующим условиям:

(a) $p(\cdot, E) \in B(X)$ для всех $E \in \Sigma$;
(b) $p(x, \cdot) \in ca(\Sigma)$ для всех $x \in X$;
(c) $p(x, E) \geq 0$ для всех $x \in X$ и $E \in \Sigma$;
(d) $p(x, X) = 1$ для всех $x \in X$.

В работах А. И. Жданка [2–4] вводятся и исследуются конечно-аддитивные цепи Маркова, переходная вероятность которых удовлетворяет более слабому аналогу условия (b): $p(x,\cdot) \in ba(\Sigma)$ для всех $x \in X$. Стремясь превратить множество рассматриваемых функций в векторное пространство, мы отказываемся от их положительности и нормированности и приходим к следующему определению переходной функции.

Определение 1.1. Пусть (X,Σ) — измеримое пространство. *Переходной функцией* на (X,Σ) назовем отображение $p\colon X\times\Sigma\to\mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $p(\cdot,E)\in B(X)$ для всех $E\in\Sigma$;
(2) $p(x,\cdot)\in ba(\Sigma)$ для всех $x\in X$.

Следует заметить, что термин «переходная функция» иногда используют как синоним «переходной вероятности». Мы же различаем эти два термина и употребляем последний лишь для функций, удовлетворяющих сформулированным выше условиям (a)–(d).

Совокупность всех переходных функций на измеримом пространстве (X,Σ) будем обозначать символом $\mathscr{P}(X,\Sigma)$.

В данной работе мы изучаем множество $\mathscr{P}(X,\Sigma)$, наделенное структурой упорядоченной нормированной алгебры, и исследуем его взаимосвязи с классическими пространствами линейных операторов, векторных мер и измеримых вектор-функций.

В теории вероятностей с каждой переходной вероятностью p на измеримом пространстве (X,Σ) связываются два так называемых *марковских оператора* $T_p\colon B(X)\to B(X)$ и $A_p\colon ca(\Sigma)\to ca(\Sigma)$, определяемых формулами

$$(T_pf)(x)=\int\limits_X f\,dp(x,\cdot),\quad (A_p\mu)(E)=\int\limits_X p(\cdot,E)\,d\mu,$$

где $f\in B(X)$, $x\in X$, $\mu\in ca(\Sigma)$, $E\in\Sigma$. Как следует из результатов § 4, в случае произвольных переходных функций аналоги марковских операторов первого вида составляют пространство $\mathscr{L}(B(X))$ всех линейных ограниченных операторов на $B(X)$, в то время как аналоги марковских операторов второго вида образуют определенное подпространство $\mathscr{L}(ba(\Sigma))$, а именно пространство $\mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$ всех слабо* непрерывных линейных операторов на $ba(\Sigma)$. При этом, в частности, показано, что отображения $p\mapsto T_p$ и $p\mapsto A_p$ представляют собой изоморфизмы упорядоченной нормированной алгебры $\mathscr{P}(X,\Sigma)$ на $\mathscr{L}(B(X))$ и $\mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$ соответственно.

Отметим, что рассмотрение марковских операторов для конечно-аддитивных переходных вероятностей было инициировано в работах [2–4]. Кроме того, один из исследуемых нами вопросов (в § 5) — о разложении $\mathscr{P}(X,\Sigma)$ в сумму подпространств счетно-аддитивных и чисто конечно-аддитивных переходных функций — впервые был поднят в работе [2].

§ 2. Предварительные сведения из теории упорядоченных пространств

В данном параграфе мы приводим некоторые определения и факты из теории упорядоченных векторных пространств и положительных операторов, необходимые для дальнейшего изложения.

Мы предполагаем, что читатель знаком с такими понятиями, как упорядоченное векторное пространство, положительная и отрицательная части элемента (u^+, u^-), векторная решетка, нормированная решетка, K-пространство, порядковый предел последовательности и сети ($o\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, $o\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} u_\alpha$, $u_\alpha \xrightarrow{o} u$), порядковая сумма семейства $\bigl(o\text{-}\sum\limits_{\xi\in\Xi} u_\xi\bigr)$, дизъюнктность элементов и подмножеств векторной решетки ($u \perp v$, $U \perp V$, $u \perp U$), дизъюнктное дополнение и двойное дизъюнктное дополнение ($U^\perp$, $U^{\perp\perp}$), полоса (или компонента) векторной решетки, булева алгебра, полная булева алгебра, атом булевой алгебры, положительный линейный оператор. (Все необходимые сведения имеются в [5–14].)

Термин «оператор» всюду означает «линейный оператор». Все рассматриваемые в данной статье векторные пространства предполагаются заданными над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, а векторные решетки предполагаются архимедовыми.

Говорят, что множество U *наследственно вложено* в упорядоченное пространство V, если $U \subset V$ и для каждого подмножества $U_0 \subset U$ из существования $\sup_U U_0$ вытекают существование $\sup_V U_0$ и равенство $\sup_V U_0 = \sup_U U_0$.

Подмножество U векторной решетки V называют *минорирующим* (и говорят, что U *минорирует* V), если для каждого элемента $0 < v \in V$ существует элемент $u \in U$ такой, что $0 < u \le v$.

Отношение дизъюнктности $\perp$ на векторной решетке обладает всеми свойствами «абстрактной» дизъюнктности, определяемой следующим образом.

Определение 2.1. Пусть V — векторное пространство и d — некоторое отношение на V, т. е. $\mathrm{d} \subset V^2$. Для произвольного подмножества $U \subset V$ положим $U^{\mathrm{d}} = \{v \in V : u \mathrel{\mathrm{d}} v \text{ для всех } u \in U\}$. Вместо $(U^{\mathrm{d}})^{\mathrm{d}}$ будем использовать более краткую запись U^{dd}. Будем говорить, что d является *отношением дизъюнктности* на V, если для всех $v, v_1, v_2 \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:

(1) $v \mathrel{\mathrm{d}} 0$;
(2) если $v \mathrel{\mathrm{d}} v$, то $v = 0$;
(3) если $v_1 \mathrel{\mathrm{d}} v_2$, то $v_2 \mathrel{\mathrm{d}} v_1$;
(4) если $\{v_1\}^{\mathrm{dd}} \cap \{v_2\}^{\mathrm{dd}} = \{0\}$, то $v_1 \mathrel{\mathrm{d}} v_2$;
(5) если $v_1 \mathrel{\mathrm{d}} v$, то $\lambda v_1 \mathrel{\mathrm{d}} v$;
(6) если $v_1 \mathrel{\mathrm{d}} v$ и $v_2 \mathrel{\mathrm{d}} v$, то $(v_1 + v_2) \mathrel{\mathrm{d}} v$.

Понятие дизъюнктности на векторном пространстве V является в некотором смысле частным случаем понятия дизъюнктности, введенного в [13] для произвольного множества V.

Пусть d — произвольное симметричное отношение на множестве V. Подмножество $W \subset V$ называется d-*полосой*, если $W^{\mathrm{dd}} = W$. Заметим, что W является d-полосой тогда и только тогда, когда $W = U^{\mathrm{d}}$ для некоторого подмножества $U \subset V$. Если d — отношение дизъюнктности на векторном пространстве, то всякая d-полоса является векторным подпространством.

Теорема 2.2. *Пусть $\overline{V}$ — векторная решетка и V — минорирующее векторное подпространство $\overline{V}$. Введем на V отношение d, полагая $v_1 \mathrel{\mathrm{d}} v_2$ в том и только том случае, если $v_1 \perp v_2$ (т. е. $v_1, v_2 \in V$ дизъюнктны как элементы векторной решетки $\overline{V}$). Тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) *V наследственно вложено в $\overline{V}$;*
(2) *$\sup_{\overline{V}}\{v \in V : 0 \le v \le \bar{v}\} = \bar{v}$ для всех $0 \le \bar{v} \in \overline{V}$;*
(3) *$U^{\mathrm{dd}} = U^{\perp\perp} \cap V$ для любого подмножества $U \subset V$;*
(4) *отношение d является отношением дизъюнктности на V.*

Доказательство. (1) Пусть $U \subset V$ и $v = \sup_V U$. Покажем, что $v = \sup_{\overline{V}} U$. Рассмотрим произвольную верхнюю грань $\bar{v} \in \overline{V}$ множества U и покажем неравенство $v \leq \bar{v}$. Обозначим $\bar{v} \wedge v$ через $\bar{v}_0$ и предположим вопреки доказываемому, что $\bar{v}_0 < v$. Поскольку V минорирует $\overline{V}$, существует элемент $w \in V$ такой, что $0 < w \leq v - \bar{v}_0$. Для любого элемента $u \in U$ имеем $u \leq \bar{v}_0 = \bar{v}_0 + w - w \leq \bar{v}_0 + (v - \bar{v}_0) - w = v - w$. Следовательно, $v = \sup_V U \leq v - w$, что противоречит неравенству $w > 0$.

(2) Пусть $0 \leq \bar{v} \in \overline{V}$. Положим $U = \{v \in V : 0 \leq v \leq \bar{v}\}$ и покажем, что $\sup_{\overline{V}} U = \bar{v}$. Рассмотрим произвольную верхнюю грань $\bar{v}_1 \in \overline{V}$ множества U и установим неравенство $\bar{v} \leq \bar{v}_1$. Обозначим $\bar{v}_1 \wedge \bar{v}$ через $\bar{v}_0$ и предположим вопреки доказываемому, что $\bar{v}_0 < \bar{v}$. Поскольку V минорирует $\overline{V}$, существует элемент $v \in V$ такой, что $0 < v \leq \bar{v} - \bar{v}_0$. Согласно принципу Архимеда неравенство $nv \leq \bar{v}$ не может быть выполнено для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть n — наибольшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $nv \leq \bar{v}$. Тогда $nv \in U$, откуда $(n+1)v = nv + v \leq \bar{v}_0 + v \leq \bar{v}_0 + (\bar{v} - \bar{v}_0) = \bar{v}$, что противоречит выбору n.

(3) Включение $U^{\perp\perp} \cap V \subset U^{\mathrm{dd}}$ очевидно. Покажем обратное включение. Пусть $v \in U^{\mathrm{dd}}$. Тогда, как легко видеть, $v \perp U^{\perp} \cap V$. Для доказательства требуемого соотношения $v \perp U^{\perp}$ достаточно рассмотреть произвольный положительный элемент $\bar{v} \in U^{\perp}$ и показать, что $v \perp \bar{v}$. Положим $W = \{w \in V : 0 \leq w \leq \bar{v}\}$. Из соотношения $\bar{v} \perp U$ вытекает $W \perp U$, откуда $W \subset U^{\perp} \cap V$, а значит, $v \perp W$. Последнее с учетом утверждения (2) доказываемой теоремы дает $v \perp \sup_{\overline{V}} W = \bar{v}$.

(4) В доказательстве нуждается лишь условие (4) определения 2.1. Пусть $u, v \in V$, $\{u\}^{\mathrm{dd}} \cap \{v\}^{\mathrm{dd}} = \{0\}$, но тем не менее $\overline{w} = |u| \wedge |v| \neq 0$. Поскольку V минорирует $\overline{V}$, имеется элемент $w \in V$ такой, что $0 < w \leq \overline{w}$. Учитывая утверждение (3) доказываемой теоремы, заключаем, что $w \in \{u\}^{\perp\perp} \cap \{v\}^{\perp\perp} \cap V = \{u\}^{\mathrm{dd}} \cap \{v\}^{\mathrm{dd}}$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Нормированное пространство, снабженное порядком, относительно которого оно является упорядоченным векторным пространством, условимся называть *упорядоченным нормированным пространством* (какое-либо согласование нормы и порядка не предполагается).

Замечания 2.3. Пусть (X, Σ) — произвольное измеримое пространство. Наделим нормированное пространство $B(X)$ поточечным порядком, превратив его тем самым в банахову решетку.

(1) В нормированной решетке $B(X)$ ограниченность по норме эквивалентна порядковой ограниченности. Поэтому в дальнейшем мы будем употреблять термин «ограниченность» для каждого из этих эквивалентных свойств.

(2) Последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $B(X)$ ограничена тогда и только тогда, когда в $B(X)$ существуют $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ и $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$. При этом для всех $x \in X$ справедливы равенства $(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ и $(\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.

(3) Последовательность элементов $B(X)$ o-сходится к функции $f \in B(X)$ тогда и только тогда, когда эта последовательность ограничена и сходится поточечно к f.

Упорядоченной алгеброй называют алгебру V, являющуюся упорядоченным векторным пространством и обладающую следующим свойством: если $u, v \in V$ и $u, v \geq 0$, то $uv \geq 0$.

Нормированную алгебру, снабженную порядком, относительно которого она является упорядоченной алгеброй, условимся называть *упорядоченной нор-*

мированной алгеброй (какое-либо согласование нормы и порядка не предполагается). Примером упорядоченной нормированной алгебры является пространство $\mathscr{L}(V,V)$ всех ограниченных (по норме) операторов, действующих в нормированной решетке V.

Полную по норме упорядоченную нормированную алгебру будем называть *упорядоченной банаховой алгеброй.*

Если V — нормированное пространство, то символом V' будем обозначать сопряженное к V банахово пространство, т. е. пространство всех ограниченных линейных функционалов из V в $\mathbb{R}$. Подмножество V', всюду плотное в V' в смысле слабой* топологии, будем называть *слабо* плотным.* Символом T' обозначается оператор из $\mathscr{L}(W',V')$, сопряженный к оператору $T \in \mathscr{L}(V,W)$.

Для нормированных пространств V и W символом $\mathscr{L}_w(V',W')$ мы обозначаем множество слабо* непрерывных операторов из V' в W', т. е. операторов, непрерывных в смысле слабой* топологии. Заметим, что $\mathscr{L}_w(V',W') \subset \mathscr{L}(V',W')$ (это включение вытекает, например, из теоремы о замкнутом графике).

Оператор $T\colon V \to W$, действующий в упорядоченных векторных пространствах V и W, называют *секвенциально o-непрерывным* (или *σ-o-непрерывным*), если из $v_n \overset{o}{\to} v$ вытекает $Tv_n \overset{o}{\to} Tv$ для любой последовательности $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в V и любого элемента $v \in V$. Множество всех секвенциально o-непрерывных операторов из V в W обозначается символом $\mathscr{L}_o(V,W)$.

Если пространства V и W совпадают, то в записях $\mathscr{L}(V,W)$, $\mathscr{L}_w(V',W')$, $\mathscr{L}_o(V,W)$ мы будем, как это обычно принято, опускать символ второго пространства и писать, например, $\mathscr{L}(V)$ вместо $\mathscr{L}(V,V)$.

Следующее утверждение с легкостью выводится из того факта, что образ нормированного пространства V при естественном вложении V в V'' совпадает с множеством всех слабо* непрерывных функционалов на V' (см., например, [1, V.3.9]).

Предложение 2.4. *Пусть V и W — нормированные пространства. Оператор из W' в V' является сопряженным к некоторому ограниченному оператору из V в W тогда и только тогда, когда он слабо* непрерывен.*

§ 3. Вспомогательные факты из теории меры

В этом параграфе мы приводим основные сведения из теории меры (в том числе касающиеся конечно-аддитивных мер [15–19], векторных мер [1, 20, 21] и измеримых вектор-функций [12, 21]), а также устанавливаем некоторые вспомогательные факты, затрагивающие пространства с мерой и лифтинги (см. [12, 20, 22, 23]).

Определение 3.1. Под *пространством с мерой* в данной работе понимается тройка $(X,\Sigma,|\cdot|)$, где (X,Σ) — измеримое пространство, а $|\cdot|$ — положительная счетно-аддитивная функция из Σ в $\overline{\mathbb{R}}$ (традиционно называемая мерой), удовлетворяющая следующим условиям:

(1) если $E \subset X$ и $E \cap F \in \Sigma$ для всех $F \in \Sigma$ конечной меры, то $E \in \Sigma$;
(2) если $E \in \Sigma$ и $|E| = \infty$, то существует такой элемент $E_0 \in \Sigma$, что $E_0 \subset E$ и $0 < |E_0| < \infty$;
(3) если $E \in \Sigma$, $|E| = 0$ и $E_0 \subset E$, то $E_0 \in \Sigma$;
(4) $|X| \neq 0$.

(Заметим, что с точностью до условия (4) наше определение пространства с мерой совпадает, например, с определением, принятым в [9, I.6.2].)

Множества $E, F \in \Sigma$ называются *эквивалентными*, если $|E \vartriangle F| = 0$. Класс эквивалентности, содержащий множество $E \in \Sigma$, условимся обозначать символом $E^{\sim}$, а фактор-множество Σ по отношению эквивалентности — символом $\widetilde{\Sigma}$. Снабженное естественным порядком (индуцированным отношением включения) множество $\widetilde{\Sigma}$ является булевой алгеброй и называется *фактор-алгеброй* пространства с мерой $(X, \Sigma, |\cdot|)$.

Как обычно, мы будем говорить, что то или иное условие выполнено *почти всюду*, если оно имеет место для всех элементов X, за исключением некоторого множества нулевой меры. Символом $\mathscr{L}^{\infty}(X)$ обозначается совокупность всех определенных почти всюду существенно ограниченных измеримых вещественных функций, а символом $L^{\infty}(X)$ — пространство (решеточно упорядоченная банахова алгебра) классов эквивалентности таких функций по отношению равенства почти всюду. Класс эквивалентности, содержащий функцию $f \in \mathscr{L}^{\infty}(X)$, условимся обозначать через $f^{\sim}$.

Отображение $\rho\colon L^{\infty}(X) \to \mathscr{L}^{\infty}(X)$ называется *лифтингом пространства с мерой* $(X, \Sigma, |\cdot|)$ или *лифтингом пространства* $L^{\infty}(X)$, если для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^{\infty}(X)$ имеют место следующие соотношения:

(1) $\rho(\mathbf{f}) \in \mathbf{f}$ и $\operatorname{dom}\rho(\mathbf{f}) = X$;
(2) если $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$, то $\rho(\mathbf{f}) \leq \rho(\mathbf{g})$ всюду на X;
(3) $\rho(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g}) = \alpha\rho(\mathbf{f}) + \beta\rho(\mathbf{g})$, $\rho(\mathbf{fg}) = \rho(\mathbf{f})\rho(\mathbf{g})$, $\rho(\mathbf{f} \vee \mathbf{g}) = \rho(\mathbf{f}) \vee \rho(\mathbf{g})$ и $\rho(\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \rho(\mathbf{f}) \wedge \rho(\mathbf{g})$;
(4) $\rho(0^{\sim}) = 0$ и $\rho(1^{\sim}) = 1$ всюду на X.

(Некоторые из перечисленных условий являются следствиями остальных.)

Если $f \in \mathscr{L}^{\infty}(X)$, то для функции $\rho(f^{\sim})$ принято более короткое обозначение: $\rho(f)$. Поскольку лифтинг является правым обратным к отображению $f \mapsto f^{\sim}$, мы будем иногда использовать запись $f_{\sim}$ вместо $\rho(f)$.

Отображение $\rho\colon \widetilde{\Sigma} \to \Sigma$ называется *лифтингом фактор-алгебры* $\widetilde{\Sigma}$, если для любых классов $\mathbf{E}, \mathbf{F} \in \widetilde{\Sigma}$ имеют место следующие соотношения:

(1) $\rho(\mathbf{E}) \in \mathbf{E}$;
(2) если $\mathbf{E} \leq \mathbf{F}$, то $\rho(\mathbf{E}) \subset \rho(\mathbf{F})$;
(3) $\rho(\mathbf{E} \vee \mathbf{F}) = \rho(\mathbf{E}) \cup \rho(\mathbf{F})$, $\rho(\mathbf{E} \wedge \mathbf{F}) = \rho(\mathbf{E}) \cap \rho(\mathbf{F})$;
(4) $\rho((X \backslash E)^{\sim}) = X \backslash \rho(E^{\sim})$ для всех $E \in \Sigma$;
(5) $\rho(\varnothing^{\sim}) = \varnothing$ и $\rho(X^{\sim}) = X$.

По аналогии с лифтингом пространства $L^{\infty}(X)$ мы будем иногда писать $\rho(E)$ или $E_{\sim}$ вместо $\rho(E^{\sim})$ и тем самым считать, что $\rho\colon \Sigma \to \Sigma$.

Следующее достаточно очевидное наблюдение зачастую позволяет упростить проверку того факта, обладает ли какое-либо конкретное отображение всеми свойствами лифтинга.

Предложение 3.2. *Пусть $(X, \Sigma, |\cdot|)$ — пространство с мерой. Отображение $\rho\colon \widetilde{\Sigma} \to \Sigma$ является лифтингом фактор-алгебры $\widetilde{\Sigma}$ в том и только том случае, если оно удовлетворяет следующим двум условиям*:

(a) $\rho(\mathbf{E}) \in \mathbf{E}$ *для всех* $\mathbf{E} \in \widetilde{\Sigma}$;
(b) *для каждой точки $x \in X$ множество $\{\mathbf{E} \in \widetilde{\Sigma} : x \in \rho(\mathbf{E})\}$ является ультрафильтром булевой алгебры $\widetilde{\Sigma}$.*

Если $\rho\colon L^\infty(X) \to \mathscr{L}^\infty(X)$ — лифтинг пространства $L^\infty(X)$, то отображение $\mathbf{E} \mapsto \{x \in X : \rho(1_\mathbf{E})(x) \neq 0\}$ является лифтингом фактор-алгебры $\widetilde{\Sigma}$ (здесь $1_\mathbf{E} \in L^\infty(X)$ — класс, содержащий характеристические функции 1_E множеств $E \in \mathbf{E}$). Обратно, для любого лифтинга фактор-алгебры $\widetilde{\Sigma}$ существует единственный лифтинг пространства $L^\infty(X)$, связанный с лифтингом $\widetilde{\Sigma}$ указанным выше образом (см. [20, § 11]).

Известно (см. [20, 23]), что пространство с мерой $(X, \Sigma, |\cdot|)$ имеет лифтинг тогда и только тогда, когда оно обладает так называемым *свойством прямой суммы*: существует семейство $(E_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно не пересекающихся измеримых множеств конечной меры такое, что в булевой алгебре $\widetilde{\Sigma}$ справедливо соотношение $\sup\limits_{\xi\in\Xi} E_\xi^\sim = X^\sim$ (т. е. для любого измеримого множества E из $|E| > 0$ вытекает $|E \cap E_\xi| > 0$ при некотором $\xi \in \Xi$). В частности, лифтингом обладает всякое пространство с конечной или σ-конечной мерой (последний факт впервые установлен в [22]).

В дальнейшем нам пригодится следующий легко устанавливаемый результат.

Лемма 3.3. *Пусть $(X, \Sigma, |\cdot|)$ — пространство с мерой, причем булева алгебра $\widetilde{\Sigma}$ не имеет атомов.*

(1) *Если $x \in E \in \Sigma$ и $|E| < \infty$, то существует такое множество $F \in \Sigma$, что $x \in F \subset E$ и $|F| = \frac{1}{2}|E|$.*

(2) *Если пространство $(X, \Sigma, |\cdot|)$ обладает лифтингом, $x \in E \in \Sigma$, $E_\sim = E$ и $|E| < \infty$, то существует такое множество $F \in \Sigma$, что $x \in F \subset E$, $F_\sim = F$ и $|F| = \frac{1}{2}|E|$.*

Доказательство. Утверждение (1) непосредственно вытекает из классической теоремы П. Халмоша об образе меры (см. [24]), а (2) следует из (1) и элементарных свойств лифтинга. □

Следствие 3.4. *Если фактор-алгебра $\widetilde{\Sigma}$ пространства с мерой $(X, \Sigma, |\cdot|)$ безатомна, то все одноточечные подмножества X измеримы и имеют нулевую меру.*

Доказательство. Достаточно заметить, что благодаря 3.1 (1), (2) каждая точка принадлежит какому-либо измеримому множеству конечной меры, и воспользоваться утверждением (1) леммы 3.3. □

Отметим, что утверждение, обратное следствию 3.4, не имеет места. Действительно, если множество X несчетно, σ-алгебра Σ состоит их всех счетных подмножеств X и их дополнений, а мера $|\cdot|$ равна нулю на счетных множествах и единице на их дополнениях, то все одноточечные подмножества X имеют нулевую меру, но тем не менее $X^\sim$ является атомом фактор-алгебры $\widetilde{\Sigma}$ пространства с мерой $(X, \Sigma, |\cdot|)$.

Пусть (X, Σ) — произвольное измеримое пространство. Для любой точки $x \in X$ и множества $E \in \Sigma$ положим $\delta_x(E) = 1$, если $x \in E$, и $\delta_x(E) = 0$ в противном случае. Определенную таким образом меру δ_x принято называть *дельта-мерой* или *мерой Дирака* (вырожденной в точке x). Очевидно, что $\delta_x \in ca(\Sigma)$ для всех $x \in X$.

Будем говорить, что *множество $E \subset X$ разделяет точки $x, y \in X$* (или *точки x и y разделяются множеством E*), если либо $x \in E$ и $y \notin E$, либо $x \notin E$ и $y \in E$. Точки $x, y \in X$ будем называть Σ-*разделимыми*, если x и y

разделяются некоторым элементом Σ, и Σ-*неразделимыми* в противном случае. Очевидно, что точки x и y являются Σ-неразделимыми тогда и только тогда, когда $\delta_x = \delta_y$.

Как легко видеть, отношение Σ-неразделимости является отношением эквивалентности. Фактор-классы множества X по отношению Σ-неразделимости будем называть *комками* пространства (X, Σ).

Очевидно, что измеримые комки пространства (X, Σ) — это в точности атомы булевой алгебры Σ.

Замечание 3.5. Отметим, что комок не обязан быть измеримым множеством. Действительно, пусть $X = [0, 1]$. Рассмотрим неизмеримое по Лебегу множество $G \subset X$ и положим

$$\Sigma = \{E \in \mathscr{L} : \ E \supset G \text{ или } E \cap G = \varnothing\},$$

где $\mathscr{L}$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств X. Очевидно, что (X, Σ) — измеримое пространство и G — его неизмеримый комок. (Все остальные комки измеримы и имеют вид $\{x\}$, где $x \in X \backslash G$.)

Подмножество $Y \subset X$ будем называть Σ-*согласованным*, если Y не разделяет Σ-неразделимые точки или, что то же самое, Y является объединением некоторого множества комков. Совокупность всех Σ-согласованных подмножеств X обозначим символом $\overline{\Sigma}$. Как легко видеть, $\overline{\Sigma}$ является σ-алгеброй и полной атомной булевой алгеброй, содержащей Σ (вопрос о совпадении Σ и $\overline{\Sigma}$ рассмотрен ниже в предложении 3.6).

Функцию $f \colon X \to \mathbb{R}$ назовем Σ-*согласованной*, если $f(x) = f(y)$ для любых Σ-неразделимых точек $x, y \in X$, т. е. для любых $x, y \in X$ из равенства $\delta_x = \delta_y$ вытекает равенство $f(x) = f(y)$. Очевидно, что функция является Σ-согласованной в том и только том случае, если она измерима относительно σ-алгебры $\overline{\Sigma}$. Отметим, что пространство $B(X, \overline{\Sigma})$ всех Σ-согласованных ограниченных функций является банаховым K-пространством.

Измеримое пространство (X, Σ) условимся называть *поточечно измеримым*, если $\{x\} \in \Sigma$ для всех $x \in X$.

Измеримое пространство (X, Σ) назовем *атомным*, если все его комки измеримы (т. е. являются атомами Σ) или, что то же самое, объединение всех атомов Σ совпадает с X.

Как легко видеть, если (X, Σ) — атомное измеримое пространство, то Σ — атомная булева алгебра. Обратное утверждение неверно. Например, измеримое пространство (X, Σ), построенное в замечании 3.5, не является атомным, однако Σ — атомная булева алгебра.

Предложение 3.6. *Следующие свойства измеримого пространства* (X, Σ) *равносильны*:

(1) (X, Σ) *является атомным и* Σ *— полная булева алгебра*;
(2) *все* Σ*-согласованные подмножества* X *измеримы* (*т. е.* $\Sigma = \overline{\Sigma}$);
(3) $\Sigma = \{\bigcup_{j \in J} X_j : J \subset I\}$ *для некоторого разбиения* $(X_i)_{i \in I}$ *множества* X.

Доказательство. Импликации (3)⇒(2) и (3)⇒(1) очевидны. Для доказательства импликации (2)⇒(3) достаточно взять в качестве $(X_i)_{i \in I}$ семейство всех комков пространства (X, Σ).

Докажем, импликацию (1)⇒(3). Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — семейство всех атомов Σ.

Рассмотрим $E \in \Sigma$ и положим $J = \{i \in I : X_i \subset E\}$. Допустим, что $E \neq \bigcup\limits_{j\in J} X_j$, т. е. существует точка $x \in E \setminus \bigcup\limits_{j\in J} X_j$. Поскольку $\bigcup\limits_{i\in I} X_i = X$, точка x принадлежит X_i для некоторого $i \in I \setminus J$, а значит, X_i не содержится в E, но имеет с E общую точку, что противоречит Σ-согласованности множества E.

Пусть теперь J — произвольное подмножество I. В силу полноты булевой алгебры Σ существует $E = \sup\limits_{j\in J} X_j \in \Sigma$. Воспользовавшись первой частью доказательства импликации (1)⇒(3), легко установить, что $E = \bigcup\limits_{j\in J} X_j$, а значит, $\bigcup\limits_{j\in J} X_j \in \Sigma$. $\square$

Измеримое пространство, обладающее одним из свойств (1), (2) или (3), сформулированных в предложении 3.6, будем называть *дискретным*.

Заметим, что поточечно измеримые и дискретные измеримые пространства являются атомными. Примером недискретного поточечно измеримого пространства может служить числовая прямая $\mathbb{R}$ с борелевской σ-алгеброй $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. В качестве примера атомного измеримого пространства, которое не является ни поточечно измеримым, ни дискретным, можно рассмотреть пространство $(\mathbb{R}^2, \{A \times \mathbb{R} : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\})$.

Семейство множеств $(E_i)_{i\in I}$ называют *измеримым разбиением* множества $E \in \Sigma$, если $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i\in I} E_i = E$ и $E_i \in \Sigma$ для всех $i \in I$.

Напомним, что *вариацией* меры $\mu \in ba(\Sigma)$ называется мера $|\mu| \in ba(\Sigma)$, определяемая формулой

$$|\mu|(E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| \,:\, (E_1, \dots, E_n) \text{ — измеримое разбиение } E\right\}.$$

Заметим, что для всех $E \in \Sigma$ имеют место равенства (см. [18])

$$|\mu|(E) = \sup_{\substack{F,\,G\in\Sigma \\ F,\,G\subset E}} (\mu(F) - \mu(G)) = \sup_{\substack{F\in\Sigma \\ F\subset E}} (\mu(F) - \mu(X\setminus F)).$$

Известно, что векторные пространства $ba(\Sigma)$ и $ca(\Sigma)$, снабженные естественным порядком ($\mu_1 \leq \mu_2$, если $\mu_1(E) \leq \mu_2(E)$ для всех $E \in \Sigma$) и нормой $\|\mu\| = |\mu|(X)$, являются банаховыми решетками (и даже банаховыми K-пространствами, см. [18]). При этом вариация меры совпадает с ее модулем в соответствующей векторной решетке.

Положительная мера $\mu \in ba(\Sigma)$ называется *чисто конечно-аддитивной*, если для любой меры $\nu \in ca(\Sigma)$ из $0 \leq \nu \leq \mu$ вытекает $\nu = 0$. Произвольная мера $\mu \in ba(\Sigma)$ называется *чисто конечно-аддитивной*, если меры μ^+ и μ^- чисто конечно-аддитивны. Подпространство $ba(\Sigma)$, состоящее из всех чисто конечно-аддитивных ограниченных мер, мы будем обозначать символом $pfa(X, \Sigma)$ или $pfa(\Sigma)$.

Замечание 3.7. Известно (см. [18]), что $pfa(\Sigma)$, как и $ca(\Sigma)$, является банаховым K-пространством, причем $ca(\Sigma)$ и $pfa(\Sigma)$ — взаимно дополнительные полосы в $ba(\Sigma)$, т. е. $ca(\Sigma)^{\perp} = pfa(\Sigma)$ и $pfa(\Sigma)^{\perp} = ca(\Sigma)$. В частности, $ba(\Sigma) = ca(\Sigma) \oplus pfa(\Sigma)$.

В дальнейшем нам понадобится следующий факт.

Теорема 3.8. *Пусть* $(X, \Sigma, |\cdot|)$ *— пространство с мерой, обладающее лифтингом* $\rho\colon \Sigma \to \Sigma$, *и булева алгебра* $\widetilde{\Sigma}$ *не имеет атомов. Тогда существует множество* $X_0 \in \Sigma$ *такое, что* $|X \backslash X_0| = 0$ *и* $\delta_x \circ \rho \in pfa(\Sigma)$ *для всех* $x \in X_0$. *Если, кроме того, мера* $|\cdot|$ *является* σ*-конечной, то* $\delta_x \circ \rho \in pfa(\Sigma)$ *для всех* $x \in X$.

Доказательство. Из свойств лифтинга с очевидностью вытекает включение $\delta_x \circ \rho \in ba(\Sigma)$ для всех $x \in X$.

Поскольку пространство с мерой $(X, \Sigma, |\cdot|)$ обладает свойством прямой суммы (см. выше), существует семейство $(E_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно не пересекающихся измеримых множеств конечной ненулевой меры такое, что $\sup\limits_{\xi\in\Xi} E_\xi^\sim = X^\sim$. Положим $X_0 = \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} \rho(E_\xi)$. Согласно [12, 1.2.12; 23, гл. I] множество X_0 измеримо и $|X \backslash X_0| = 0$. Каждой точке $x \in X_0$ сопоставим индекс $\xi_x \in \Xi$, для которого $x \in \rho(E_{\xi_x})$.

Покажем, что $\delta_x \circ \rho \in pfa(\Sigma)$ для всех $x \in X_0$. Для этого зафиксируем произвольную точку $x \in X_0$, рассмотрим меру $\mu \in ca(\Sigma)$, удовлетворяющую условиям $0 \le \mu \le \delta_x \circ \rho$, и установим равенство $\mu = 0$.

Заметим, что $\mu(E) = 0$, как только $E \in \Sigma$ и $|E| = 0$. Следовательно, мера μ абсолютно непрерывна относительно $|\cdot|$.

Положим, $F_0^x = \rho(E_{\xi_x})$. По индукции, применяя лемму 3.3, построим убывающую последовательность множеств $F_n^x \in \Sigma$ $(n \in \mathbb{N})$, удовлетворяющих следующим условиям: $x \in F_n^x$, $\rho\big(F_n^x\big) = F_n^x$, $\big|F_n^x\big| = \frac{1}{2^n}\big|F_0^x\big|$. Для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $0 \le \mu\big(X \backslash F_n^x\big) \le \delta_x\big(\rho\big(X \backslash F_n^x\big)\big) = \delta_x\big(X \backslash F_n^x\big) = 0$. С другой стороны, устремляя n к бесконечности и учитывая, что $\big|F_n^x\big| \to 0$, заключаем $\mu\big(X \backslash F_n^x\big) = \mu(X) - \mu\big(F_n^x\big) \to \mu(X)$ в силу абсолютной непрерывности μ относительно $|\cdot|$. Следовательно, $\mu = 0$.

Теперь дополнительно предположим, что мера $|\cdot|$ является σ-конечной, и покажем, что включение $\delta_x \circ \rho \in pfa(\Sigma)$ имеет место не только для рассмотренного выше случая $x \in X_0$, но и для $x \in X \backslash X_0$. Для этого зафиксируем произвольную точку $x \in X \backslash X_0$, рассмотрим меру $\mu \in ca(\Sigma)$, удовлетворяющую условиям $0 \le \mu \le \delta_x \circ \rho$, и установим равенство $\mu = 0$.

Поскольку множества E_ξ попарно не пересекаются и $|E_\xi| > 0$ для всех $\xi \in \Xi$, из σ-конечности меры $|\cdot|$ с очевидностью вытекает счетность множества Ξ (см., например, [9, X.1.6]). Следовательно, $\mu(X_0) = \mu(\bigcup\limits_{\xi\in\Xi} \rho(E_\xi)) = \sum\limits_{\xi\in\Xi} \mu(\rho(E_\xi)) \le \sum\limits_{\xi\in\Xi} \delta_x(\rho(E_\xi)) = 0$. Кроме того, $\mu(X \backslash X_0) \le \delta_x(\rho(X \backslash X_0)) = \delta_x(\varnothing) = 0$. Таким образом, $\mu = 0$. $\square$

Рассмотрение переходных функций на (X, Σ) и операторов в пространствах $B(X)$ и $ba(\Sigma)$ тесно связано с теорией векторных мер. Ниже мы приводим основные определения и факты этой теории.

Пусть (X, Σ) — измеримое пространство и V — нормированное пространство. Функция $m\colon \Sigma \to V$ называется *ограниченной векторной* (V*-значной*) *мерой*, если

(1) $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$, для любых $E, F \in \Sigma$, $E \cap F = \varnothing$;
(2) образ m ограничен по норме.

Символом $ba(X, \Sigma, V)$ или $ba(\Sigma, V)$ будем обозначать векторное пространство всех ограниченных V-значных мер на Σ. Легко заметить, что если V — нормированная решетка, то $ba(\Sigma, V)$ является упорядоченным векторным пространством относительно следующего порядка: $m_1 \le m_2$, как только $m_1(E) \le m_2(E)$ для всех $E \in \Sigma$.

Заметим, что $\varphi \circ m \in ba(\Sigma)$ для любых $\varphi \in V'$ и $m \in ba(\Sigma, V)$ и $ba(\Sigma, V)$ является нормированным пространством относительно нормы

$$\|m\| = \sup_{\substack{\varphi \in V' \\ \|\varphi\| \le 1}} \|\varphi \circ m\| = \sup_{\substack{\varphi \in V' \\ \|\varphi\| \le 1}} |\varphi \circ m|(X).$$

Замечание 3.9. В случае $V = B(X)$ формулу для нормы векторной меры можно упростить. А именно, для любой векторной меры $m \in ba(\Sigma, B(X))$ справедливо равенство

$$\|m\| = \sup_{x \in X} \|m(\cdot)(x)\|,$$

т. е. $\|m\| = \sup\limits_{x \in X} \|\varphi_x \circ m\|$, где функционал $\varphi_x \in B(X)'$ определяется формулой $\varphi_x(f) = f(x)$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\|m\| &= \sup_{\substack{\varphi \in B(X)' \\ \|\varphi\| \le 1}} \|\varphi \circ m\| = \sup_{\substack{\varphi \in B(X)' \\ \|\varphi\| \le 1}} \sup_{E,F \in \Sigma} (\varphi(m(E)) - \varphi(m(F))) \\
&= \sup_{E,F \in \Sigma} \sup_{\substack{\varphi \in B(X)' \\ \|\varphi\| \le 1}} (\varphi(m(E) - m(F))) = \sup_{E,F \in \Sigma} \|m(E) - m(F)\| \\
&= \sup_{E,F \in \Sigma} \sup_{x \in X} |m(E)(x) - m(F)(x)| = \sup_{x \in X} \sup_{E,F \in \Sigma} |m(E)(x) - m(F)(x)| \\
&= \sup_{x \in X} \|m(\cdot)(x)\|.
\end{aligned}$$

Пусть V — нормированная решетка. Векторную меру $m \in ba(\Sigma, V)$ будем называть *порядково непрерывной* (или *o-непрерывной*), если для любой последовательности измеримых множеств $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из $E_n \downarrow \varnothing$ вытекает $m(E_n) \xrightarrow{o} 0$. Векторная мера $m \in ba(\Sigma, V)$ называется *порядково счетно-аддитивной* (или *o-счетно-аддитивной*), если для любой последовательности $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ попарно дизъюнктных измеримых множеств имеет место равенство

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = o\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

Совершенно аналогично скалярному случаю (см., например, [7, IV.1]) доказывается, что векторная мера o-непрерывна тогда и только тогда, когда она o-счетно-аддитивна. Множество всех o-счетно-аддитивных векторных мер обозначим через $o\text{-}ca(X, \Sigma, V)$ или $o\text{-}ca(\Sigma, V)$.

Пусть V — банахово пространство и $m \in ba(\Sigma, V)$. Символом $St(X, \Sigma)$ или $St(X)$ обозначим нормированное подпространство $B(X)$, состоящее из всех ступенчатых функций (т. е. измеримых функций с конечным образом). Определим, оператор $I_m \colon St(X) \to V$, полагая $I_m s = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i m(E_i)$ для любой ступенчатой функции $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{E_i}$, где множества $E_i \in \Sigma$ попарно дизъюнктны (корректность такого определения достаточно очевидна). Несложно проверить, что оператор I_m ограничен по норме. Поскольку $St(X)$ — всюду плотное подпространство $B(X)$, а V — банахово пространство, существует единственное продолжение оператора I_m до ограниченного оператора из $B(X)$ в V. Значение этого продолжения на элементе $f \in B(X)$ называется *интегралом функции f по векторной мере m* и обозначается символом $\int\limits_X f\,dm$ или $\langle f, m\rangle$ (см. [20, гл. II.7]).

Из построения интеграла непосредственно следует, что $\|\langle f, m\rangle\| \le \|f\|\,\|m\|$ для любых $f \in B(X)$ и $m \in ba(\Sigma, V)$.

Если $V = \mathbb{R}$ и $\mu \in ba(\Sigma)$, то, пользуясь приведенной выше конструкцией, мы приходим к понятию *интеграла функции $f \in B(X)$ по конечно-аддитивной мере μ*, который, как и выше, будем обозначать символом $\int\limits_X f\,d\mu$ или $\langle f, \mu\rangle$ (см. [25, гл. VII]). Заметим, что определенный таким образом интеграл совпадает на $B(X)$ с так называемым обобщенным интегралом Радона (см. [26, XI.3; 1]).

Многие свойства интеграла по конечно-аддитивной мере совпадают с аналогичными свойствами интеграла Лебега и интеграла по счетно-аддитивной (знакопеременной) мере (см., например, [26, XI.3]). В частности, для любых $f \in B(X)$ и $\mu \in ba(\Sigma)$ справедливы неравенства $|\langle f, \mu\rangle| \le \langle |f|, |\mu|\rangle \le \|f\|\,\|\mu\|$.

Замечание 3.10. Известно (см. [26, XI.4]), что любой линейный ограниченный функционал $\varphi\colon B(X) \to \mathbb{R}$ единственным образом представляется в виде интеграла по некоторой мере $\mu_\varphi \in ba(\Sigma)$. При этом соответствие $\varphi \mapsto \mu_\varphi$ является линейной изометрией $B(X)'$ на $ba(\Sigma)$. С учетом этого факта пространство $ba(\Sigma)$ можно считать сопряженным к пространству $B(X)$. Например, говоря о слабой* топологии на $ba(\Sigma)$, мы всегда рассматриваем $ba(\Sigma)$ как сопряженное пространство к $B(X)$.

Обозначим символом $\Delta(\Sigma)$ векторное подпространство $ba(\Sigma)$, состоящее из всех мер вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$ и $x_i \in X$.

Замечание 3.11. Известно, что множество $\Delta(\Sigma)$ слабо* плотно в пространстве $ba(\Sigma)$ (см. [18, 4.9]), откуда с учетом включения $\Delta(\Sigma) \subset ca(\Sigma)$ следует, что $ca(\Sigma)$ также слабо* плотно в $ba(\Sigma)$.

В пространстве $ba(\Sigma, B(X))$ введем произведение, полагая

$$(m_1 * m_2)(E)(x) = \langle m_2(E), m_1(\cdot)(x)\rangle$$

для всех $x \in X$ и $E \in \Sigma$. Относительно введенного произведения $ba(\Sigma, B(X))$ является нормированной алгеброй. Ниже (см. следствие 4.9) будет показано, что $ba(\Sigma, B(X))$ представляет собой упорядоченную банахову алгебру.

Пусть V — банахово пространство. Будем говорить, что вектор-функция $w\colon X \to V$ *ограничена*, если $\sup\limits_{x\in X} \|w(x)\| < \infty$.

Вектор-функция $w\colon X \to V'$ называется *слабо* измеримой*, если для каждого элемента $v \in V$ функция $\langle v, w(\cdot)\rangle\colon X \to \mathbb{R}$ измерима, т. е. $\{x \in X : \langle v, w(x)\rangle < \alpha\} \in \Sigma$ для всех $v \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Через $\ell_w^\infty(X, \Sigma, V')$ или $\ell_w^\infty(X, V')$ обозначим множество всех ограниченных слабо* измеримых вектор-функций из X в V'. Множество $\ell_w^\infty(X, V')$ является нормированным пространством относительно поточечных линейных операций и нормы $\|w\| = \sup\limits_{x\in X} \|w(x)\|$.

В случае $V = B(X)$ в пространстве $\ell_w^\infty(X, V') = \ell_w^\infty(X, ba(\Sigma))$ можно ввести произведение, полагая

$$(w_1 * w_2)(x)(E) = \langle w_2(\cdot)(E), w_1(x)\rangle$$

для всех $x \in X$ и $E \in \Sigma$. Как показано ниже (см. следствие 4.9), относительно введенного произведения и поточечного порядка пространство $\ell_w^\infty(X, ba(\Sigma))$ является упорядоченной банаховой алгеброй.

Подпространство $\ell_w^\infty(X, ba(\Sigma))$, состоящее из функций, образ которых лежит в $ca(\Sigma)$, условимся обозначать символом $\ell_w^\infty(X, ca(\Sigma))$.

Предложение 3.12. *Если (X,Σ) — измеримое пространство с бесконечной σ-алгеброй Σ, то включение $\mathscr{L}_w(ba(\Sigma)) \subset \mathscr{L}(ba(\Sigma))$ является строгим.*

Доказательство. Поскольку $ca(\Sigma)$ является собственным замкнутым подпространством $ba(\Sigma)$, существует ненулевой ограниченный линейный функционал $\varphi\colon ba(\Sigma) \to \mathbb{R}$ такой, что $\varphi \equiv 0$ на $ca(\Sigma)$.

Пусть ν — произвольный ненулевой элемент $ba(\Sigma)$. Определим оператор $A\colon ba(\Sigma) \to ba(\Sigma)$, полагая $A\mu = \varphi(\mu)\nu$ для всех $\mu \in ba(\Sigma)$. Очевидно, что $A \in \mathscr{L}(ba(\Sigma))$, $A \neq 0$ и $A \equiv 0$ на $ca(\Sigma)$. Таким образом, ненулевой оператор A равен нулю на слабо* плотном подмножестве $ba(\Sigma)$ и, следовательно, не является слабо* непрерывным, т. е. $A \notin \mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$. $\square$

Для произвольного оператора $A \in \mathscr{L}(ba(\Sigma))$ и множества $E \in \Sigma$ обозначим символом A_E функцию из X в $\mathbb{R}$, определенную формулой $A_E(x) = (A\delta_x)(E)$ для всех $x \in X$.

Замечание 3.13. Если $A \in \mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$, то $A_E \in B(X)$ для всех $E \in \Sigma$. Действительно, для произвольного множества $E \in \Sigma$ рассмотрим функцию $\varphi_E\colon ba(\Sigma) \to \mathbb{R}$, определенную формулой $\varphi_E(\mu) = (A\mu)(E)$, $\mu \in ba(\Sigma)$. Очевидно, что φ_E — слабо* непрерывный линейный функционал. С учетом замечания 3.10 существует функция $f \in B(X)$ такая, что $\varphi_E(\mu) = \langle f, \mu\rangle$ для всех $\mu \in ba(\Sigma)$. Следовательно, $A_E(x) = (A\delta_x)(E) = \varphi_E(\delta_x) = \langle f, \delta_x\rangle = f(x)$ для всех $x \in X$.

Обратное, вообще говоря, неверно: оператор $A \in \mathscr{L}(ba(\Sigma))$, построенный в доказательстве предложения 3.12, не принадлежит $\mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$, но тем не менее удовлетворяет соотношению $A_E \in B(X)$ для всех $E \in \Sigma$.

Заметим, что в силу предложения 2.4 и замечания 3.10 имеет место равенство $\mathscr{L}_w(ba(\Sigma)) = \{T' : T \in \mathscr{L}(B(X))\}$. Поэтому, учитывая соотношение $(T_1T_2)' = T_2'T_1'$, естественно снабдить пространство $\mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$ произведением $A_1 * A_2 = A_2A_1$, относительно которого $\mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$ является упорядоченной банаховой алгеброй.

Определение 3.14. Оператор $A \in \mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$ назовем *ca-инвариантным*, если $A\,ca(\Sigma) \subset ca(\Sigma)$. Множество всех ca-инвариантных слабо* непрерывных операторов обозначим символом $\mathscr{L}_{wc}(ba(\Sigma))$.

Очевидно, что $\mathscr{L}_{wc}(ba(\Sigma))$ является упорядоченной банаховой подалгеброй $\mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$.

§ 4. Изоморфизмы между пространством переходных функций и другими классическими пространствами

В данном параграфе мы наделим множество переходных функций $\mathscr{P}(X,\Sigma)$ структурой упорядоченной нормированной алгебры и исследуем его взаимосвязи с пространствами линейных операторов, векторных мер и измеримых вектор-функций. Будет также установлено, что упорядоченное векторное пространство переходных функций в общем случае не является векторной решеткой.

В дальнейшем (а именно в § 5) нам пригодится следующее обобщение понятия переходной функции.

Определение 4.1. Пусть Σ_1 и Σ_2 — σ-алгебры подмножеств некоторого множества X. Обозначим символом $\mathscr{P}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$ множество всех функций $p\colon X\times\Sigma_1\to\mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $p(\cdot,E)\in B(X,\Sigma_2)$ для всех $E\in\Sigma_1$;
(2) $p(x,\cdot)\in ba(\Sigma_1)$ для всех $x\in X$.

Теорема 4.2. *Если $p\in\mathscr{P}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$, то функция p равномерно ограничена и, более того, $\sup\limits_{x\in X}\|p(x,\cdot)\|<\infty$.*

Доказательство. Для каждой точки $x\in X$ положим $\mu_x=p(x,\cdot)$. Согласно 4.1 имеем $\mu_x\in ba(\Sigma_1)$ и $\sup\limits_{x\in X}|\mu_x(E)|<\infty$ для всех $E\in\Sigma_1$. Из теоремы Никодима об ограниченности (см. [21, I.3.1]) следует, что $\sup\limits_{x\in X}\|p(x,\cdot)\|=\sup\limits_{x\in X}\|\mu_x\|=C<\infty$. В частности, $|p(x,E)|\le\|p(x,\cdot)\|\le C$ для всех $x\in X$ и $E\in\Sigma_1$. $\square$

Для любой функции $p\in\mathscr{P}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$ обозначим через T_p функцию из $B(X,\Sigma_1)$ в $\mathbb{R}^X$, определяемую равенством $(T_pf)(x)=\langle f,p(x,\cdot)\rangle$ для любых $f\in B(X,\Sigma_1)$ и $x\in X$.

Лемма 4.3. *Если $p\in\mathscr{P}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$, то $T_p\in\mathscr{L}(B(X,\Sigma_1),B(X,\Sigma_2))$. При этом $\|T_p\|\le\sup\limits_{x\in X}\|p(x,\cdot)\|$.*

Доказательство. Очевидно, что T_p — линейный оператор из $B(X,\Sigma_1)$ в $\mathbb{R}^X$. Покажем, что оператор T_p действует в $B(X,\Sigma_2)$. Для каждого элемента $E\in\Sigma_1$ имеем $T_p1_E=p(\cdot,E)\in B(X,\Sigma_2)$. Из линейности T_p заключаем, что $T_ps\in B(X,\Sigma_2)$ для любой ступенчатой функции $s\in St(X,\Sigma_1)$. Пусть теперь f — произвольный элемент $B(X,\Sigma_1)$ и $s_n\in St(X,\Sigma_1)$ $(n\in\mathbb{N})$ — последовательность ступенчатых функций, равномерно сходящаяся к f. Заметим, что $(T_p(\cdot))(x)\in B(X,\Sigma_1)'$ для всех $x\in X$. Следовательно, $(T_ps_n)(x)\to(T_pf)(x)$ при $n\to\infty$ для всех $x\in X$, а значит, функция T_pf является Σ_2-измеримой, будучи поточечным пределом Σ_2-измеримых функций. Кроме того, для всех $x\in X$ имеем

$$|(T_pf)(x)|=|\langle f,p(x,\cdot)\rangle|\le\|f\|\,\|p(x,\cdot)\|\le\|f\|\sup_{y\in X}\|p(y,\cdot)\|. \tag{$*$}$$

Учитывая 4.2, заключаем, что $T_pf\in B(X,\Sigma_2)$. Таким образом, T_p — линейный оператор из $B(X,\Sigma_1)$ в $B(X,\Sigma_2)$. Из $(*)$ также вытекает оценка для нормы оператора T_p. $\square$

Пусть $\mathscr{P}(X,\Sigma)$ — множество всех переходных функций (см. § 1) на измеримом пространстве (X,Σ). Из теоремы 4.2 непосредственно следует, что каждая функция $p\in\mathscr{P}(X,\Sigma)$ равномерно ограничена и $\sup\limits_{x\in X}\|p(x,\cdot)\|<\infty$.

Наделим множество $\mathscr{P}(X,\Sigma)$ структурой векторного пространства с поточечными линейными операциями. В полученном векторном пространстве введем норму, полагая

$$\|p\|=\sup_{x\in X}\|p(x,\cdot)\|=\sup_{x\in X}|p(x,\cdot)|(X).$$

Снабдим пространство $\mathscr{P}(X,\Sigma)$ поточечным порядком:

$$p_1\le p_2,\ \text{ если } p_1(x,E)\le p_2(x,E) \text{ для любых } x\in X \text{ и } E\in\Sigma.$$

Определим операцию умножения переходных функций $p_1, p_2 \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$ следующим образом:

$$(p_1 * p_2)(x, E) = \langle p_2(\cdot, E), p_1(x, \cdot)\rangle \quad \text{для всех } x \in X \text{ и } E \in \Sigma.$$

Несложно убедиться в том, что произведение переходных функций действительно является переходной функцией и относительно введенных операций $\mathscr{P}(X, \Sigma)$ является упорядоченной нормированной алгеброй.

Ниже мы покажем изоморфность упорядоченных нормированных алгебр $\mathscr{P}(X, \Sigma)$, $\mathscr{L}(B(X))$, $\mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$, $ba(\Sigma, B(X))$ и $\ell^\infty_w(X, ba(\Sigma))$.

Определение 4.4. Для любых $p \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$, $T \in \mathscr{L}(B(X))$, $A \in \mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$, $m \in ba(\Sigma, B(X))$, $v \in \ell^\infty_w(X, ba(\Sigma))$ определим функции $p_T, p_A, p_m, p_v \colon X \times \Sigma \to \mathbb{R}$, $T_p, T_A, T_m, T_v \colon B(X) \to B(X)$, $A_p, A_T, A_m, A_v \colon ba(\Sigma) \to ba(\Sigma)$, $m_p, m_T, m_A, m_v \colon \Sigma \to B(X)$, $v_p, v_T, v_A, v_m \colon X \to ba(\Sigma)$ следующими формулами:

$$\begin{aligned}
p_T(x, E) &= (T1_E)(x), & (T_p f)(x) &= \langle f, p(x, \cdot)\rangle, & (A_p\mu)(E) &= \langle p(\cdot, E), \mu\rangle,\\
p_A(x, E) &= (A\delta_x)(E), & (T_A f)(x) &= \langle f, A\delta_x\rangle, & (A_T\mu)(E) &= \langle T1_E, \mu\rangle,\\
p_m(x, E) &= m(E)(x), & (T_m f)(x) &= \langle f, m\rangle(x), & (A_m\mu)(E) &= \langle m(E), \mu\rangle,\\
p_v(x, E) &= v(x)(E), & (T_v f)(x) &= \langle f, v(x)\rangle, & (A_v\mu)(E) &= \langle v(\cdot)(E), \mu\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_p(E)(x) &= p(x, E), & v_p(x)(E) &= p(x, E),\\
m_T(E)(x) &= (T1_E)(x), & v_T(x)(E) &= (T1_E)(x),\\
m_A(E)(x) &= (A\delta_x)(E), & v_A(x)(E) &= (A\delta_x)(E),\\
m_v(E)(x) &= v(x)(E), & v_m(x)(E) &= m(E)(x),
\end{aligned}$$

где $x \in X$, $E \in \Sigma$, $f \in B(X)$, $\mu \in ba(\Sigma)$.

Лемма 4.5. *Для любых $T \in \mathscr{L}(B(X))$, $f \in B(X)$ и $\mu \in ba(\Sigma)$ имеет место равенство*

$$\langle Tf, \mu\rangle = \langle f, A_T\mu\rangle.$$

Иными словами, при естественном отождествлении пространств $B(X)'$ и $ba(\Sigma)$ (см. замечание 3.10) *справедливо соотношение $A_T = T'$.*

Доказательство. Положим $\varphi = \langle T(\cdot), \mu\rangle$. Очевидно, что $\varphi \in B(X)'$, а значит, $\varphi = \langle \cdot, \nu\rangle$ для некоторой меры $\nu \in ba(\Sigma)$ (см. замечание 3.10). Для всех $E \in \Sigma$ имеем $(A_T\mu)(E) = \langle T1_E, \mu\rangle = \varphi(1_E) = \langle 1_E, \nu\rangle = \nu(E)$. Следовательно, $\langle Tf, \mu\rangle = \varphi(f) = \langle f, \nu\rangle = \langle f, A_T\mu\rangle$. $\square$

Предложение 4.6. *В условиях определения 4.4 имеют место включения $p_T, p_A, p_m, p_v \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$, $T_p, T_A, T_m, T_v \in \mathscr{L}(B(X))$, $A_p, A_T, A_m, A_v \in \mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$, $m_p, m_T, m_A, m_v \in ba(\Sigma, B(X))$, $v_p, v_T, v_A, v_m \in \ell^\infty_w(X, ba(\Sigma))$.*

Доказательство. Включение $T_p \in \mathscr{L}(B(X))$ вытекает из леммы 4.3.

Для всех $E \in \Sigma$ имеем $A_p\mu(E) = \langle p(\cdot, E), \mu\rangle = \langle T_p 1_E, \mu\rangle = A_{T_p}\mu(E)$. Поскольку $A_{T_p} = T_p'$ (см. лемму 4.5), из предложения 2.4 вытекает включение $A_p \in \mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$.

Покажем, что $v_p \in \ell^\infty_w(X, ba(\Sigma))$. Для любого множества $E \in \Sigma$ имеем $\langle 1_E, v_p(\cdot)\rangle = p(\cdot, E) = T_p 1_E$. Следовательно, $\langle s, v_p(\cdot)\rangle = T_p s$ для всех $s \in St(X, \Sigma)$. Если теперь $f \in B(X)$, то $\langle f, v_p(x)\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle s_n, v_p(x)\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} (T_p s_n)(x) = (T_p f)(x)$ для всех $x \in X$, где $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — равномерно сходящаяся к f последовательность элементов $St(X, \Sigma)$. Остается заметить, что $\sup\limits_{x\in X} \|v_p(x)\| = \sup\limits_{x\in X} \|p(x, \cdot)\| = \|p\| < \infty$.

Остальные включения либо очевидны, либо с легкостью выводятся из установленных выше с помощью леммы 4.5, предложения 2.4, замечания 3.13 и равенства $p_A(\cdot, E) = A_E$ $(E \in \Sigma)$. $\square$

Лемма 4.7. *Пусть $V_1, \dots, V_n$ — упорядоченные нормированные пространства и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — отображения, удовлетворяющие следующим условиям для всех $i = 1, \dots, n$:*

(a) *α_i — линейный оператор из V_i в V_{i+1};*
(b) *$\|\alpha_i(v)\| \le \|v\|$ для всех $v \in V_i$;*
(c) *для всех $v \in V_i$ из $v \ge 0$ вытекает $\alpha_i(v) \ge 0$;*
(d) *$(\alpha_{i+n-1} \cdots \alpha_{i+1}\alpha_i)(v) = v$ для всех $v \in V_i$,*

где $V_{n+1} = V_1$ и $\alpha_{n+k} = \alpha_k$ для $k = 1, \dots, n-1$. Тогда каждое из отображений α_i является линейной изометрией и порядковым изоморфизмом между V_i и V_{i+1}.

Доказательство. Зафиксируем $i \in \{1, \dots, n\}$. Оператор α_i сюръективен, поскольку $\alpha_i((\alpha_{i+n-1} \cdots \alpha_{i+2}\alpha_{i+1})(w)) = w$ для всех $w \in V_{i+1}$ согласно (d). Для $v \in V_i$ с учетом (d) и (b) имеем $\|v\| \le \|\alpha_{i+n-1}\| \cdots \|\alpha_{i+1}\|\, \|\alpha_i\|\, \|v\| \le \|v\|$. Следовательно, α_i является изометрией V_i на V_{i+1}. Осталось заметить, что согласно (d) и (c) для всех $v \in V_i$ из $\alpha_i(v) \ge 0$ вытекает $v = (\alpha_{i+n-1} \cdots \alpha_{i+1}\alpha_i)(v) = (\alpha_{i+n-1} \cdots \alpha_{i+1})(\alpha_i(v)) \ge 0$. $\square$

Теорема 4.8. *Диаграмма, вершинами которой являются пять пространств $\mathscr{P}(X,\Sigma)$, $\mathscr{L}(B(X))$, $\mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$, $ba(\Sigma, B(X))$ и $\ell^\infty_w(X, ba(\Sigma))$, а ребрами — двадцать отображений, определенных в 4.4, коммутативна. Кроме того, каждое из двадцати отображений является изоморфизмом между соответствующими пространствами, где под изоморфизмом понимается линейная изометрия, сохраняющая произведение и являющаяся порядковым изоморфизмом.*

Доказательство. Положим $V_1 = V_6 = \mathscr{P}(X,\Sigma)$, $V_2 = \mathscr{L}(B(X))$, $V_3 = \mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$, $V_4 = ba(\Sigma, B(X))$, $V_5 = \ell^\infty_w(X, ba(\Sigma))$ и рассмотрим отображения $\alpha_i \colon V_i \to V_{i+1}$ $(i = 1, \dots, 5)$, определенные формулами $\alpha_1(p) = T_p$, $\alpha_2(T) = A_T$, $\alpha_3(A) = m_A$, $\alpha_4(m) = v_m$, $\alpha_5(v) = p_v$.

Покажем, что отображения α_i удовлетворяют условиям (a)–(d) леммы 4.7 и сохраняют произведение. Условие (b) легко проверить, используя, например, лемму 4.3 и замечание 3.9. Проверка остальных условий также не составляет труда. В качестве демонстрации мы поясним соотношения $A_{T_{p_{v_{m_A}}}} = A$ и $T_{p_1 * p_2} = T_{p_1}T_{p_2}$ для всех $A \in \mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$ и $p_1, p_2 \in \mathscr{P}(X,\Sigma)$. Поскольку, как легко видеть, $\big(A_{T_{p_{v_{m_A}}}}\delta_x\big)(E) = (A\delta_x)(E)$ для всех $x \in X$ и $E \in \Sigma$, операторы $A_{T_{p_{v_{m_A}}}}$ и A совпадают на слабо* плотном подмножестве $\Delta(\Sigma) \subset ba(\Sigma)$ (см. замечание 3.11), а значит, совпадают всюду на $ba(\Sigma)$ в силу слабой* непрерывности. Соотношение $T_{p_1 * p_2} = T_{p_1}T_{p_2}$ вытекает из непрерывности рассматриваемых операторов и легко устанавливаемого равенства $(T_{p_1 * p_2}1_E)(x) = (T_{p_1}T_{p_2}1_E)(x)$ для всех $x \in X$ и $E \in \Sigma$.

Итак, в силу леммы 4.7 отображения $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ являются изоморфизмами. Тот факт, что отображения $T \mapsto p_T$, $A \mapsto T_A$, $m \mapsto A_m$, $v \mapsto m_v$ и $p \mapsto v_p$ являются обратными к соответствующим изоморфизмам $\alpha_1, \dots, \alpha_5$, следует из очевидных равенств $p_{T_p} = p$, $m_{A_m} = m$, $v_{m_v} = v$, $p_{v_p} = p$ и соотношения $(A_{T_A}\mu)(E) = \langle T_A 1_E, \mu \rangle = \langle 1_E, A\mu \rangle = (A\mu)(E)$, справедливого для всех $E \in \Sigma$ и $\mu \in ba(\Sigma)$ в силу леммы 4.5.

Утверждение теоремы теперь несложно получить с помощью установленных выше фактов, п. (d) леммы 4.7 для отображений $\alpha_1, \dots, \alpha_5$, а также легко проверяемых равенств $(m \mapsto p_m) = \alpha_5\alpha_4$, $(A \mapsto p_A) = \alpha_5\alpha_4\alpha_3$, $(m \mapsto T_m) = \alpha_1\alpha_5\alpha_4$, $(v \mapsto T_v) = \alpha_1\alpha_5$, $(p \mapsto A_p) = \alpha_2\alpha_1$, $(v \mapsto A_v) = \alpha_2\alpha_1\alpha_5$, $(p \mapsto m_p) = \alpha_3\alpha_2\alpha_1$, $(T \mapsto m_T) = \alpha_3\alpha_2$, $(T \mapsto v_T) = \alpha_4\alpha_3\alpha_2$, $(A \mapsto v_A) = \alpha_4\alpha_3$. $\square$

Следствие 4.9. *Пространства $\mathscr{P}(X,\Sigma)$, $\mathscr{L}(B(X))$, $\mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$, $ba(\Sigma,B(X))$ и $\ell^\infty_w(X,ba(\Sigma))$ являются упорядоченными банаховыми алгебрами.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $\mathscr{L}(B(X))$ — упорядоченная банахова алгебра, и воспользоваться теоремой 4.8. $\square$

Из следующего утверждения вытекает, что упорядоченные векторные пространства $\mathscr{P}(X,\Sigma)$, $\mathscr{L}(B(X))$, $\mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$, $ba(\Sigma,B(X))$ и $\ell^\infty_w(X,ba(\Sigma))$, вообще говоря, не являются векторными решетками.

Теорема 4.10. *Пусть $(X,\Sigma,|\cdot|)$ — пространство с мерой, имеющее лифтинг, причем $\{x\}\in\Sigma$ и $|\{x\}|=0$ для всех $x\in X$ и существует неизмеримое подмножество $G\subset X$.* (В качестве такого пространства с мерой можно взять, например, отрезок $[0,1]$ с мерой Лебега.) *Тогда упорядоченное векторное пространство $\mathscr{L}(B(X))$ не является векторной решеткой.*

Доказательство. Определим $T\in\mathscr{L}(B(X))$, полагая $Tf=1_G(f-f_\sim)$ для всех $f\in B(X)$, и убедимся в том, что определенный таким образом оператор не имеет положительной части. (Тот факт, что оператор T действует именно в $B(X)$ и является ограниченным, вытекает из совпадения функций f и $f_\sim$ почти всюду и соотношений $|1_G(f-f_\sim)|\le|f|+|f_\sim|=|f|+|f|_\sim\le 2\|f\|$, обеспечиваемых свойствами лифтинга.)

Допустим вопреки доказываемому, что оператор T имеет положительную часть T^+. Тогда для всех $x\in G$ справедливы соотношения $T^+1_X\ge T^+1_{\{x\}}\ge T1_{\{x\}}=1_{\{x\}}$, т. е. $T^+1_X\ge 1$ на G. Зафиксируем произвольную точку $x\in X\backslash G$ и определим положительный оператор $Z_x\in\mathscr{L}(B(X))$ формулой $Z_xf=1_{X\backslash\{x\}}f$, $f\in B(X)$. Тогда для всех положительных $f\in B(X)$ имеем $Z_xf=1_{X\backslash\{x\}}f\ge 1_Gf\ge 1_G(f-f_\sim)=Tf$, т. е. $Z_x\ge T$. Следовательно, $Z_x\ge T^+$ и, в частности, $Z_x1_X\ge T^+1_X$, откуда вытекает равенство $T^+1_X=0$ на $X\backslash G$. С другой стороны, как было установлено выше, $T^+1_X\ge 1$ на G, а значит, функция T^+1_X неизмерима. $\square$

§ 5. Счетно-аддитивные и чисто конечно-аддитивные переходные функции

В данном параграфе мы вводим и исследуем пространства $\mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)$ и $\mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma)$ счетно-аддитивных и чисто конечно-аддитивных переходных функций, показываем, что они являются взаимно дополнительными полосами относительно естественной дизъюнктности, и рассматриваем вопрос о разложении $\mathscr{P}(X,\Sigma)=\mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)\oplus\mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma)$.

Отметим, что аналоги пространств $\mathscr{P}(X,\Sigma)$, $\mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)$ и $\mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma)$ для случая конечно-аддитивных переходных вероятностей были рассмотрены в работе А. И. Жданка [2] (в их связи с соответствующими цепями Маркова). В той же работе был впервые поднят вопрос о разложении конечно-аддитивных переходных вероятностей в сумму счетно-аддитивной и чисто конечно-аддитивной составляющих. Ниже мы исследуем этот вопрос (в более общей ситуации произвольных переходных функций) и, в частности, устанавливаем, что такое разложение, вообще говоря, не имеет места. Попутно мы плотным образом вкладываем $\mathscr{P}(X,\Sigma)$ в некоторое банахово K-пространство $\overline{\mathscr{P}}(X,\Sigma)$ и изучаем порядковые свойства этого вложения.

Пусть (X, Σ) — произвольное измеримое пространство.

Определение 5.1. Переходную функцию $p \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$ будем называть *счетно-аддитивной*, если $p(x, \cdot) \in ca(\Sigma)$ для всех $x \in X$. Множество всех счетно-аддитивных переходных функций обозначим символом $\mathscr{P}_{ca}(X, \Sigma)$.

Теорема 5.2. *Каждое из пространств $\mathscr{P}_{ca}(X, \Sigma)$, $\mathscr{L}_o(B(X))$, $\mathscr{L}_{wc}(ba(\Sigma))$, o-$ca(\Sigma, B(X))$ и $\ell_w^\infty(X, ca(\Sigma))$ является упорядоченной банаховой подалгеброй $\mathscr{P}(X, \Sigma)$, $\mathscr{L}(B(X))$, $\mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$, $ba(\Sigma, B(X))$ и $\ell_w^\infty(X, ba(\Sigma))$ соответственно. Диаграмма, вершинами которой служат эти пять подалгебр, а ребрами — сужения двадцати отображений, определенных в 4.4, коммутативна. Каждое из двадцати сужений — изоморфизм между соответствующими пространствами, где под изоморфизмом понимается линейная изометрия, сохраняющая произведение и являющаяся порядковым изоморфизмом.*

Доказательство. Принимая во внимание теорему 4.8, достаточно заметить, что $\mathscr{L}_o(B(X))$ является упорядоченной банаховой подалгеброй $\mathscr{L}(B(X))$, и установить включения $T_p \in \mathscr{L}_o(B(X))$, $A_T \in \mathscr{L}_{wc}(ba(\Sigma))$, $m_A \in o$-$ca(\Sigma, B(X))$, $v_m \in \ell_w^\infty(X, ca(\Sigma))$, $p_v \in \mathscr{P}_{ca}(X, \Sigma)$ для любых $p \in \mathscr{P}_{ca}(X, \Sigma)$, $T \in \mathscr{L}_o(B(X))$, $A \in \mathscr{L}_{wc}(ba(\Sigma))$, $m \in o$-$ca(\Sigma, B(X))$, $v \in \ell_w^\infty(X, ca(\Sigma))$.

В приводимых ниже рассуждениях мы многократно используем замечания 2.3 без явных ссылок.

Докажем, что $T_p \in \mathscr{L}_o(B(X))$. Пусть последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $B(X)$ o-сходится к $f \in B(X)$. Так как $p(x, \cdot) \in ca(\Sigma)$ $(x \in X)$, в силу теоремы Лебега для всех $x \in X$ имеем $(T_p f_n)(x) = \langle f_n, p(x, \cdot)\rangle \to \langle f, p(x, \cdot)\rangle = (T_p f)(x)$. Кроме того, $\|T_p f_n\| \le \|T_p\| \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \|f_m\|$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а значит, $T_p f_n \xrightarrow{o} T_p f$.

Установим включение $A_T \in \mathscr{L}_{wc}(ba(\Sigma))$. Пусть $\mu \in ca(\Sigma)$, $E_n \in \Sigma$ $(n \in \mathbb{N})$ и $E_n \downarrow \varnothing$. Секвенциальная o-непрерывность оператора T влечет сходимость $T1_{E_n} \xrightarrow{o} 0$. Следовательно, в силу теоремы Лебега $(A_T\mu)(E_n) = \langle T1_{E_n}, \mu\rangle \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $A_T\mu \in ca(\Sigma)$.

Покажем, что $m_A \in o$-$ca(\Sigma, B(X))$. Пусть $E_n \in \Sigma$ $(n \in \mathbb{N})$, $E_n \downarrow \varnothing$. Для всех $x \in X$ с учетом включения $A\delta_x \in ca(\Sigma)$ имеем $m_A(E_n)(x) = (A\delta_x)(E_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Кроме того, $\|m_A(E_n)\| \le \|m_A\|$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а значит, $m_A(E_n) \xrightarrow{o} 0$.

Включения $v_m \in \ell_w^\infty(X, ca(\Sigma))$ и $p_v \in \mathscr{P}_{ca}(X, \Sigma)$ очевидны. $\square$

Введем обозначение $\sim$ для отношения Σ-неразделимости на X, т. е. запись $x \sim y$ означает, что точки $x, y \in X$ лежат в одном комке пространства (X, Σ).

Обозначим символом $\overline{\mathscr{P}}(X, \Sigma)$ множество всех функций $p\colon X \times \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям для любых $x, y \in X$ и $E \in \Sigma$:

(a) $p(x, \cdot) \in ba(\Sigma)$;
(b) если $x \sim y$, то $p(x, E) = p(y, E)$;
(c) функция $p(\cdot, E)$ ограничена.

Превратим множество $\overline{\mathscr{P}}(X, \Sigma)$ в упорядоченное нормированное пространство, наделив его поточечными линейными операциями, поточечным порядком и нормой $\|p\| = \sup\limits_{x\in X} \|p(x, \cdot)\| = \sup\limits_{x\in X} |p(x, \cdot)|(X)$, конечность которой обеспечивается теоремой 4.2 в силу очевидного равенства $\overline{\mathscr{P}}(X, \Sigma) = \mathscr{P}(X, \Sigma, \overline{\Sigma})$, где $\overline{\Sigma}$ — σ-алгебра Σ-согласованных подмножеств X.

Упорядоченное нормированное пространство $\overline{\mathscr{P}}(X, \Sigma)$ с очевидностью изоморфно банаховому K-пространству $\ell_\Sigma^\infty(X, ba(\Sigma))$ всех ограниченных Σ-согласованных $ba(\Sigma)$-значных функций, т. е. ограниченных функций $v\colon X \to ba(\Sigma)$, удовлетворяющих условию $v(x) = v(y)$ при $x \sim y$. Тем самым $\overline{\mathscr{P}}(X,\Sigma)$ также является банаховым K-пространством. Кроме того, совершенно аналогично доказательству теоремы 4.8 устанавливается изоморфность $\overline{\mathscr{P}}(X,\Sigma)$ банаховым K-пространствам $\mathscr{L}(B(X,\Sigma), B(X,\overline{\Sigma}))$, $\mathscr{L}_w(ba(\overline{\Sigma}), ba(\Sigma))$ и $ba(\Sigma, B(X,\overline{\Sigma}))$. Конкретные изоморфизмы между всеми упомянутыми пространствами определяются формулами, приведенными в определении 4.4.

Определение 5.3. Переходные функции $p_1, p_2 \in \mathscr{P}(X,\Sigma)$ будем называть *дизъюнктными* и писать $p_1 \perp p_2$, если меры $p_1(x,\cdot)$ и $p_2(x,\cdot)$ дизъюнктны для каждой точки $x \in X$.

Заметим, что $\mathscr{P}(X,\Sigma) \subset \overline{\mathscr{P}}(X,\Sigma)$ и переходные функции $p_1, p_2 \in \mathscr{P}(X,\Sigma)$ дизъюнктны в смысле приведенного выше определения тогда и только тогда, когда p_1 и p_2 дизъюнктны в K-пространстве $\overline{\mathscr{P}}(X,\Sigma)$.

Теорема 5.4. *Пусть (X,Σ) — атомное измеримое пространство.*

(1) *Множество $\mathscr{P}(X,\Sigma)$ минорирует $\overline{\mathscr{P}}(X,\Sigma)$.*

(2) *Множество $\mathscr{P}(X,\Sigma)$ наследственно вложено в $\overline{\mathscr{P}}(X,\Sigma)$.*

(3) *Если семейство переходных функций $(p_\xi)_{\xi\in\Xi}$ имеет в $\mathscr{P}(X,\Sigma)$ супремум или инфимум, то соответственно*

$$(\sup_{\xi\in\Xi} p_\xi)(x,\cdot) = \sup_{\xi\in\Xi} p_\xi(x,\cdot), \quad (\inf_{\xi\in\Xi} p_\xi)(x,\cdot) = \inf_{\xi\in\Xi} p_\xi(x,\cdot)$$

для всех $x \in X$, где точные границы в правых частях равенств вычисляются в K-пространстве $ba(\Sigma)$.

(4) *Введенное в 5.3 отношение $\perp$ является отношением дизъюнктности на векторном пространстве $\mathscr{P}(X,\Sigma)$ в смысле определения 2.1.*

(5) *Каждый элемент $\bar{p} \in \overline{\mathscr{P}}(X,\Sigma)$ представим в виде $\bar{p} = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} p_\xi$ для некоторого семейства $(p_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathscr{P}(X,\Sigma)$ попарно дизъюнктных переходных функций.*

Доказательство. Докажем (1). Пусть $0 < \bar{p} \in \overline{\mathscr{P}}(X,\Sigma)$. Выберем произвольную точку $x_0 \in X$, для которой $\bar{p}(x_0,\cdot) > 0$, обозначим через A атом Σ, содержащий x_0, и положим $p(x,E) = 1_A(x)\bar{p}(x,E)$ для всех $x \in X$ и $E \in \Sigma$. Очевидно, что $p \in \mathscr{P}(X,\Sigma)$ и $0 < p \leq \bar{p}$.

Утверждения (2)–(4) следуют из (1), теоремы 2.2 и того факта, что точные границы в $\overline{\mathscr{P}}(X,\Sigma)$ определяются формулами, фигурирующими в утверждении (3) (последнее вытекает, например, из изоморфности $\overline{\mathscr{P}}(X,\Sigma)$ K-пространству $\ell^\infty_\Sigma(X, ba(\Sigma))$, в котором точные границы вычисляются поточечно).

Упомянутое в утверждении (5) семейство $(p_\xi)_{\xi\in\Xi}$ можно определить формулами $p_\xi(x,E) = 1_\xi(x)\bar{p}(x,E)$ для всех $\xi \in \Xi$, $x \in X$ и $E \in \Sigma$, где Ξ — множество всех атомов Σ. $\square$

Пример 5.5. Покажем, что требование атомности измеримого пространства (X,Σ) является существенным для справедливости каждого из утверждений теоремы 5.4.

Пусть $X = [0,1]$. Рассмотрим неизмеримое по Лебегу множество $G \subset X$ и положим

$$\Sigma = \{E \in \mathscr{L} : \ E \supset G \text{ или } E \cap G = \varnothing\},$$

где $\mathscr{L}$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств X. Как уже было отмечено в 3.5, множество G представляет собой неизмеримый комок (X,Σ) и, стало быть, измеримое пространство (X,Σ) не является атомным.

Пусть $|\cdot|$ — сужение меры Лебега на Σ. Несложно убедиться в том, что тройка $(X, \Sigma, |\cdot|)$ — пространство с мерой в смысле определения 3.1. Рассмотрим лифтинг λ фактор-алгебры $\widetilde{\mathscr{L}}$ (относительно меры Лебега на X) и для каждого множества $E \in \Sigma$ положим

$$\rho(E^{\sim}) = \begin{cases} \lambda(E^{\sim}) \cup G, & \text{если } E \supset G, \\ \lambda(E^{\sim}) \backslash G, & \text{если } E \cap G = \varnothing. \end{cases}$$

Простая проверка показывает, что отображение ρ определено корректно и является лифтингом фактор-алгебры $\widetilde{\Sigma}$ пространства с мерой $(X, \Sigma, |\cdot|)$ (для этой проверки можно привлечь, например, предложение 3.2).

Контрпример для (1), (5). Пусть $\mu \in ba(\Sigma)$, $\mu > 0$. Рассмотрим элемент $0 < \bar{p} \in \overline{\mathscr{P}}(X, \Sigma)$, определенный формулой

$$\bar{p}(x, E) = 1_G(x)\mu(E), \quad x \in X, \ E \in \Sigma,$$

и покажем, что он не минорируется положительными переходными функциями (тем самым будет получен контрпример для утверждений (1) и (5) теоремы 5.4). Для этого предположим, что $p \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$, $0 \leq p \leq \bar{p}$, и установим равенство $p = 0$. Для $E \in \Sigma$ положим $Z_E = \{x \in X : p(x, E) = 0\} \in \Sigma$. Из определения $\bar{p}$ непосредственно вытекает включение $X \backslash G \subset Z_E$. Неизмеримость G и измеримость Z_E влечет $Z_E \cap G \neq \varnothing$, откуда $Z_E \supset G$ по определению Σ и, следовательно, $Z_E = X$.

Контрпример для (2), (3). Покажем, что переходная функция $p \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$, определенная формулой

$$p(x, E) = 1_E(x) - 1_{\rho(E^{\sim})}(x), \quad x \in X, \ E \in \Sigma,$$

имеет положительную часть p^+ в упорядоченном пространстве $\mathscr{P}(X, \Sigma)$, но $p^+(x, \cdot) \neq p(x, \cdot)^+$ при $x \in G$ (тем самым будет установлено, что для (X, Σ) не справедливы утверждения (2) и (3) теоремы 5.4).

Докажем, что $p^+ = \mathrm{id}$, где $\mathrm{id}(x, E) = 1_E(x) = \delta_x(E)$ для всех $x \in X$ и $E \in \Sigma$. Очевидно, что $\mathrm{id} \geq p$. Рассмотрим произвольную положительную переходную функцию $\bar{p} \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$, удовлетворяющую неравенству $\bar{p} \geq p$, и покажем, что $\bar{p} \geq \mathrm{id}$, т. е. $\bar{p}(\cdot, E) \geq 1_E$ для всех $E \in \Sigma$. Зафиксируем произвольный элемент $E \in \Sigma$. Предположим сначала, что $E \cap G = \varnothing$. Тогда для всех $x \in E$ имеем $\bar{p}(\cdot, E) \geq p(\cdot, \{x\}) = 1_{\{x\}}$, т. е. $\bar{p}(\cdot, E) \geq 1_E$. Пусть теперь $E \supset G$. Тогда $\bar{p}(\cdot, E) \geq p(\cdot, \{x\}) = 1_{\{x\}}$ для всех $x \in E \backslash G$, т. е. $\bar{p}(\cdot, E) \geq 1_{E \backslash G}$. Положим $F = \{x \in X : \bar{p}(x, E) \geq 1\} \in \Sigma$. Ясно, что $F \supset E \backslash G$. Если $F \cap G = \varnothing$, то $F \cap E = E \backslash G$, что противоречит измеримости множества $F \cap E$. Следовательно, $F \supset G$, а значит, $F \supset E$ и тем самым $\bar{p}(\cdot, E) \geq 1_E$.

Зафиксируем произвольную точку $x \in G$. Из определений функции p и лифтинга ρ видно, что $p(x, \cdot) = 0$, а значит, $p(x, \cdot)^+ = 0$. С другой стороны, $p^+(x, \cdot) = \mathrm{id}(x, \cdot) = \delta_x \neq 0$.

Контрпример для (4). Заметим сначала, что $\delta_x \perp \delta_x \circ \rho$ для всех $x \in X \backslash G$. Действительно, если $x \in X \backslash G$ и $\mu = \delta_x \wedge \delta_x \circ \rho$, то $\mu(X \backslash \{x\}) \leq \delta_x(X \backslash \{x\}) = 0$ и $\mu(\{x\}) \leq (\delta_x \circ \rho)(\{x\}) = \delta_x(\varnothing) = 0$, откуда $\mu = 0$.

Теперь установим, что для любых $p_1, p_2 \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$ из $p_1 \in \{p_2\}^{\perp\perp}$ вытекает $p_1(x, \cdot) \in \{p_2(x, \cdot)\}^{\perp\perp}$ при $x \in X \backslash G$. Действительно, пусть $p_1 \in \{p_2\}^{\perp\perp}$ и $x \in X \backslash G$. Для произвольных $\mu \in \{p_2(x, \cdot)\}^{\perp}$, $y \in X$ и $E \in \Sigma$ положим

$$\delta_x^{\mu}(y, E) = \begin{cases} \mu(E), & \text{если } y = x, \\ 0, & \text{если } y \neq x. \end{cases}$$

Очевидно, что $\delta_x^\mu \in \mathscr{P}(X,\Sigma)$ (благодаря включению $\{x\} \in \Sigma$) и $\delta_x^\mu \perp p_2$. Следовательно, $\delta_x^\mu \perp p_1$ и, в частности, $\mu = \delta_x^\mu(x,\cdot) \perp p_1(x,\cdot)$. Произвольность выбора $\mu \in \{p_2(x,\cdot)\}^\perp$ позволяет заключить, что $p_1(x,\cdot) \in \{p_2(x,\cdot)\}^{\perp\perp}$.

Наконец, для всех $x \in X$ и $E \in \Sigma$ положим

$$p_1(x,E) = \delta_x(E),$$
$$p_2(x,E) = \begin{cases} \delta_x(E), & \text{если } x \in G, \\ \delta_x(\rho(E^\sim)), & \text{если } x \in X\backslash G. \end{cases}$$

Включение $p_1 \in \mathscr{P}(X,\Sigma)$ очевидно. Покажем, что $p_2 \in \mathscr{P}(X,\Sigma)$. Свойства лифтинга позволяют заключить, что $p_2(x,\cdot) \in ba(\Sigma)$ для всех $x \in X$. Остается для каждого элемента $E \in \Sigma$ установить Σ-измеримость функции $p_2(\cdot,E)$, т. е.̃принадлежность множества $F = \{x \in X : p_2(x,E) = 1\}$ σ-алгебре Σ. Из определения p_2 непосредственно вытекает равенство $F = (E \cap G) \cup (\rho(E^\sim)\backslash G)$. Если $E \supset G$, то по определению ρ имеет место включение $\rho(E^\sim) \supset G$, а значит, $F = G \cup (\rho(E^\sim)\backslash G) = \rho(E^\sim) \in \Sigma$. Если же $E \cap G = \varnothing$, то $\rho(E^\sim) \cap G = \varnothing$ и $F = \rho(E^\sim)\backslash G = \rho(E^\sim) \in \Sigma$.

Итак, $p_1, p_2 \in \mathscr{P}(X,\Sigma)$. Ясно, что переходные функции p_1 и p_2 не дизъюнктны. Покажем, что тем не менее $\{p_1\}^{\perp\perp} \cap \{p_2\}^{\perp\perp} = \{0\}$ (в результате мы установим, что отношение $\perp$ не удовлетворяет условию 2.1 (4), и получим контрпример для утверждения (4) теоремы 5.4).

Пусть $p \in \{p_1\}^{\perp\perp} \cap \{p_2\}^{\perp\perp}$. Зафиксируем произвольную точку $x \in X\backslash G$. По доказанному выше имеют место включения $p(x,\cdot) \in \{p_1(x,\cdot)\}^{\perp\perp}$ и $p(x,\cdot) \in \{p_2(x,\cdot)\}^{\perp\perp}$. С другой стороны, $p_1(x,\cdot) = \delta_x \perp \delta_x \circ \rho = p_2(x,\cdot)$. Таким образом, $p(x,\cdot) = 0$ при $x \in X\backslash G$. Тогда для всех $E \in \Sigma$ множество $\{x \in X : p(x,E) \neq 0\}$, принадлежащее Σ, содержится в G, а следовательно, является пустым. Последнее означает, что $p = 0$.

Определение 5.6. Переходную функцию $p \in \mathscr{P}(X,\Sigma)$ назовем *чисто конечно-аддитивной*, если $p(x,\cdot) \in pfa(\Sigma)$ для всех $x \in X$. Множество всех чисто конечно-аддитивных переходных функций обозначим через $\mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma)$.

Как легко видеть, $\mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma)$ — упорядоченное банахово подпространство $\mathscr{P}(X,\Sigma)$.

Теорема 5.7. *Пусть (X,Σ) — измеримое пространство.*

(1) *Множества $\mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)$ и $\mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma)$ являются взаимно дополнительными $\perp$-полосами в $\mathscr{P}(X,\Sigma)$, т. е.*

$$\mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)^\perp = \mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma), \quad \mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma)^\perp = \mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma).$$

(2) *Если (X,Σ) дискретно, то*

$$\mathscr{P}(X,\Sigma) = \mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma) \oplus \mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma).$$

(3) *Пусть $(X,\Sigma,|\cdot|)$ — пространство с мерой, имеющее лифтинг, существует неизмеримое подмножество $G \subset X$ и булева алгебра $\widetilde{\Sigma}$ не имеет атомов.* (В качестве такого пространства с мерой можно взять, например, отрезок $[0,1]$ с мерой Лебега.) *Тогда*

$$\mathscr{P}(X,\Sigma) \neq \mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma) + \mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma).$$

Доказательство. (1) Пусть $p \in \mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)^{\perp}$. Для любой меры $\mu \in ca(\Sigma)$ определим $\mathrm{id}_\mu \in \mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)$, полагая $\mathrm{id}_\mu(x,E) = \mu(E)$ для всех $x \in X$ и $E \in \Sigma$. Из соотношения $p \perp \mathrm{id}_\mu$ следует, что для всех $x \in X$ мера $p(x,\cdot)$ дизъюнктна $\mathrm{id}_\mu(x,\cdot) = \mu$. Произвольность выбора $\mu \in ca(\Sigma)$ позволяет заключить, что $p(x,\cdot) \in pfa(\Sigma)$ для всех $x \in X$, т. е. $p \in \mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma)$. Таким образом, $\mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)^{\perp} \subset \mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma)$. Включение $\mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma)^{\perp} \subset \mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)$ устанавливается совершенно аналогично, а обратные включения очевидны.

Утверждение (2) является прямым следствием 3.7.

(3) Пусть ρ — лифтинг фактор-алгебры $\widetilde{\Sigma}$ пространства с мерой $(X,\Sigma,|\cdot|)$. Согласно теореме 3.8 существует такое множество $X_0 \in \Sigma$, что $|X \backslash X_0| = 0$ и $\delta_x \circ \rho \in pfa(\Sigma)$ для всех $x \in X_0$. Обозначим (неизмеримое) пересечение $G \cap X_0$ через G_0 и положим

$$p(x,E) = 1_{G_0}(x)(1_E(x) - 1_{\rho(E)}(x)), \quad x \in X,\ E \in \Sigma.$$

Как легко видеть, $p \in \mathscr{P}(X,\Sigma)$ (заметим, что для всех $E \in \Sigma$ функция $p(\cdot,E) = 1_{G_0}(1_E - 1_{\rho(E)})$ почти всюду равна нулю, а следовательно, измерима). Мы покажем, что функция p не представима в виде суммы счетно-аддитивной и чисто конечно-аддитивной переходных функций.

Согласно 3.7 каждая мера $\mu \in ba(\Sigma)$ имеет единственное разложение в сумму элементов $ca(\Sigma)$ и $pfa(\Sigma)$. Условимся обозначать эти элементы символами μ_{ca} и μ_{pfa} соответственно.

Предположим вопреки доказываемому, что $p = p_{ca} + p_{pfa}$, где $p_{ca} \in \mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)$ и $p_{pfa} \in \mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma)$. С учетом предыдущего замечания $p_{ca}(x,\cdot) = p(x,\cdot)_{ca}$ для всех $x \in X$. С другой стороны, как легко видеть,

$$p(x,\cdot) = \begin{cases} \delta_x - \delta_x \circ \rho, & \text{если } x \in G_0, \\ 0, & \text{если } x \notin G_0, \end{cases}$$

причем $\delta_x \in ca(\Sigma)$ и $\delta_x \circ \rho \in pfa(\Sigma)$ при $x \in G_0$. Следовательно,

$$p_{ca}(x,\cdot) = p(x,\cdot)_{ca} = \begin{cases} \delta_x, & \text{если } x \in G_0, \\ 0, & \text{если } x \notin G_0, \end{cases}$$

а значит, функция $p_{ca}(\cdot,X) = 1_{G_0}$ неизмерима. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Таким образом, несмотря на то, что $\mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)$ и $\mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma)$ являются взаимно дополнительными $\perp$-полосами, их сумма не всегда совпадает со всем пространством $\mathscr{P}(X,\Sigma)$. Говоря о представительности этой суммы в $\mathscr{P}(X,\Sigma)$, можно упомянуть очевидное равенство $(\mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma) + \mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma))^{\perp\perp} = \mathscr{P}(X,\Sigma)$.

Авторы выражают благодарность А. И. Жданку за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
2. *Жданок А. И.* Конечно-аддитивные меры в эргодической теории цепей Маркова. I // Мат. тр. 2001. Т. 4, № 2. С. 53–95.
3. *Жданок А. И.* Конечно-аддитивные меры в эргодической теории цепей Маркова. II // Мат. тр. 2002. Т. 5, № 1. С. 46–66.
4. *Жданок А. И.* Гамма-компактификация измеримых пространств // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 3. С. 587–605.

5. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № 1. С. 3–95.
6. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
7. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961.
8. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука, 1984.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
10. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators. New York: Acad. Press, 1985.
11. *Кусраев А. Г.* Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Исследования по геометрии «в целом» и математическому анализу. Новосибирск: Наука, 1987. С. 84–123.
12. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995. С. 63–211.
13. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Булевозначный анализ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999.
14. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
15. *Alexandroff A. D.* Additive set-functions in abstract spaces. I // Мат. сб. 1940. Т. 8, № 2. С. 307–348.
16. *Alexandroff A. D.* Additive set-functions in abstract spaces. II // Мат. сб. 1941. Т. 9, № 3. С. 563–628.
17. *Alexandroff A. D.* Additive set-functions in abstract spaces. III // Мат. сб. 1943. Т. 13, № 2. С. 169–293.
18. *Yosida K., Hewitt E.* Finitely additive measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72, N 1. P. 46–66.
19. *Халмош П.* Теория меры. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
20. *Dinculeanu N.* Vector measures. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966. (Hochschulbücher für Mathematik; Bd 64).
21. *Diestel J., Uhl J. J. Jr.* Vector measures. Providence: Amer. Math. Soc., 1977.
22. *Maharam D.* On a theorem of von Neumann // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. V. 9. P. 987–994.
23. *Ionescu Tulcea A., Ionescu Tulcea C.* Topics in the theory of lifting. Berlin, etc.: Springer, 1969.
24. *Halmos P. R.* On the set of values of a finite measure // Bull. Amer. Math. Soc. 1947. V. 53, N 2. P. 138–141.
25. *Diestel J.* Sequences and series in Banach spaces. New York, etc.: Springer-Verl., 1984.
26. *Вулих Б. З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 15 октября 2003 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru

Сотников Алексей Игоревич
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
sotnikov@math.nsc.ru