Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 512.553

Т–РАДИКАЛЫ И Е–РАДИКАЛЫ В КАТЕГОРИИ МОДУЛЕЙ

Е. А. Тимошенко

Аннотация: Вводится два класса радикалов, задаваемых при помощи тензорного произведения модулей и модульных гомоморфизмов. Установлены некоторые свойства этих радикалов и их связи со свойствами притягивающих модулей.

Ключевые слова: модуль, радикал, тензорное произведение, гомоморфизм, кручение, кокручение

В работе исследуются свойства двух классов радикалов, определенных в категории модулей: Е-радикалов и Т-радикалов. Первое из этих понятий возникло в [1] и тесно связано с Е-модулями. Понятие «Е-модуль», с тех пор, как оно впервые появилось в статье [2], подверглось значительному обобщению; дополнительно к этому, двойственным образом было введено понятие Т-модуля [3]. В данной работе перечисленные понятия используются в максимально общем виде, особенно в § 1. В § 2 показана связь результатов § 1 с понятиями Т-модулей и Е-модулей.

Все встречающиеся в работе кольца ассоциативные с единицей, модули унитарные. На протяжении всего изложения F будет обозначать некоторый фиксированный левый модуль, а V — правый. Все остальные модули, если не оговорено обратное, будем считать правыми. В § 1 рассматриваются лишь модули над некоторым кольцом S, в § 2 — как над кольцом S, так и еще над одним кольцом R. Там, где будет нужно отличать «правые» объекты от соответствующих «левых», последние будут помечаться штрихами. Категории правых и левых S-модулей обозначаются mod-S и S-mod соответственно. Точно так же мы будем обозначать и классы объектов этих категорий.

§ 1. T(F)-радикалы и E(V)-радикалы

В этом параграфе рассматриваются модули над кольцом S. Пусть F — левый S-модуль.

Определение 1.1. S-модуль A называется T(F)-*модулем*, если выполнено $A \otimes_S F = 0$. Класс всех T(F)-модулей обозначим через $\mathscr{T}(F)$.

Предложение 1.2. *Класс $\mathscr{T}(F)$ замкнут относительно*
(а) *гомоморфных образов;*
(б) *расширений;*
(в) *прямых сумм.*

Доказательство. Точная последовательность S-модулей

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow A/B \longrightarrow 0$$

индуцирует точную последовательность абелевых групп

$$B \otimes_S F \longrightarrow A \otimes_S F \longrightarrow (A/B) \otimes_S F \longrightarrow 0.$$

(а) Из равенства $A \otimes_S F = 0$ сразу следует, что $(A/B) \otimes_S F = 0$. Таким образом, $\mathscr{T}(F)$ замкнут относительно гомоморфных образов.

(б) Требуемое утверждение следует из того факта, что если $B \otimes_S F = 0$ и $(A/B) \otimes_S F = 0$, то $A \otimes_S F = 0$.

(в) Допустим, что для всякого $i \in I$ выполнено $A_i \in \mathscr{T}(F)$. В этом случае

$$\Big(\bigoplus_{i \in I} A_i\Big) \otimes_S F \cong \bigoplus_{i \in I} (A_i \otimes_S F) = 0,$$

откуда следует замкнутость относительно прямых сумм.

Пример 1.3. Покажем, что класс всех $\mathrm{T}(F)$-модулей, вообще говоря, не является замкнутым относительно прямых произведений. Действительно, пусть S совпадает с кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$ и $F = \mathbf{Q}$ — аддитивная группа всех рациональных чисел. Тогда, очевидно, квазициклическая группа $A = \mathbf{Z}(p^\infty)$ является $\mathrm{T}(F)$-модулем ($\mathrm{T}(F)$-группой). Зададим группу B как прямое произведение некоторого бесконечного семейства копий группы A. Очевидно, что группа B будет делимой, но не периодической. Поэтому (в силу структурной теоремы, описывающей строение делимых групп) B имеет прямое слагаемое, изоморфное $\mathbf{Q}$. Отсюда $B \otimes \mathbf{Q} \neq 0$ и, следовательно, $B \notin \mathscr{T}(F)$.

Пусть V — правый S-модуль.

Определение 1.4. S-модуль A называется $\mathrm{E}(V)$-*модулем*, если имеет место равенство $\mathrm{Hom}_S(V, A) = 0$. Класс всех $\mathrm{E}(V)$-модулей обозначим через $\mathscr{E}(V)$.

Справедливо следующее

Предложение 1.5. *Класс $\mathscr{E}(V)$ замкнут относительно*
(а) *подмодулей;*
(б) *расширений;*
(в) *прямых произведений.*

Отсюда, в частности, следует, что класс всех $\mathrm{E}(V)$-модулей замкнут относительно прямых сумм.

Напомним несколько определений из теории радикалов (см. [4, 5]).

Определение 1.6. Говорят, что в категории mod-S *задан предрадикал* λ, если каждому S-модулю A поставлен в соответствие его подмодуль $\lambda(A)$ так, что для любого S-гомоморфизма $\varphi : A \to B$ выполняется соотношение $\varphi(\lambda(A)) \subset \lambda(B)$.

Пусть λ — предрадикал. Класс всех S-модулей A, для которых выполнено $\lambda(A) = A$, назовем λ-*радикальным*; класс, определяемый условием $\lambda(A) = 0$, — λ-*полупростым.*

Рассмотрим следующие (возможные) свойства предрадикала λ:

P1. $\lambda(\lambda(A)) = \lambda(A)$ для любого $A \in$ mod-S.

P1*. $\lambda(A/\lambda(A)) = 0$ для любого $A \in$ mod-S.

P2. $\lambda(B) = B \cap \lambda(A)$ для любого $A \in$ mod-S и $B \subset A$.

P2*. $\lambda(A/B) = (\lambda(A) + B)/B$ для любого $A \in$ mod-S и $B \subset A$.

Определение 1.7. Предрадикал λ, удовлетворяющий условию P1, называется *идемпотентным.* Предрадикал λ называется *радикалом*, если для него выполнено условие P1*. Предрадикал, который удовлетворяет условиям P1 и P1*, называется *идемпотентным радикалом.*

Определение 1.8. Предрадикал λ называется *кручением* (*кокручением*), если он удовлетворяет условиям P2 и P1* (соответственно P2* и P1).

Из определений несложно вывести, что всякое кручение (кокручение) является идемпотентным радикалом. Далее, если λ — идемпотентный предрадикал, то условие P2 равносильно замкнутости λ-радикального класса относительно подмодулей [5, гл. 1, предложение 3.1]. Аналогично если λ — радикал, то условие P2* эквивалентно замкнутости λ-полупростого класса относительно гоморфных образов.

Пусть F — левый S-модуль. Через $\mathrm{W}_F(A)$ обозначим сумму всех подмодулей B модуля $A \in \text{mod-}S$ таких, что B является $\mathrm{T}(F)$-модулем. В этом случае W_F является идемпотентным радикалом, а $\mathscr{T}(F)$ — его радикальным классом [5, гл. 1, лемма 1.6 и предложение 2.2]. В дальнейшем этот идемпотентный радикал будем для краткости называть $\mathrm{T}(F)$-радикалом.

Допустим, что V — правый S-модуль. Символом $\mathrm{H}_V(A)$ будем обозначать пересечение всех подмодулей B модуля $A \in \text{mod-}S$ таких, что A/B является $\mathrm{E}(V)$-модулем. Тогда H_V является идемпотентным радикалом, а его полупростой класс совпадает с классом $\mathscr{E}(V)$ [5]. Далее этот идемпотентный радикал будем называть просто $\mathrm{E}(V)$-*радикалом.*

Пусть имеется еще один правый S-модуль U.

Предложение 1.9. *Следующие условия эквивалентны:*
(а) $\mathscr{E}(U) \subset \mathscr{E}(V)$;
(б) $\mathrm{H}_V(A) \subset \mathrm{H}_U(A)$ *для всякого* $A \in \text{mod-}S$;
(в) $\mathrm{H}_U(V) = V$.

Доказательство. Импликация (а)$\Rightarrow$(б) получается путем простого сравнения определений $\mathrm{H}_V(A)$ и $\mathrm{H}_U(A)$.

(б)$\Rightarrow$(в). Найдем $\mathrm{H}_V(V)$. Поскольку H_V — радикал, можно записать равенство $\mathrm{H}_V(V/\mathrm{H}_V(V)) = 0$. Следовательно, имеем $V/\mathrm{H}_V(V) \in \mathscr{E}(V)$, т. е. $\mathrm{Hom}_S(V, V/\mathrm{H}_V(V)) = 0$, а это возможно лишь тогда, когда $\mathrm{H}_V(V) = V$. В силу нашего предположения получаем отсюда, что $\mathrm{H}_U(V) = V$.

(в)$\Rightarrow$(а). Допустим, что $A \in \mathscr{E}(U)$ и, следовательно, $\mathrm{H}_U(A) = 0$. Рассмотрим произвольный S-гомоморфизм $\varphi : V \to A$. Воспользовавшись равенством $\mathrm{H}_U(V) = V$ и определением предрадикала, получаем включение $\varphi(V) \subset \mathrm{H}_U(A)$, из которого следует, что $\varphi = 0$. Тогда $\mathrm{Hom}_S(V, A) = 0$ и $A \in \mathscr{E}(V)$. Итак, выполнено включение $\mathscr{E}(U) \subset \mathscr{E}(V)$. Предложение доказано.

Следствие 1.10. *Следующие условия эквивалентны:*
(а) $\mathscr{E}(U) = \mathscr{E}(V)$;
(б) $\mathrm{H}_U = \mathrm{H}_V$;
(в) $\mathrm{H}_U(V) = V$ *и* $\mathrm{H}_V(U) = U$.

Пусть F — левый S-модуль.

Определение 1.11. Пусть A — S-модуль. F-*нейтрализатором модуля* A назовем множество всех его элементов a, таких, что в тензорном произведении $A \otimes_S F$ имеем $a \otimes_S f = 0$ для всякого $f \in F$. Обозначим этот нейтрализатор через $\mathrm{n}_F(A)$.

Несложно видеть, что для любого модуля A нейтрализатор $\mathrm{n}_F(A)$ будет его подмодулем. Далее, пусть $\varphi : A \to B$ — гомоморфизм S-модулей, а $\overline{\varphi} : A \otimes_S F \to B \otimes_S F$ — соответствующий индуцированный гомоморфизм групп. Если $a \in \mathrm{n}_F(A)$, то для всякого $f \in F$ выполнены равенства

$$\varphi(a) \otimes_S f = \overline{\varphi}(a \otimes_S f) = \overline{\varphi}(0) = 0,$$

т. е. $\varphi(a) \in \mathrm{n}_F(B)$. Следовательно, $\varphi(\mathrm{n}_F(A)) \subset \mathrm{n}_F(B)$, поэтому n_F — предрадикал.

Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{n}_F(A) \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A/\,\mathrm{n}_F(A) \longrightarrow 0$$

и индуцированную (вообще говоря, не являющуюся точной) последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{n}_F(A) \otimes_S F \xrightarrow{\bar{\alpha}} A \otimes_S F \xrightarrow{\bar{\beta}} (A/\,\mathrm{n}_F(A)) \otimes_S F \longrightarrow 0. \qquad (1)$$

Мы можем переформулировать определение нейтрализатора следующим образом: $\mathrm{n}_F(A)$ — это наибольший подмодуль в A, для которого $\bar{\alpha} = 0$.

Пользуясь этим определением, получаем, что $\bar{\beta}$ — мономорфизм (на самом деле даже изоморфизм). Допустим, что $\bar{a} \in \mathrm{n}_F(A/\,\mathrm{n}_F(A))$. Тогда для всякого $f \in F$ имеем $\bar{\beta}(a \otimes_S f) = \bar{a} \otimes_S f = 0$ и поэтому $a \otimes_S f = 0$. Таким образом, $a \in \mathrm{n}_F(A)$, откуда сразу следует, что $\bar{a} = 0$. Следовательно, $\mathrm{n}_F(A/\,\mathrm{n}_F(A)) = 0$, аксиома P1* выполнена, и нейтрализатор является радикалом.

Легко убедиться в справедливости эквивалентностей

$$\mathrm{W}_F(A) = A \iff A \in \mathscr{T}(F) \iff A \otimes_S F = 0 \iff \mathrm{n}_F(A) = A.$$

В соответствии с определением $\mathrm{T}(F)$-радикала, из [5, гл. 1, предложение 1.8] получаем, что W_F — наибольший из всех идемпотентных радикалов (более того, даже идемпотентных предрадикалов) λ таких, что $\lambda(A) \subset \mathrm{n}_F(A)$ для всех $A \in \text{mod-}S$. Поэтому всегда имеет место включение $\mathrm{W}_F(A) \subset \mathrm{n}_F(A)$. Легко показать, что обратное включение справедливо не всегда, т. е. идемпотентным радикал n_F, вообще говоря, не является.

Пример 1.12. Пусть S — кольцо целых чисел, $F = \mathbf{Z}(p)$ — циклическая группа простого порядка и $A = \mathbf{Z}$ — бесконечная циклическая группа. Несложно видеть, что $\mathrm{n}_F(A) = pA$, но $\mathrm{W}_F(A) = 0$.

Предложение 1.13. *Пусть F — плоский модуль. Тогда*
(а) $\mathrm{n}_F(A) = \mathrm{W}_F(A)$ *для любого* $A \in \text{mod-}S$*;*
(б) W_F *— кручение.*

Доказательство. Из определения плоского модуля следует, что последовательность (1) является точной. Из условия $\bar{\alpha} = 0$ получаем равенство $\mathrm{n}_F(A) \otimes_S F = 0$. Поэтому $\mathrm{n}_F(A) \in \mathscr{T}(F)$. Отсюда $\mathrm{n}_F(A) \subset \mathrm{W}_F(A)$ и, далее, $\mathrm{n}_F(A) = \mathrm{W}_F(A)$. Пусть теперь B — подмодуль в A и $\alpha : B \to A$ — вложение. В этом случае индуцированный гомоморфизм $\bar{\alpha} : B \otimes_S F \to A \otimes_S F$ будет инъективным. Таким образом, из условия $A \otimes_S F = 0$ следует, что $B \otimes_S F = 0$, поэтому модуль A может входить в $\mathscr{T}(F)$ только вместе со всеми своими подмодулями. Итак, W_F — кручение.

Конструкция нейтрализатора может быть продолжена трансфинитным образом. Зафиксируем S-модуль A; положим $\mathrm{n}_F^1(A) = \mathrm{n}_F(A)$. В том случае, когда ординал β предельный, полагаем $\mathrm{n}_F^{\beta}(A) = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} \mathrm{n}_F^{\alpha}(A)$. Если же $\beta = \alpha + 1$ для какого-то ординала α, то полагаем $\mathrm{n}_F^{\beta}(A) = \mathrm{n}_F(\mathrm{n}_F^{\alpha}(A))$. Получаем убывающую цепочку подмодулей $\mathrm{n}_F^1(A), \mathrm{n}_F^2(A), \ldots, \mathrm{n}_F^{\alpha}(A), \ldots$. Она стабилизируется, и для некоторого ординала σ выполнено равенство $\mathrm{n}_F^{\sigma}(A) = \mathrm{n}_F^{\sigma+1}(A)$. Введем обозначение $\mathrm{n}_F^{\infty}(A) = \mathrm{n}_F^{\sigma}(A)$.

Предложение 1.14. *Для всякого S-модуля A справедливо равенство*

$$\mathrm{n}_F^{\infty}(A) = \mathrm{W}_F(A).$$

Доказательство. Докажем по индукции, что всегда выполнено включение $\mathrm{W}_F(A) \subset \mathrm{n}_F^{\alpha}(A)$. Для $\alpha = 1$ это утверждение доказано выше. Если ординал β предельный, то поскольку для всех $\alpha < \beta$ требуемое включение имеет место, будет также выполняться и включение $\mathrm{W}_F(A) \subset \mathrm{n}_F^{\beta}(A)$. Пусть теперь для некоторого ординального числа α имеем равенство $\beta = \alpha + 1$. Цепь включений

$$\mathrm{W}_F(A) = \mathrm{W}_F(\mathrm{W}_F(A)) \subset \mathrm{W}_F\big(\mathrm{n}_F^{\alpha}(A)\big) \subset \mathrm{n}_F\big(\mathrm{n}_F^{\alpha}(A)\big) = \mathrm{n}_F^{\beta}(A)$$

завершает индукцию. При $\alpha = \sigma$ получаем $\mathrm{W}_F(A) \subset \mathrm{n}_F^{\sigma}(A) = \mathrm{n}_F^{\infty}(A)$.

Далее, справедливы равенства $\mathrm{n}_F\big(\mathrm{n}_F^{\sigma}(A)\big) = \mathrm{n}_F^{\sigma+1}(A) = \mathrm{n}_F^{\sigma}(A)$. Поэтому $\mathrm{n}_F^{\sigma}(A) = \mathrm{n}_F^{\infty}(A) \in \mathscr{T}(F)$, следовательно, $\mathrm{n}_F^{\infty}(A) \subset \mathrm{W}_F(A)$. Отсюда получаем требуемое равенство.

Пусть V, как и ранее, — правый модуль.

Определение 1.15. Пусть A — S-модуль. *V-следом модуля A* называется сумма образов всех гомоморфизмов $\varphi \in \mathrm{Hom}_S(V, A)$. Будем обозначать этот след через $\mathrm{trace}_V(A)$.

Хорошо известно, что trace_V — идемпотентный предрадикал. Несложно видеть, что имеют место следующие эквивалентности:

$$\mathrm{H}_V(A) = 0 \iff A \in \mathscr{E}(V) \iff \mathrm{Hom}_S(V, A) = 0 \iff \mathrm{trace}_V(A) = 0.$$

Вспоминая определение $\mathrm{E}(V)$-радикала, согласно [5] получаем, что H_V — наименьший из всех идемпотентных радикалов (и даже просто радикалов) λ таких, что $\mathrm{trace}_V(A) \subset \lambda(A)$ для любого $A \in \text{mod-}S$. Таким образом, всегда справедливо включение $\mathrm{trace}_V(A) \subset \mathrm{H}_V(A)$. Несложно привести пример, показывающий, что это включение, вообще говоря, является строгим, т. е. сам trace_V может и не быть радикалом.

Пример 1.16. Пусть S — кольцо целых чисел, $V = \mathbf{Z}(p)$ — циклическая группа простого порядка и $A = \mathbf{Z}(p^{\infty})$ — квазициклическая группа. Предположим, что $\mathrm{H}_V(A)$ — собственная подгруппа группы A. Тогда $A/\mathrm{H}_V(A) \cong \mathbf{Z}(p^{\infty})$. Поскольку, с одной стороны, $A/\mathrm{H}_V(A) \in \mathscr{E}(V)$, а с другой очевидно, что $\mathrm{Hom}(V, \mathbf{Z}(p^{\infty})) \neq 0$, приходим к противоречию. Следовательно, $\mathrm{H}_V(A) = A$. В то же время $\mathrm{trace}_V(A) = \mathbf{Z}(p) \neq A$.

Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{trace}_V(A) \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A/\mathrm{trace}_V(A) \longrightarrow 0$$

и индуцированную (вообще говоря, не являющуюся точной) последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(V, \mathrm{trace}_V(A)) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_S(V, A) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}_S(V, A/\mathrm{trace}_V(A)) \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Нетрудно заметить, что определение V-следа можно переформулировать подобно тому, как это сделано для нейтрализатора: $\mathrm{trace}_V(A)$ — наименьший из всех подмодулей модуля A, для которых $\beta_* = 0$.

Предложение 1.17. *Пусть V — проективный модуль. Тогда*
(а) $\operatorname{trace}_V(A) = \mathrm{H}_V(A)$ *для любого* $A \in \text{mod-}S$*;*
(б) H_V *— кокручение.*

Доказательство. В силу проективности модуля V любая последовательность вида (2), даже если в ней заменить $\operatorname{trace}_V(A)$ произвольным подмодулем B модуля A, будет точной [6]. Тогда, пользуясь равенством $\beta_* = 0$, получаем, что $\operatorname{Hom}_S(V, A/\operatorname{trace}_V(A)) = 0$. Таким образом, $A/\operatorname{trace}_V(A) \in \mathscr{E}(V)$, и поэтому $\mathrm{H}_V(A) \subset \operatorname{trace}_V(A)$. Отсюда и получается равенство из пункта (а).

Пусть $\beta : A \to A/B$ — естественный эпиморфизм. Как отмечено выше, $\beta_* : \operatorname{Hom}_S(V, A) \to \operatorname{Hom}_S(V, A/B)$ также эпиморфизм. Следовательно, если $\operatorname{Hom}_S(V, A) = 0$, то $\operatorname{Hom}_S(V, A/B) = 0$. Иными словами, каков бы ни был подмодуль B модуля A, условие $A \in \mathscr{E}(V)$ влечет $A/B \in \mathscr{E}(V)$. Таким образом, класс $\mathscr{E}(V)$ замкнут относительно гомоморфных образов, поэтому H_V — действительно кокручение. Предложение доказано.

Конструкция V-следа также допускает трансфинитное обобщение. Зафиксируем модуль $A \in \text{mod-}S$. Каждому ординальному числу α мы определенным образом сопоставим подмодуль $\operatorname{trace}_V^\alpha(A)$. Положим $\operatorname{trace}_V^1(A) = \operatorname{trace}_V(A)$. Далее, если β — предельный ординал, то полагаем

$$\operatorname{trace}_V^\beta(A) = \bigcup_{\alpha<\beta} \operatorname{trace}_V^\alpha(A).$$

Если же $\beta = \alpha + 1$ для некоторого ординала α, то выберем $\operatorname{trace}_V^\beta(A)$ так, чтобы

$$\operatorname{trace}_V\bigl(A/\operatorname{trace}_V^\alpha(A)\bigr) = \operatorname{trace}_V^\beta(A)/\operatorname{trace}_V^\alpha(A).$$

Получаем возрастающую цепочку подмодулей

$$\operatorname{trace}_V^1(A), \operatorname{trace}_V^2(A), \ldots, \operatorname{trace}_V^\alpha(A), \ldots,$$

которая, очевидно, должна стабилизироваться, так что для некоторого ординала σ будет выполнено равенство $\operatorname{trace}_V^\sigma(A) = \operatorname{trace}_V^{\sigma+1}(A)$. Обозначим $\operatorname{trace}_V^\infty(A) = \operatorname{trace}_V^\sigma(A)$.

Предложение 1.18. *Для всякого S-модуля A справедливо равенство*

$$\operatorname{trace}_V^\infty(A) = \mathrm{H}_V(A).$$

Доказательство этого предложения проводится аналогично доказательству предложения 1.14.

Подобно тому, как всякий левый S-модуль F порождает идемпотентный радикал W_F в категории $\text{mod-}S$, правый S-модуль V порождает идемпотентный радикал W'_V в категории левых модулей $S\text{-mod}$. В следующем предложении рассматривается сразу два идемпотентных радикала: H_V и W'_V.

Предложение 1.19. *Если* H_V *является кокручением, то* W'_V *— кручение.*

Доказательство. Достаточно показать, что W'_V-радикальный класс замкнут относительно подмодулей. Пусть $A \in S\text{-mod}$ и $\mathrm{W}'_V(A) = A$. Далее, пусть B — произвольный подмодуль модуля A. Положим $M = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (возможен другой вариант: через M обозначим некоторую делимую группу, содержащую группу $V \otimes_S B$). Справедлив канонический изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_S(V, \operatorname{Hom}(A, M)) \cong \operatorname{Hom}(V \otimes_S A, M).$$

Учитывая, что $V \otimes_S A = 0$, можно сделать вывод, что $\mathrm{Hom}(A, M) \in \mathscr{E}(V)$. Индуцированный вложением $\alpha : B \to A$ гомоморфизм $\alpha^* : \mathrm{Hom}(A, M) \to \mathrm{Hom}(B, M)$ есть эпиморфизм (в силу инъективности M, см. [6]). Поскольку H_V — кокручение, класс $\mathscr{E}(V)$ замкнут относительно гомоморфных образов. Поэтому $\mathrm{Hom}(B, M) \in \mathscr{E}(V)$. Далее, имеем изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(V \otimes_S B, M) \cong \mathrm{Hom}_S(V, \mathrm{Hom}(B, M)) = 0.$$

Учитывая, как именно выбиралась группа M, получаем, что $V \otimes_S B = 0$. Следовательно, $\mathrm{W}'_V(B) = B$, и W'_V — кручение.

Как показывает следующий пример, обратная импликация неверна.

Пример 1.20. В качестве кольца S возьмем кольцо целых чисел, и пусть $V = \mathbf{Q}$ — аддитивная группа всех рациональных чисел. Для всякой группы A радикал $\mathrm{W}_V(A)$ совпадает с периодической частью группы A, т. е. W_V — кручение. В то же время радикал $\mathrm{H}_V(A)$ совпадает с наибольшей делимой подгруппой группы A, так что $\mathrm{E}(V)$-радикал не является кокручением.

§ 2. T-радикалы и E-радикалы

В этом параграфе мы будем иметь дело с двумя кольцами: S и R. Пусть задан кольцевой гомоморфизм $e : S \to R$. Всякий R-модуль A мы можем рассматривать как притягивающий S-модуль, полагая $as = ae(s)$ для любых $a \in A$, $s \in S$. Легко видеть, что R и $e(S)$ являются S-S-бимодулями. Обозначим $R_0 = R/e(S)$. Для нас существенно, что R_0 — S-S-бимодуль. На протяжении всего параграфа считается, что $F = V = R_0$ с той лишь разницей, что в случае с F нас будут интересовать свойства R_0 как левого S-модуля, а в случае с V — как правого.

Для всякого R-модуля A мы можем рассмотреть канонический эпиморфизм $h : A \otimes_S R \to A \otimes_R R$, где $h(a \otimes_S r) = a \otimes_R r$ для любых $a \in A$, $r \in R$.

Определение 2.1. R-модуль A называется T-*модулем* относительно кольцевого гомоморфизма e, если эпиморфизм h является изоморфизмом.

Кратко будем говорить «T-модуль». Класс всех T-модулей над кольцом R обозначим через $\mathscr{T}$.

Определение 2.2. Пусть A — R-модуль. Символом $\mathrm{W}(A)$ будем обозначать сумму всех подмодулей B модуля A_R таких, что $B \in \mathscr{T}$.

Класс $\mathscr{T}$ содержит R-модуль A тогда и только тогда, когда $A \otimes_S F = 0$, где $F = R_0$ [3]. Следовательно, элементы класса $\mathscr{T}$ — это все те R-модули, которые, если рассмотреть их как притягивающие S-модули, содержатся в классе $\mathscr{T}(F)$; иными словами, $\mathscr{T} = \mathscr{T}(F) \cap \text{mod-}R$. Учитывая последнее равенство, из определений $\mathrm{W}_F(A)$ и $\mathrm{W}(A)$ легко вывести, что $\mathrm{W}(A) \subset \mathrm{W}_F(A)$.

Теорема 2.3. *Каково бы ни было ординальное число α, модуль $\mathrm{n}_F^\alpha(A)$ всегда является подмодулем R-модуля A.*

Доказательство. Будем вести индукцию по α.

База индукции ($\alpha = 1$). Элементы модуля $F = R/e(S)$ будем обозначать символами $\bar{r}$, $\bar{r}_1$ и т. д. Зафиксируем произвольный элемент $r_1 \in R$ и зададим отображение $f : A \times R \to A \otimes_S F$, полагая $f(a, r) = ar \otimes_S \bar{r}_1 - a \otimes_S \overline{rr}_1$. Равенства

$$f(as, r) = (as)r \otimes_S \bar{r}_1 - as \otimes_S \overline{rr}_1 = a(sr) \otimes_S \bar{r}_1 - a \otimes_S \overline{(sr)r}_1 = f(a, sr)$$

показывают, что отображение f является сбалансированным над кольцом S. Поэтому существует гомоморфизм абелевых групп $\varphi : A \otimes_S R \to A \otimes_S F$, действующий следующим образом: $\varphi(a \otimes_S r) = ar \otimes_S \bar{r}_1 - a \otimes_S \overline{rr}_1$. Точная последовательность S-модулей

$$0 \longrightarrow e(S) \xrightarrow{\alpha} R \xrightarrow{\beta} F \longrightarrow 0$$

индуцирует точную последовательность абелевых групп

$$A \otimes_S e(S) \xrightarrow{\bar{\alpha}} A \otimes_S R \xrightarrow{\bar{\beta}} A \otimes_S F \longrightarrow 0. \tag{3}$$

Для произвольных $a \in A$, $s \in S$ получаем

$$\varphi(a \otimes_S e(s)) = as \otimes_S \bar{r}_1 - a \otimes_S \overline{sr}_1 = a \otimes_S s\bar{r}_1 - a \otimes_S s\bar{r}_1 = 0.$$

Таким образом, $\operatorname{Im} \bar{\alpha} \subset \operatorname{Ker} \varphi$, а это в силу точности (3) эквивалентно включению $\operatorname{Ker} \bar{\beta} \subset \operatorname{Ker} \varphi$. Поэтому имеется гомоморфизм абелевых групп $\psi : A \otimes_S F \to A \otimes_S F$, такой, что $\psi(a \otimes_S \bar{r}) = ar \otimes_S \bar{r}_1 - a \otimes_S \overline{rr}_1$. Для произвольных элементов $b \in \mathrm{n}_F(A)$, $r \in R$ имеем равенства

$$br \otimes_S \bar{r}_1 = br \otimes_S \bar{r}_1 - b \otimes_S \overline{rr}_1 = \psi(b \otimes_S \bar{r}) = \psi(0) = 0.$$

Поскольку приведенные выше рассуждения справедливы для произвольного $r_1 \in R$, это значит, что $br \in \mathrm{n}_F(A)$. Таким образом, $\mathrm{n}_F(A)$ — действительно подмодуль в A_R.

Индукционный переход. Если ординал β является предельным и при $\alpha < \beta$ модуль $\mathrm{n}_F^\alpha(A)$ — подмодуль в A_R, то ясно, что это будет верно и для модуля $\mathrm{n}_F^\beta(A)$ (с учетом определения). В случае, когда $\beta = \alpha + 1$, получаем, что $\mathrm{n}_F^\alpha(A)$ есть подмодуль модуля A_R, а $\mathrm{n}_F^\beta(A) = \mathrm{n}_F(\mathrm{n}_F^\alpha(A))$ — подмодуль R-модуля $\mathrm{n}_F^\alpha(A)$. Поэтому $\mathrm{n}_F^\beta(A)$ также является подмодулем в A_R.

Следствие 2.4. *Для всякого модуля $A \in$ mod-R выполняется равенство* $\mathrm{W}_F(A) = \mathrm{W}(A)$.

Доказательство. Из предложения 1.14 и теоремы 2.3 можно сделать вывод, что $\mathrm{W}_F(A)$ — подмодуль в A_R. Кроме того, $\mathrm{W}_F(A) \in \mathscr{T}(F)$, и отсюда сразу получаем $\mathrm{W}_F(A) \in \mathscr{T}$. Учитывая определение $\mathrm{W}(A)$, имеем включение $\mathrm{W}_F(A) \subset \mathrm{W}(A)$, из которого непосредственно следует нужное равенство.

Итак, если $F = R_0$, то логично опускать символ «F» в обозначениях «W_F», «$\mathrm{T}(F)$-модуль» и «$\mathrm{T}(F)$-радикал».

Нетрудно видеть, что любой R-гомоморфизм модулей автоматически будет также S-гомоморфизмом. В частности, для любого R-модуля A имеем $\operatorname{Hom}_R(R, A) \subset \operatorname{Hom}_S(R, A)$.

Определение 2.5. R-модуль A называется Е-*модулем* относительно кольцевого гомоморфизма e, если $\operatorname{Hom}_R(R, A) = \operatorname{Hom}_S(R, A)$.

Кратко будем говорить «Е-модуль». Класс всех Е-модулей над кольцом R обозначим через $\mathscr{E}$.

Определение 2.6. Пусть A — R-модуль. Символом $\mathrm{H}(A)$ будем обозначать пересечение всех подмодулей B модуля A_R таких, что $A/B \in \mathscr{E}$.

R-модуль A принадлежит классу $\mathscr{E}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Hom}_S(V, A) = 0$, где $V = R_0$ [3]. Таким образом, класс $\mathscr{E}$ состоит в точности из тех R-модулей, которые как притягивающие S-модули входят в класс $\mathscr{E}(V)$, т. е. $\mathscr{E} = \mathscr{E}(V) \cap$ mod-R. Сравнивая определения $\mathrm{H}_V(A)$ и $\mathrm{H}(A)$, получаем, что во втором случае пересечение берется по меньшему семейству подмодулей, следовательно, $\mathrm{H}_V(A) \subset \mathrm{H}(A)$.

Теорема 2.7. *Каково бы ни было ординальное число α, модуль $\operatorname{trace}_V^\alpha(A)$ всегда является подмодулем R-модуля A.*

Доказательство. Проведем индукцию по α.

База индукции ($\alpha = 1$). Элементы правого модуля $V = R/e(S)$ мы будем обозначать через $\bar{r}$, $\bar{r}_1$ и т. д. Пусть $\varphi \in \operatorname{Hom}_S(V, A)$ и взяты произвольные элементы $\varphi(\bar{r}_1)$ из $\operatorname{Im}\varphi$ и r_2 из кольца R. Полагая $\psi(r) = \varphi(\bar{r})$ для всякого $r \in R$, мы, очевидно, получаем гомоморфизм $\psi \in \operatorname{Hom}_S(R, A)$. Далее, зададим отображение $\chi : R \to A$ по правилу $\chi(r) = \psi(r_1)r - \psi(r_1 r)$. Аддитивность χ очевидна. Кроме того, для всякого элемента $s \in S$ верны равенства

$$\chi(rs) = \psi(r_1)rs - \psi(r_1 rs) = (\psi(r_1)r - \psi(r_1 r))s = \chi(r)s,$$

следовательно, $\chi \in \operatorname{Hom}_S(R, A)$. Для всякого $s \in S$ имеем $\chi(e(s)) = \psi(r_1)s - \psi(r_1 s) = 0$, откуда получаем, что $e(S) \subset \operatorname{Ker}\chi$. Тогда мы можем корректно определить гомоморфизм $\bar{\chi} \in \operatorname{Hom}_S(V, A)$, полагая $\bar{\chi}(\bar{r}) = \chi(r)$. Учитывая равенство $\chi(r_2) = \psi(r_1)r_2 - \psi(r_1 r_2)$, можно записать $\psi(r_1)r_2 = \chi(r_2) + \psi(r_1 r_2)$ или, переходя к гомоморфизмам $V \to A$, получить, что $\varphi(\bar{r}_1)r_2 = \bar{\chi}(\bar{r}_2) + \varphi(\overline{r_1 r_2})$, т. е. $\varphi(\bar{r}_1)r_2 \in \operatorname{trace}_V(A)$. Это доказывает, что $(\operatorname{Im}\varphi)R \subset \operatorname{trace}_V(A)$ для произвольного φ. Следовательно,

$$(\operatorname{trace}_V(A))R = \sum (\operatorname{Im}\varphi)R \subset \operatorname{trace}_V(A).$$

Это и означает, что $\operatorname{trace}_V(A)$ — подмодуль модуля A_R.

Индукционный переход. Если β — предельный ординал, и для всех $\alpha < \beta$ модуль $\operatorname{trace}_V^\alpha(A)$ является подмодулем в A_R, то соответствующее утверждение верно и для $\operatorname{trace}_V^\beta(A)$ (с учетом определения). Если $\beta = \alpha + 1$, то, поскольку $\operatorname{trace}_V^\alpha(A)$ — подмодуль модуля A_R, а

$$\operatorname{trace}_V^\beta(A)/\operatorname{trace}_V^\alpha(A) = \operatorname{trace}_V(A/\operatorname{trace}_V^\alpha(A))$$

— подмодуль R-модуля $A/\operatorname{trace}_V^\alpha(A)$, модуль $\operatorname{trace}_V^\beta(A)$ также обязан быть подмодулем в A_R. Теорема доказана.

Следствие 2.8. *Для всякого модуля $A \in \text{mod-}R$ выполняется равенство* $\mathrm{H}_V(A) = \mathrm{H}(A)$.

Если $V = R_0$, то, учитывая данное следствие, имеет смысл отождествить H_V и H, $\mathrm{E}(V)$-модули и E-модули, $\mathrm{E}(V)$-радикал и E-радикал.

Следствия 2.4 и 2.8 приводят к такому результату: как бы мы ни задавали R-модульную структуру на модуле $A \in \text{mod-}S$ (при условии, конечно, что эта структура согласована с уже имеющейся S-модульной), значения радикалов $\mathrm{W}(A)$ и $\mathrm{H}(A)$ будут одними и теми же.

Учитывая замечание, сделанное перед предложением 1.19, мы можем утверждать, что гомоморфизм $e : S \to R$ порождает четыре радикала: W и H в категории правых модулей mod-R и радикалы W' и H' в категории R-mod.

Предложение 2.9. *Если* H *является кокручением в* mod-R, *то* W' *— кручение в* R-mod.

Доказательство этого предложения фактически дословно повторяет доказательство предложения 1.19. Нужно лишь заменить обозначение «$\mathscr{E}(V)$» на «$\mathscr{E}$» и учесть, что A и B — левые R-модули, следовательно, $\operatorname{Hom}(A, M)$ и $\operatorname{Hom}(B, M)$ — правые R-модули.

Аналогичное утверждение имеет место и для радикалов H' и W.

Теперь мы покажем, что если заданы кольцо S и S-S-бимодуль F, то можно построить кольцо R и гомоморфизм $e : S \to R$ такие, что бимодуль $R_0 = R/e(S)$ изоморфен бимодулю F.

Определим R как множество матриц следующего вида:

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} s & f \\ 0 & s \end{pmatrix} \mid s \in S,\ f \in F \right\}.$$

Несложно убедиться в том, что относительно обычных операций сложения и умножения матриц R образует ассоциативное кольцо с единицей. Гомоморфизм e зададим так:

$$e(s) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Тогда, как легко видеть, $R/e(S) \cong F$. Заметим теперь, что произвольный S-модуль A можно превратить в R-модуль, если положить

$$a \begin{pmatrix} s & f \\ 0 & s \end{pmatrix} = as$$

для всех $a \in A$. Тогда $as = ae(s)$, что согласуется с процессом превращения A из модуля над кольцом R в притягивающий S-модуль.

Очевидное утверждение, что над коммутативным кольцом модули всегда можно рассматривать как бимодули, дает такие следствия:

1) все примеры из § 1 могут быть использованы для демонстрации того факта, что некоторыми свойствами T-радикал и E-радикал (как и радикалы W_F и H_V, для которых и строились эти примеры), вообще говоря, не обладают;

2) если S — коммутативное кольцо, то всякий $\mathrm{T}(F)$-радикал имеет вид T-радикала (если последний рассматривается как заданный в категории S-модулей) для некоторого кольца R и вложения $e : S \to R$; аналогично всякий $\mathrm{E}(V)$-радикал можно представить как E-радикал.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pierce R. S.* E-modules // Contem. Math. 1989. V. 87. P. 221–240.
2. *Bowshell R. A., Schultz P.* Unital rings whose additive endomorphisms commute // Math. Ann. 1977. V. 228. P. 197–214.
3. *Крылов П. А., Приходовский М. А.* Обобщенные T-модули и E-модули // Универсальная алгебра и ее приложения. Волгоград: Перемена, 1999. С. 153–169.
4. *Мишина А. П., Скорняков Л. А.* Абелевы группы и модули. М.: Наука, 1969.
5. *Кашу А. И.* Радикалы и кручения в модулях. Кишинев: Штиинца, 1983.
6. *Каш Ф.* Модули и кольца. М.: Мир, 1981.

Статья поступила 5 марта 2003 г.

Тимошенко Егор Александрович
Томский гос. университет, механико-математический факультет,
кафедра алгебры, пр. Ленина, 36, Томск 634050
tea471@ic.tsu.ru