Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 517.2

О СВЯЗАННЫХ СО СВОЙСТВОМ (N) ЛУЗИНА РАЗЛОЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ

Ф. С. Насыров

Аннотация: Введен класс непрерывных вполне регулярных функций, которые удовлетворяют свойству (N). Получено разложение произвольной непрерывной функции в сумму двух функций, первая из которых является вполне регулярной функцией, а вторая свойством (N) не обладает. Определяется класс сильно регулярных борелевских функций, для которых доказывается, что они обладают свойством (N) Лузина. Показано, что образ любого измеримого по Лебегу множества сильно регулярной функции измерим. Из произвольной борелевской функции выделяются сильно регулярная функция и функция, не обладающая свойством (N).

Ключевые слова: свойство (N) Лузина, распределение функции, обобщенное локальное время, монотонная перестановка функции.

1. Напомним (см. [1, 2]), что вещественнозначная функция $X(s)$, $s \in [0,1]$, обладает свойством (N) Лузина, если образ $X(E)$ любого множества E, имеющего лебегову меру, равную нулю, также будет множеством меры нуль.

Приведем необходимые обозначения и определения. Через $\mathbf{B}(I)$ будем обозначать борелевскую σ-алгебру подмножеств множества $I \subset R = (-\infty, +\infty)$. Множества, измеримые относительно борелевской и лебеговской σ-алгебр, будем называть (B)-*множествами* и (L)-*множествами* соответственно. Для любого множества B через $\mathbf{1}(B)$ обозначается характеристическая функция этого множества, а через $\lambda(B)$ — его лебегова мера, если B измеримо. Рассмотрим *распределение* борелевской функции $X(s)$ на множестве $T \in \mathbf{B}([0,1])$:

$$\nu_T(D) = \int_T \mathbf{1}(X(s) \in D)\, ds, \quad \nu(D) = \nu_{[0,1]}(D), \quad D \in \mathbf{B}(R).$$

Величину $\nu_T(D)$ можно рассматривать как «количество времени», проводимое функцией $X(s)$, $s \in T$, в множестве D. В случае, когда мера $\nu_T(\cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\lambda(\cdot)$, производная Радона — Никодима $\alpha(T,u) = \frac{d}{d\lambda}\nu_T(u)$ называется (см. [3]) *локальным временем функции* $X(s)$.

В силу разложения Лебега мера $\nu_T(D)$ допускает представление

$$\nu_T(D) = \int_D \alpha(T,u)\, du + \nu_T^s(D) + \nu_T^d(D), \tag{1}$$

где $\alpha(T,u) = \frac{d}{du}\nu_T((-\infty,u])$ — плотность абсолютно непрерывной компоненты, а $\nu_T^s(D)$ и $\nu_T^d(D)$ — сингулярная и дискретная компоненты меры $\nu_T(D)$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00870).

соответственно. Функцию $\alpha(T,u)$ в разложении (1) назовем *обобщенным локальным временем* функции $X(s)$. Отметим, что функция $\alpha(t,u) \equiv \alpha([0,t],u)$ в равенстве (1) может быть выбрана таким образом, чтобы она, во-первых, была неубывающей непрерывной справа по переменной t функцией и, во-вторых, носитель меры $\alpha(dt,u)$, порожденной этой функцией, лежал в множестве уровня $\{s : X(s) = u\}$. Из формулы (1) следует, что для любой ограниченной борелевской функции $f(u)$ справедливо равенство

$$\int\limits_T f(X(s))\,ds = \int\limits_R f(u)\alpha(t,u)\,du + \int\limits_R f(u)\nu_T^s(du) + \int\limits_R f(u)\nu_T^d(du). \tag{2}$$

Напомним, что функцию $X_T^*(s) = \inf\{u : \nu_T(u) > s\}$, обратную к функции $\nu_T(u) = \nu_T((-\infty,u])$, называют *монотонной перестановкой* функции $X(s)$ на множестве T.

Если $X(s)$, $s \in [0,1]$, — непрерывная функция, то для любого отрезка $[t_1,t_2]$ ее монотонная перестановка $X_{[t_1,t_2]}^*(\tau)$ непрерывна и согласно теореме Лебега представляется в виде суммы абсолютно непрерывной и сингулярной функций:

$$X_{[t_1,t_2]}^*(\tau) = X_{[t_1,t_2]}^{*,a}(\tau) + X_{[t_1,t_2]}^{*,s}(\tau). \tag{3}$$

В работе автора [4] фактически найдено разложение произвольной непрерывной функции

$$X(\tau) = X_{[t_1,t_2]}^r(\tau) + X_{[t_1,t_2]}^s(\tau), \quad \tau \in [t_1,t_2], \tag{4}$$

где

$$X_{[t_1,t_2]}^r(\tau) = X(t_1) + \int\limits_{X(t_1)}^{X(\tau)} \mathbf{1}(\alpha([t_1,t_2],u) > 0)\,du, \quad X_{[t_1,t_2]}^s(\tau) = X(\tau) - X_{[t_1,t_2]}(\tau),$$

соответствующее разложению (3):

$$\big(X_{[t_1,t_2]}^r\big)^*(\tau) = X_{[t_1,t_2]}^{*,a}(\tau), \quad \big(X_{[t_1,t_2]}^s\big)^*(\tau) = X_{[t_1,t_2]}^{*,s}(\tau),$$

здесь через $(\cdot)^*$ обозначается операция взятия монотонной перестановки функции. Функции $X_{[t_1,t_2]}^r(\tau)$ и $X_{[t_1,t_2]}^s(\tau)$ в разложении (4) назовем соответственно *регулярной* и *сингулярной* компонентами функции $X(s)$. Разложение (4) также интересно тем, что оно совпадает с разложением Лебега непрерывной монотонной функции в сумму абсолютно непрерывной и сингулярной функций. Однако в отличие от разложения Лебега монотонной функции $X(s)$ оно не является «глобальным», т. е. зависит от отрезка $[t_1,t_2]$, на котором рассматривается разложение, и, как показано ниже (см. пример 1), регулярная компонента функции $X(s)$, вообще говоря, не удовлетворяет свойству (N).

Пример 1. Пусть $\Theta(t)$, $t \in [0,1]$, — канторова «лестница», тогда функция $X(s) = \Theta(2s)\mathbf{1}(s \in [0,1/2]) + (2-2s)\mathbf{1}(s \in (1/2,1])$ является регулярной функцией на отрезке $[0,1]$, поскольку $\alpha([0,1],u) \geq \alpha([1/2,1],u) = (1/2)\mathbf{1}(u \in [0,1])$, но не удовлетворяет условию (N).

Пример 2. Пусть $X(s)$, $s \in [0,1]$, — абсолютно непрерывная функция. Тогда ее обобщенное локальное время вычисляется (см. [3]) по формуле

$$\alpha(E,u) = \int\limits_E \mathbf{1}(X'(s) \neq 0)|X'(s)|^{-1}N(ds,u),$$

где $N(t,u)$ — индикатриса Банаха функции $X(s)$, $E\subset[0,1]$ — произвольное (B)-множество. Абсолютно непрерывная функция регулярна, поскольку $\alpha([t_1,t_2],u)>0$ при п. в. u для любого отрезка $[t_1,t_2]\subset[0,1]$.

Итак, абсолютно непрерывная функция регулярна и (см. [1, 2]) удовлетворяет свойству (N). Но тогда возникает вопрос: каким должно быть разложение исходной функции в сумму двух функций, чтобы, во-первых, оно совпадало с разложением Лебега в случае монотонной функции и, во-вторых, одно из слагаемых этого разложения обладало свойством (N), а второе заведомо нет? Попытка ответить на этот вопрос и составляет основное содержание данной работы. Случай непрерывной функции исследован в п. 2, а в п. 3 рассматривается случай произвольной борелевской функции.

2. В дальнейшем всюду в п. 2 фиксируется произвольная непрерывная вещественнозначная функция $X(s)$, $s\in[0,1]$. Положим

$$M(t)=\max\{X(s):s\in[0,t]\},\quad m(t)=\min\{X(s):s\in[0,t]\}.$$

Определение. Непрерывную функцию $X(s)$, $s\in[0,1]$, назовем *вполне регулярной*, если ее сужение на любой отрезок $[t_1,t_2]$ совпадает с ее регулярной компонентой $X^r_{[t_1,t_2]}(s)$ на этом отрезке.

Замечание. Абсолютно непрерывная функция (см. пример 2) вполне регулярна.

Теорема 1. *Если функция $X(s)$, $s\in[0,1]$, вполне регулярна, то она обладает свойством* (N).

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество нулевой лебеговой меры $E\subset[0,1]$ и покажем, что внешняя мера образа $\lambda^*(X(E))$ вполне регулярной функции $X(s)$ равна нулю. Для этого возьмем последовательность открытых множеств $\{G_n\}$ таких, что $E\subset G_n$, $G_{n+1}\subset G_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(G_n)=0$. Тогда в силу непрерывности функции $X(s)$ образы $X(G_n)$ являются множествами типа F_σ и поэтому (B)-измеримы и $X(E)\subset X(G_n)$ для всех n.

Покажем, что лебегова мера множества $H_n=X(G_n)\setminus\{u:\alpha(G_n,u)>0\}$ равна нулю. Действительно, поскольку множества G_n открыты, они представляются в виде объединения попарно не пересекающихся открытых интервалов $g_{k,n}$: $G_n=\bigcup\limits_k g_{k,n}$, значит,

$$X(G_n)\subset\bigcup_k X(\bar g_{k,n}),$$

где $\bar g_{k,n}$ — замыкание интервала $g_{k,n}$. Так как $X(s)$ вполне регулярна, для любого отрезка $[t_1,t_2]$ лебегова мера множества $X([t_1,t_2])\cap\{u:\alpha([t_1,t_2],u)=0\}$ равна нулю. Воспользовавшись этим фактом, получим

$$\begin{aligned}H_n=\{u\in X(G_n):\alpha(G_n,u)=0\}&\subset\bigcup_k\{u\in X(\bar g_{k,n}):\alpha(G_n,u)=0\}\\&\subset\bigcup_k\{X(\bar g_{k,n}):\alpha(\bar g_{k,n},u)=0\},\end{aligned}$$

следовательно, $\lambda(H_n)=0$.

Далее, поскольку при всех k справедливо включение $X(G_{k+1}) \subset X(G_k)$, положив $G_\infty = \bigcap\limits_k G_k$, имеем

$$X(G_n \setminus G_\infty) = \bigcup_{k=n}^{\infty} [X(G_k) \setminus X(G_{k+1})].$$

Так как множества $X(G_k) \setminus X(G_{k+1})$ не пересекаются при различных k, выражение

$$\lambda(X(G_n \setminus G_\infty)) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(X(G_k) \setminus X(G_{k+1}))$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, ввиду доказанных выше соотношений

$$\lambda^*(X(E)) \le \lim_{n\to\infty} \lambda(X(G_n)) = \lim_{n\to\infty} \lambda(u : \alpha(G_n, u) > 0)$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \lambda(u : \alpha(G_n \setminus G_\infty, u) > 0) + \lambda(u : \alpha(G_\infty, u) > 0) = \lambda(u : \alpha(G_\infty, u) > 0).$$

Остается показать, что $\lambda(u : \alpha(G_\infty, u) > 0) = 0$. Действительно, учитывая, что $G_\infty \subset G_n$ при всех n, ввиду соотношения (2) получим

$$\int\limits_R \alpha(G_\infty, u)\, du \le \lim_{n\to\infty} \int\limits_R \alpha(G_n, u)\, du \le \lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n} \mathbf{1}(X(s) \in R)\, ds = \lim_{n\to\infty} \lambda(G_n) = 0,$$

значит, $\alpha(G_\infty, u) = 0$ при п. в. u.

Следствие. *Непрерывная функция* $X(s)$, $s \in [0,1]$, *вполне регулярна, если для любых отрезков* $[t_1, t_2] \subset [0,1]$ *монотонные перестановки* $X^*_{[t_1,t_2]}(\tau)$ *абсолютно непрерывны.*

Доказательство. Воспользуемся тем фактом, что из абсолютной непрерывности конечной меры μ на $(R, \mathbf{B}(R))$ следует, что производная $\frac{d}{du}\mu((-\infty, u])$, которая существует μ-почти всюду, конечна μ-почти везде. Пусть S — носитель меры $\nu^s(dy) + \nu^d(dy)$, тогда $\lambda(S) = 0$. В силу формулы (2) из абсолютной непрерывности функции $X^*_{[t_1,t_2]}(\tau)$ и того факта, что монотонная перестановка функции $X^*_{[t_1,t_2]}(\tau)$ есть функция, обратная к распределению функции $\nu_{[t_1,t_2]}(u)$, вытекает соотношение

$$\lambda(u : \alpha([t_1,t_2], u) > 0) = \int\limits_{[t_1,t_2]} \mathbf{1}(\alpha([t_1,t_2], X(s)) > 0, X(s) \notin S) \frac{ds}{\alpha([t_1,t_2], X(s))}$$
$$= \int\limits_{[t_1,t_2]} \mathbf{1}\big(\alpha\big([t_1,t_2], X^*_{[t_1,t_2]}(s)\big) > 0, X^*_{[t_1,t_2]}(s) \notin S\big) \frac{ds}{\alpha([t_1,t_2], X^*_{[t_1,t_2]}(s))}$$
$$= \int\limits_{[t_1,t_2]} \mathbf{1}\left(\frac{d}{ds} X^*_{[t_1,t_2]}(s) < \infty, X^*_{[t_1,t_2]}(s) \notin S\right) X^*_{[t_1,t_2]}(ds) = \lambda\big(X^*_{[t_1,t_2]}([t_1,t_2])\big),$$

значит, ввиду произвольности отрезка $[t_1, t_2]$ функция $X(s)$ вполне регулярна и обладает свойством (N).

Введем следующие обозначения:

$$m_{k,n} = \min\left\{X(s) : s \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right\}, \quad M_{k,n} = \max\left\{X(s) : s \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right\},$$

$$A_{k,n} = \left\{ v \in [m_{k,n}, M_{k,n}] : \alpha\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right], v\right) = 0 \right\},$$

$$A_R = \{u \in R : \lambda(A_{k,n})\mathbf{1}(m_{k,n} < u < M_{k,n}) = 0 \text{ для любых } k = 1 \dots 2^n, n\},$$

$$X^R(t) = X(0) + \int\limits_{X(0)}^{X(t)} \mathbf{1}(v \in A_R)\, dv, \quad X^S(t) = X(t) - X^R(t), \quad t \in [0,1].$$

Теорема 2. *Пусть $X(t)$, $t \in [0,1]$, — произвольная непрерывная функция. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *функция $X^S(t)$, $t \in [0,1]$, если она не тождественно равна нулю, не обладает свойством* (N)*;*

2) *функция $X^R(t)$, $t \in [0,1]$, вполне регулярна и, значит, обладает свойством* (N).

Доказательство. 1. Пусть функция $X^S(t)$ не тождественно равна нулю, тогда лебегова мера множества $A_S = [m(1), M(1)] \setminus A_R$ отлична от нуля. Следовательно, найдутся точка $v \in A_S$ и номера n, k такие, что $v \in (m_{k,n}, M_{k,n})$ и $\lambda(A_{k,n}) > 0$. Зафиксируем эти номера n и k. Пусть S — носитель меры $\nu^s(dy) + \nu^d\,(dy)$, тогда $\lambda(S) = 0$. Положим

$$C_{k,n} = (A_{k,n} \cap A_S) \setminus S, \quad E = X^{-1}(C_{k,n}) \cap \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$$

и заметим, что $\lambda(A_{k,n} \cap A_R) = 0$ согласно выбору множества $A_{k,n}$, значит, $\lambda(C_{k,n}) = \lambda(A_{k,n}) > 0$.

Заметим, что если $s \in E$, то $X(s) \in A_{k,n} \setminus S$, поэтому в силу формулы (2) получим

$$\lambda(E) = \int\limits_E \mathbf{1}(X(s) \in A_{k,n} \setminus S)\, ds = \int\limits_{A_{k,n}} \alpha(E, v)\, dv \le \int\limits_{A_{k,n}} \alpha\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right], v\right) dv = 0.$$

Итак, $\lambda(E) = 0$.

Остается показать, что $\lambda^*(X^S(E)) > 0$. Рассмотрим функцию $\varphi_S(u) = \int\limits_{X(0)}^{u} \mathbf{1}(v \notin A_R)\, dv$. Имеем $X^S(t) = \varphi_S(X(t))$. Функция $\varphi_S(u)$ является неубывающей абсолютно непрерывной функцией, значит, она обладает свойством (N). Поскольку множество $\varphi_S(C_{k,n})$ измеримо, в силу того факта, что $d\varphi_S(z) = \mathbf{1}(z \in A_S)\, dz$, выводим

$$0 < \lambda(C_{k,n}) = \int\limits_{m_{k,n}}^{M_{k,n}} \mathbf{1}(z \in C_{k,n} \cap A_S)\, dz = \int\limits_{m_{k,n}}^{M_{k,n}} \mathbf{1}(z \in C_{k,n}) \varphi_S(dz).$$

Если $z \in C_{k,n}$, то $\varphi_S(z) \in \varphi_S(C_{k,n})$, поэтому последний интеграл не превосходит выражения

$$\int\limits_{m_{k,n}}^{M_{k,n}} \mathbf{1}(\varphi_S(z) \in \varphi_S(C_{k,n})) \varphi_S(dz) = \int\limits_{\varphi_S(m_{k,n})}^{\varphi_S(M_{k,n})} \mathbf{1}(z \in \varphi_S(C_{k,n}))\, dz = \lambda(\varphi_S(C_{k,n}))$$

(выше мы воспользовались формулой замены переменных в интеграле Лебега — Стильтьеса). Согласно построению множества E справедливо включение

$$X(E) \subseteq X(X^{-1}(C_{k,n})) \cap X\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right) = C_{k,n} \cap [m_{k,n}, M_{k,n}] = C_{k,n}.$$

Покажем, что $X(E) = C_{k,n}$. Действительно, если $z \in C_{k,n}$, то $z \in [m_{k,n}, M_{k,n}]$, значит, найдется точка $s \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ такая, что $X(s) = z$ и $X(s) \in C_{k,n}$, а это означает, что $s \in E$ и $z \in X(E)$. Но тогда $\lambda^*(X^S(E)) = \lambda(\varphi_S(C_{k,n})) > 0$ и свойство (N) у функции $X^S(t)$ отсутствует.

2. Пусть, как и раньше, S — носитель меры $\nu^s(dv) + \nu^d(dv)$, $\lambda(S) = 0$. Обозначим

$$\varphi_R(u) = X(0) + \int\limits_{X(0)}^{u} \mathbf{1}(v \in A_R)\, dv, \quad \varphi_R^{-1}(z) = \inf\{u : \varphi_R(u) > z\},$$

тогда $X^R(s) = \varphi_R(X(s))$. Функция $\varphi_R(u)$ является неубывающей абсолютно непрерывной функцией, значит, она обладает свойством (N).

Для любого отрезка $[t_1, t_2]$ положим

$$M(t_1, t_2) = \max\{X(s) : s \in [t_1, t_2]\}, \quad m(t_1, t_2) = \min\{X(s) : s \in [t_1, t_2]\}.$$

Покажем, что для любого отрезка $[t_1, t_2]$ при п. в. $z \in [\varphi_R(m(t_1, t_2)), \varphi_R(M(t_1, t_2))]$ для обобщенного локального времени $\alpha_R([t_1, t_2], z)$ функции $X^R(s)$ справедливо равенство $\alpha_R([t_1, t_2], z) = \alpha\big([t_1, t_2], \varphi_R^{-1}(z)\big)$.

Для любого $v \in R$ в силу формулы (2) имеем

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathbf{1}(X^R(s) \le v)\, ds = \int\limits_{m(t_1,t_2)}^{M(t_1,t_2)} \alpha([t_1, t_2], u) \mathbf{1}(\varphi_R(u) \le v)\, du + \int\limits_{m(t_1,t_2)}^{M(t_1,t_2)} \mathbf{1}(\varphi_R(u) \le v) \big(\nu^s_{[t_1,t_2]}(du) + \nu^d_{[t_1,t_2]}(du)\big). \quad (5)$$

Второе слагаемое в правой части формулы (5) не может содержать абсолютно непрерывной компоненты; чтобы выделить абсолютно непрерывную компоненту из первого слагаемого, заметим, что абсолютно непрерывная функция $\varphi_R(u)$ обладает обобщенным локальным временем (см. пример 1), равным

$$\big[\varphi_R'\big(\varphi_R^{-1}(z)\big)\big]^{-1} \mathbf{1}\big(\varphi_R^{-1}(z) \in A_R \cap [m(t_1, t_2), M(t_1, t_2)], \varphi_R'\big(\varphi_R^{-1}(z)\big) \ne 0\big) = \mathbf{1}\big(\varphi_R^{-1}(z) \in A_R \cap [m(t_1, t_2), M(t_1, t_2)]\big).$$

Следовательно, первый интеграл в правой части равенства (5) можно записать в виде

$$\int\limits_{m(t_1,t_2)}^{M(t_1,t_2)} \alpha([t_1, t_2], u) \mathbf{1}(\varphi_R(u) \le v)\, d\varphi_R(u) + \int\limits_{m(t_1,t_2)}^{M(t_1,t_2)} \alpha([t_1, t_2], u) \mathbf{1}(\varphi_R(u) \le v, u \notin A_R)\, du. \quad (6)$$

Первое слагаемое в выражении (6) в силу формулы замены переменных примет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{v} \alpha\big([t_1,t_2],\varphi_R^{-1}(z)\big)\mathbf{1}(z\in\varphi_R([m(t_1,t_2),M(t_1,t_2)]))\,dz,$$

и поскольку второе слагаемое из (6) не может содержать абсолютно непрерывную компоненту, обобщенное локальное время $\alpha_R([t_1,t_2],z)$ функции $X^R(s)$ найдено.

Далее, для любого отрезка $[t_1,t_2]$ имеем

$$\int\limits_{\varphi_R(m(t_1,t_2))}^{\varphi_R(M(t_1,t_2))} \mathbf{1}(\alpha_R([t_1,t_2],z)=0)\,dz$$

$$= \int\limits_{m(t_1,t_2)}^{M(t_1,t_2)} \mathbf{1}\big(\alpha\big([t_1,t_2],\varphi_R^{-1}(\varphi_R(u))\big)=0\big)\,d\varphi_R(u).$$

Так как $\varphi_R^{-1}(\varphi_R(u))=u$ для п. в. u по мере $d\varphi_R(u)=\mathbf{1}(u\in A_R)\,du$, последний интеграл равен

$$\int\limits_{m(t_1,t_2)}^{M(t_1,t_2)} \mathbf{1}(\alpha([t_1,t_2],u)=0,u\in A_R)\,du=0$$

ввиду определения множества A_R. Поскольку $\varphi_R(M(t_1,t_1))=\max\{X^R(s): s\in [t_1,t_2]\}$, $\varphi_R(m(t_1,t_1))=\min\{X^R(s): s\in[t_1,t_2]\}$, в силу произвольности отрезка $[t_1,t_2]$ функция $X^R(s)$ вполне регулярна.

3. В дальнейшем всюду через $X(s)$, $s\in[0,1]$, обозначается произвольная борелевская функция.

Определение. Будем говорить, что борелевская функция $X(s)$, $s\in[0,1]$, *сильно регулярна*, если для любого (B)-множества $E\subset[0,1]$ внешняя мера Лебега множества $\{u\in X(E):\alpha(E,u)=0\}$ равна нулю.

Замечание. Если непрерывная функция $X(s)$, $s\in[0,1]$, сильно регулярна, то она вполне регулярна.

Теорема 3. *Сильно регулярная функция $X(s)$, $s\in[0,1]$, обладает свойством* (N), *и образ $X(A)$ любого (L)-измеримого множества A (L)-измерим.*

Доказательство. Возьмем произвольное (L)-множество $E\subset[0,1]$ нулевой лебеговой меры. Пусть G_n — последовательность открытых множеств таких, что $E\subset G_n$, $G_{n+1}\subset G_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(G_n)=0$. Положим $G_\infty=\bigcap\limits_n G_n$, тогда

$$X(E)\subset\{u\in X(G_\infty):\alpha(G_\infty,u)>0\}\cup\{u\in X(G_\infty):\alpha(G_\infty,u)=0\}.$$

В силу формулы (2) и того факта, что $\lambda(G_\infty)=0$, имеем

$$\int\limits_R \alpha(G_\infty,u)\,du\le\int\limits_{G_\infty}\mathbf{1}(X(s)\in R)\,ds=\lambda(G_\infty)=0.$$

Значит, $\alpha(G_\infty,u)=0$ при п. в. u, и

$$\lambda^*(u\in X(G_\infty):\alpha(G_\infty,u)>0)=0.$$

Тогда ввиду сильной регулярности функции $X(s)$

$$\lambda^*(X(E)) \leq \lambda^*(u \in X(G_\infty) : \alpha(G_\infty, u) = 0) = 0$$

и свойство (N) для функции $X(s)$ выполнено.

Пусть $A \subset [0,1]$ — произвольное (L)-множество, тогда существуют множества F типа F_σ и G типа G_δ такие, что $F \subseteq A \subseteq G$ и $\lambda(F) = \lambda(A) = \lambda(G)$, следовательно, $X(F) \subseteq X(A) \subseteq X(G)$. Поскольку $X(G) \setminus X(F) \subseteq X(G \setminus F)$, то в силу сильной регулярности функции $X(s)$ имеем

$$X(G \setminus F) = \{u \in X(G \setminus F) : \alpha(G \setminus F, u) > 0\} \cup e_1,$$

где e_1 — нуль-множество.

С другой стороны, в силу формулы (2) получим

$$\int\limits_R \alpha(G \setminus F, u)\, du \leq \lambda(G \setminus F) = 0,$$

значит, $\alpha(G \setminus F, u) = 0$ при п. в. u. Следовательно, множества $X(G)$, $X(A)$, $X(G)$ отличаются на нуль-множества.

Пусть теперь $D \subset [0,1]$ — произвольное (B)-множество. Поскольку $\{u : \alpha(D,u) > 0\} \subset X(D)$, имеем

$$X(D) \setminus \{u : \alpha(D,u) > 0\} = \{u \in X(D) : \alpha(D,u) = 0\},$$

а последнее множество есть множество нулевой лебеговой меры в силу регулярности функции $X(s)$. Значит, множества $X(D)$ и $\{u : \alpha(D,u) > 0\}$ отличаются на подмножество нулевой лебеговой меры.

Положив последовательно $D = G$ и $D = F$ и воспользовавшись предыдущими рассуждениями, получим, что множества $\{u : \alpha(G,u) > 0\}$, $X(A)$, $\{u : \alpha(F,u) > 0\}$ отличаются на подмножества меры нуль и тем самым образ $X(A)$ измерим по Лебегу.

Следствие. *Если для любого* (B)*-множества* $E \subset [0,1]$, $\lambda(E) > 0$, *монотонная перестановка* $X_E^*(s)$ *сужения функции* $X(s)$ *на множество* E *абсолютно непрерывна, то функция* $X(s)$ *обладает свойством* (N).

Доказательство аналогично доказательству следствия к теореме 1.

Введем множества $B_R = \{u \in X([0,1]) : \mathbf{1}(u \in X(E))\lambda^*(v \in X(E) : \alpha(E,v) = 0) = 0$ для любого борелевского множества $E \subset [0,1], \lambda(E) > 0\}$, $B_S = X([0,1]) \setminus B_R$.

Замечание. Множества B_R и B_S, вообще говоря, не обязаны быть измеримыми множествами.

Теорема 4. *Пусть* $X(t)$, $t \in [0,1]$, *— борелевская функция. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *для любого* (L)*-измеримого множества* $B_1 \subseteq B_S$ *функция*

$$X^{SS}(t) = \int\limits_{X(0)}^{X(t)} \mathbf{1}(v \in B_1)\, dv, \quad t \in [0,1],$$

если она не равна тождественно нулю, не обладает свойством (N);

2) *для любого* (L)*-измеримого множества* $B_2 \subseteq B_R$ *функция*

$$X^{SR}(t) = X(0) + \int\limits_{X(0)}^{X(t)} \mathbf{1}(v \in B_2)\, dv, \quad t \in [0,1],$$

сильно регулярна и поэтому обладает свойством (N).

Доказательство. 1. Пусть функция $X^{SS}(t)$ не тождественно равна нулю. Тогда $\lambda(B_1) > 0$. Последнее означает, что внутренняя лебегова мера множества B_S отлична от нуля. Но тогда в силу построения множества B_R существует борелевское множество E положительной лебеговой меры такое, что $X(E) \subset B_1$ и $\lambda^*(u \in X(E) : \alpha(E,u) = 0) > 0$.

Пусть $E_0 = \{s \in E : \alpha(E, X(s)) = 0, X(s) \notin S\}$, где S — носитель меры $\nu^s(dy) + \nu^d(dy)$, $\lambda(S) = 0$. Покажем, что $\lambda(E_0) = 0$. Действительно, согласно (2) имеем

$$\lambda(E_0) = \int\limits_R \alpha(E,u)\mathbf{1}(\alpha(E,u) = 0, u \notin S)\, du = 0.$$

Остается проверить, что $\lambda^*(X^{SS}(E_0)) > 0$. Пусть

$$\psi_S(u) = \int\limits_{X(0)}^{u} \mathbf{1}(v \in B_1)\, dv.$$

Тогда $X^{SS}(t) = \psi_S(X(t))$. Функция $\psi_S(u)$ неубывающая и абсолютно непрерывна, значит, она обладает свойством (N). Пусть (G_n) — последовательность (B)-измеримых множеств, содержащих $X(E_0)$ и таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(G_n) = \lambda^*(X(E_0))$. В силу формулы замены переменных и того факта, что $d\psi_S(z) = \mathbf{1}(z \in B_1)\, dz$, получим

$$\begin{aligned} \lambda^*(X^{SS}(E_0)) &= \lambda^*(\psi_S(X(E_0))) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\psi_S(G_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\psi_S(-\infty)}^{\psi_S(+\infty)} \mathbf{1}(z \in \psi_S(G_n))\, dz = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}(\psi_S(z) \in \psi_S(G_n))\psi_S\,(dz). \end{aligned}$$

Но если $z \in G_n$, то $\psi_S(z) \in \psi_S(G_n)$, следовательно, последнее выражение не меньше, чем

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}(z \in G_n)\mathbf{1}(z \in B_1)\, dz &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_R \mathbf{1}(z \in G_n)\, dz \\ &= \lambda^*(X(E_0)) = \lambda^*(v \in X(E) : \alpha(E,u) = 0) > 0, \end{aligned}$$

поскольку в силу соотношения $X(E_0) \subset X(E) \subset B_1$ можно считать, что $G_n \subseteq B_1$ при всех n. Значит, свойство (N) у функции $X^{SS}(t)$ отсутствует.

2. Обозначим

$$\psi_R(u) = X(0) + \int\limits_{X(0)}^{u} \mathbf{1}(v \in B_2)\, dv.$$

Тогда $X^{SR}(s) = \psi_R(X(s))$. Функция $\psi_R(u)$ неубывающая и абсолютно непрерывна, значит, обладает свойством (N). Пусть $\psi_R^{-1}(z) = \inf\{u : \psi_R(u) > z\}$.

Покажем, что для любого $E \in \mathbf{B}([0,1])$ при п. в. $z \in [\psi_R(-\infty), \psi_R(+\infty)]$ для обобщенного локального времени $\alpha_{SR}(E,z)$ функции $X^{SR}(s)$ справедливо равенство $\alpha_{SR}(E,z) = \alpha\big(E, \psi_R^{-1}(z)\big)\mathbf{1}(z \in B_2)$. Действительно, для любого $v \in R$ в силу формулы (2) имеем

$$\int\limits_E \mathbf{1}(X^{SR}(s) \le v)\, ds = \int\limits_R \alpha(E,u)\mathbf{1}(\psi_R(u) \le v)\, du + \int\limits_R \mathbf{1}(\psi_R(u) \le v)(\nu_E^s(du) + \nu_E^d(du)). \tag{7}$$

Поскольку второе слагаемое в правой части равенства (7) не содержит абсолютно непрерывной компоненты, для выделения абсолютно непрерывной компоненты из первого слагаемого заметим, что функция $\psi_R(u)$ обладает обобщенным локальным временем, равным $\mathbf{1}\big(\psi_R^{-1}(z) \in B_2 \cap [\psi_R(-\infty), \psi_R(+\infty)]\big)$.

Следовательно, первый интеграл в правой части равенства (7) можно записать в виде

$$\int\limits_R \alpha(E,u)\mathbf{1}(\psi_R(u) \le v)\, d\psi_R(u) + \int\limits_R \alpha(E,u)\mathbf{1}(\psi_R(u) \le v, u \notin B_2)\, du. \tag{8}$$

Первое слагаемое в выражении (8) в силу формулы замены переменных примет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{v} \alpha\big(E, \psi_R^{-1}(z)\big)\mathbf{1}\big(\psi_R^{-1}(z) \in B_2 \cap [\psi_R(-\infty), \psi_R(+\infty)]\big)\, dz,$$

и поскольку второе слагаемое не может содержать абсолютно непрерывной компоненты, абсолютно непрерывная компонента распределения функции $X^{SR}(s)$ найдена.

Предположим, что функция $X^{SR}(s)$ не является сильно регулярной функцией, т. е. существует измеримое множество E такое, что внешняя лебегова мера множества $\{v \in X^{SR}(E) : \alpha_{SR}(E,v) = 0\}$ отлична от нуля. Пусть (C_n) — последовательность открытых множеств таких, что $X(E) \subset C_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(C_n) = \lambda^*(v \in X(E) : \alpha(E,v) = 0)$. Тогда множества $\psi_R(C_n)$ измеримы и $X^{SR}(E) \subset \psi_R(C_n)$ при каждом n. В силу теоремы о сведении интеграла Стильтьеса к интегралу Лебега имеем

$$\lambda^*(z \in X^{SR}(E) : \alpha_{SR}(E,z) = 0) \le \int\limits_{\psi_R(C_n)} \mathbf{1}(\alpha_{SR}(E,z) = 0)\, dz$$
$$= \int\limits_{\psi_R(C_n)} \mathbf{1}\big(\alpha\big(E, \psi_R^{-1}(z)\big) = 0, z \in B_2\big)\, dz = \int\limits_{C_n} \mathbf{1}(\alpha(E,v) = 0, v \in B_2)\, dv.$$

Но если $v \in B_2$, то $v \in B_R$, и $\lambda^*(v \in X(E) : \alpha(E,v) = 0) = 0$. Поэтому функция $X^{SR}(t)$ сильно регулярна.

Замечание. Определение сильно регулярной функции, приведенное выше, очевидным образом переносится для вещественнозначных борелевских функций $X(t)$, $t \in E$, с более общей областью определения $E \subset [0,1]$.

Теорема 5. *Произвольная борелевская функция $X(t)$, $t \in [0,1]$, представляется в виде суммы двух функций $X(t) = X^{SS}(t) + X^{SR}(t)$, $t \in [0,1]$, где функция $X^{SS}(t) = X(t)\mathbf{1}(t \in X^{-1}(B_S))$, если множество B_S непусто, не обладает свойством* (N), *а функция $X^{SR}(t) = X(t)\mathbf{1}(t \in X^{-1}(B_R))$, если множество B_R непусто, сильно регулярна.*

Доказательство. Пусть B_S непусто. Тогда найдется борелевское множество $E \subset [0,1]$, $\lambda(E) > 0$, такое, что $\lambda^*\{v \in X(E) : \alpha(E,v) = 0\} > 0$. Отсюда $X(E) \subset B_S$. Положим $E_0 = \{s \in E : \alpha(E, X(s)) = 0\}$, следовательно (см. доказательство теоремы 4), $\lambda(E_0) = 0$ и $X(E_0) \subseteq X(E) \subseteq B_S$. С другой стороны $\lambda^*(X(E_0)) = \lambda^*(v \in X(E) : \alpha(E,v) = 0) > 0$, значит, функция $X^{SS}(t)$ свойством (N) не обладает.

Покажем, что если множество B_R непусто, то функция $X^{SR}(t)$ сильно регулярна. Действительно, пусть $E \subset X^{-1}(B_R)$ — произвольное (B)-множество. Тогда $\lambda^*\{v \in X(E) : \alpha(E,v) = 0\} = 0$, поскольку если $u \in X(E)$, то $u \in B_R$.

Замечание. Заметим, что неубывающая сингулярная функция $X(t)$ — это непрерывная монотонная функция, которая «пробегает» почти каждый свой уровень с «бесконечной скоростью», т. е. для которой обобщенное локальное время $\alpha(E,v)$ равно 0 при п. в. u для любого (B)-множества E. Именно поэтому такие функции не обладают свойством (N) Лузина.

Возникает вопрос: какую произвольную борелевскую функцию следует считать сингулярной функцией, ведущей себя подобно «канторовой лестнице»? Один из возможных ответов содержится в следующем определении.

Определение. Борелевская функция $X(t)$ *сингулярна*, если для любого (B)-множества E, $\lambda(E) > 0$, справедливо равенство $\lambda^*\{v \in X(E) : \alpha(E,v) = 0\} > 0$.

Автор признателен Н. С. Даирбекову, обратившему внимание автора на свойство (N) как на возможный объект применения теории локальных времен.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
2. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
3. *Geman D., Horowitz J.* Occupation densities // Ann. Probab. 1980. V. 8. P. 1–67.
4. *Насыров Ф. С.* Об обобщенном разложении Лебега непрерывной функции // Мат. заметки. 1998. Т. 61, № 3. С. 459–462.

Статья поступила 20 февраля 2003 г.

Насыров Фарит Сагитович
Уфимский гос. авиационный технический университет, кафедра математики, ул. К. Маркса, 12, Уфа 450000
farsag@math.ugatu.ac.ru