Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 513.588

ОБ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНО ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЯХ

А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе

Аннотация: Понятие инфинитезимальной оптимальности специализируется для дискретных динамических экстремальных задач.

Ключевые слова: конволюция, инфинитезимальный субдифференциал.

Исследования последнего времени уделяют внимание приближенной оптимальности, при которой экстремальные задачи рассматриваются с наперед заданным уровнем точности. Это ведет к концепции эпсилон-оптимума и соответствующему исчислению (см. [1, 2] и приведенную там литературу). В большинстве случаев достаточно считать, что уровень точности бесконечно мал, что упрощает дело ценой привлечения нестандартных методов анализа (см., например, [3]). В настоящей работе мы демонстрируем эту идею в случае дискретных динамических экстремальных задач, используя терминологию и предварительные сведения из [3].

Конволюция. Пусть X — векторное пространство, а E — пространство Канторовича, т. е. дедекиндово полная векторная решетка. Пусть, далее, $\Phi : X \rightrightarrows E$ — выпуклое соответствие. Тогда отображение $f := \inf \circ \Phi$, определенное соотношением

$$f(x) := \inf \Phi(x) := \inf\{e \in E : e \in \Phi(x)\} \quad (x \in X),$$

является наибольшим выпуклым оператором среди всех операторов $g : X \to E^{\bullet}$, удовлетворяющих условию $\operatorname{epi}(g) \supset \Phi$. В частности, $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(\Phi)$. Здесь символ $E^{\bullet}$ обозначает пространство E, расширенное наибольшим элементом $+\infty$.

Напомним операции $+$-*конволюции* и $\vee$-*конволюции.* Рассмотрим два выпуклых оператора $f_1 : X_1 \times X \to E^{\bullet}$, $f_2 : X \times X_2 \to E^{\bullet}$. Положим

$$\operatorname{epi}(f_1, X_2) := \{(x_1, x, x_2, e) \in W : f_1(x_1, x) \le e\},$$
$$\operatorname{epi}(X_1, f_2) := \{(x_1, x, x_2, e) \in W : f_2(x, x_2) \le e\},$$

где $W := X_1 \times X \times X_2 \times E$. Введем соответствия $\Phi, \Psi : X_1 \times X_2 \rightrightarrows E$ с помощью формул

$$\Phi(x_1, x_2) := \bigcup_{x \in X} (\operatorname{epi}(f_1, X_2) \dot{+} \operatorname{epi}(X_1, f_2))(x_1, x, x_2);$$
$$\Psi(x_1, x_2) := \bigcup_{x \in X} (\operatorname{epi}(f_1, X_2) \cap \operatorname{epi}(X_1, f_2))(x_1, x, x_2).$$

Теперь определим

$$f_2 \vartriangle f_1 := \inf \circ \Phi, \quad f_2 \odot f_1 := \inf \circ \Psi.$$

Сразу же заметим, что

$$\operatorname{dom}(f_2 \vartriangle f_1) = \operatorname{dom}(f_2 \odot f_1) = \operatorname{dom}(f_2) \circ \operatorname{dom}(f_1).$$

Оператор $f_2 \vartriangle f_1$, т. е. $+$-*конволюция* f_2 и f_1, часто называют также *сверткой Рокафеллара* f_2 и f_1.

Хорошо известно, что $+$-конволюция и $\vee$-конволюция могут быть вычислены по формулам

$$(f_2 \vartriangle f_1)(x_1, x_2) = \inf_{x \in X} (f_1(x_1, x) + f_2(x, x_2));$$
$$(f_2 \odot f_1)(x_1, x_2) = \inf_{x \in X} (f_1(x_1, x) \vee f_2(x, x_2)).$$

Инфинитезимальная оптимальность. Пусть даны выпуклый оператор $f : X \to F^\bullet$ и точка $\bar{x}$ из эффективной области определения $\operatorname{dom}(f) := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ оператора F. При заданном $\varepsilon \geq 0$ из положительного конуса E_+ пространства E под ε-*субдифференциалом* оператора f в точке $\bar{x}$ мы понимаем множество

$$\partial^{\,\varepsilon} f(\bar{x}) := \{T \in L(X, E) : (\forall x \in X)(Tx - Fx \leq T\bar{x} - f\bar{x} + \varepsilon)\},$$

где $L(X, E)$ обозначает, как обычно, пространство линейных операторов, действующих из X в E.

Выделим некоторое фильтрованное по убыванию подмножество $\mathscr{E}$ пространства E, составленное из положительных элементов. Предполагая, что E и $\mathscr{E}$ — стандартные множества, определим *монаду* $\mu(\mathscr{E})$ семейства $\mathscr{E}$ следующим образом: $\mu(\mathscr{E}) := \bigcap \{[0, \varepsilon] : \varepsilon \in {}^\circ\mathscr{E}\}$. Элементы $\mu(\mathscr{E})$ называют *положительными инфинитезималями* относительно $\mathscr{E}$. Как обычно, ${}^\circ\mathscr{E}$ обозначает внешнее множество всех стандартных элементов E, т. е. *стандартное ядро* $\mathscr{E}$.

В дальнейшем мы предполагаем, что монада $\mu(\mathscr{E})$ представляет собой внешний конус над ${}^\circ\mathbb{R}$, при этом $\mu(\mathscr{E}) \cap {}^\circ E = 0$. (В приложениях множеством $\mathscr{E}$ обычно служит фильтр порядковых единиц в E.) Отношение *бесконечной близости* между элементами E вводят следующим образом:

$$e_1 \approx e_2 \leftrightarrow e_1 - e_2 \in \mu(\mathscr{E}) \wedge e_2 - e_1 \in \mu(\mathscr{E}).$$

Поскольку

$$\bigcap_{\varepsilon \in {}^\circ\mathscr{E}} \partial_\varepsilon f(\bar{x}) = \bigcup_{\varepsilon \in \mu(\mathscr{E})} \partial_\varepsilon f(\bar{x}),$$

внешнее множество в обеих частях представляет собой так называемый *инфинитезимальный субдифференциал* оператора f в точке $\bar{x}$. Обозначим это множество символом $Df(\bar{x})$. Элементы $Df(\bar{x})$ называют *инфинитезимальными субградиентами* оператора f в точке $\bar{x}$. Если 0 является инфинитезимальным субградиентом f в точке $\bar{x}$, то $\bar{x}$ называют *точкой инфинитезимального минимума* f. Мы воздержимся от явного указания в обозначениях на множество $\mathscr{E}$, поскольку это не приведет к недоразумениям.

Теорема 1. *Пусть $f_1 : X \times Y \to E^\bullet$ и $f_2 : Y \times Z \to E^\bullet$ — выпуклые операторы. Предположим, что $+$-конволюция $f_2 \vartriangle f_1$ инфинитезимально точна в некоторой точке (x, y, z); т. е. $(f_2 \vartriangle f_1)(x, y) \approx f_1(x, y) + f_2(y, z)$. Если, кроме того, выпуклые множества $\operatorname{epi}(f_1, Z)$ и $\operatorname{epi}(X, f_2)$ находятся в общем положении, то имеет место представление*

$$D(f_2 \vartriangle f_1)(x, y) = Df_2(y, z) \circ Df_1(x, y).$$

Доказательство. Положим $\delta := f_1(x, y) + f_2(y, z) - (f_2 \vartriangle f_1)(x, y)$. По условию δ — бесконечно малая величина.

Сначала установим, что правая часть доказываемого равенства содержится в левой. Возьмем $(T_1, T) \in Df_1(x, y)$ и $(T, T_2) \in Df_2(y, z)$. Тогда для некоторых бесконечно малых положительных $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ будет $(T_1, T) \in \partial_{\varepsilon_1} f_1(x, y)$ и $(T, T_2) \in \partial_{\varepsilon_2} f_2(y, z)$. Можно считать, не нарушая общности, что $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \geq \delta$. В силу теоремы 4.2.8 из [2] оператор (T_1, T_2) попадает в $\partial_\varepsilon(f_2 \vartriangle f_1)(x, y)$, как только $\varepsilon \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \delta$. Следовательно, $(T_1, T_2) \in D(f_2 \vartriangle f_1)(x, y)$.

Установим противоположное включение. Для этого возьмем какой-нибудь положительный бесконечно малый элемент ε и оператор (T_1, T_2) из $D(f_2 \vartriangle f_1)(x, y)$. В силу теоремы 4.2.8 найдутся положительные $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ такие, что $(T_1, T_2) \in \partial_{\varepsilon_2} f_2(y, z) \circ \partial_{\varepsilon_1} f_1(x, y)$, при этом $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon + \delta$. Ясно, что величины ε_1 и ε_2 бесконечно малы.

Теорема 2. *Пусть $\vee$-конволюция $f_2 \odot f_1$ выпуклых операторов $f_1 : X \times Y \to E^\bullet$ и $f_2 : Y \times Z \to E^\bullet$ является инфинитезимально точной в некоторой точке $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$, т. е. $(f_2 \odot f_1)(x, z) \approx f_1(x, y) \vee f_2(y, z)$. Если, помимо этого, выпуклые множества $\operatorname{epi}(f_1, Z)$ и $\operatorname{epi}(X, f_2)$ находятся в общем положении, то имеет место представление*

$$D(f_2 \odot f_1)(x, z) = \bigcup (D(\alpha_2 \circ f_2)(y, z) \circ D(\alpha_1 \circ f_1)(x, y)),$$

где объединение берется по всем $\alpha_1, \alpha_2 \in \operatorname{Orth}(E^+)$ таким, что $\alpha_1 + \alpha_2 = I_E$.

Доказательство. Положим $\delta := f_1(x, y) \vee f_2(y, z) - (f_2 \odot f_1)(x, z)$. По условию δ — бесконечно малая величина. Допустим, что

$$(T_1, T_2) \in \partial_\varepsilon(f_2 \odot f_1)(x, z)$$

для некоторого бесконечно малого ε. В силу δ-точности $\vee$-свертки $f_2 \odot f_1$ в точке (x, y, z) можно найти оператор $S \in \mathscr{L}(X, E)$ и ортоморфизмы $\alpha_1, \alpha_2 \in \operatorname{Orth}(E)^+$, $\alpha_1 + \alpha_2 = I_E$, такие, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 \circ f_1(x, y) + \alpha_2 \circ f_2(y, z) + (\alpha_1 \circ f_1)^*(T_1, S) \\ + (\alpha_2 \circ f_2)^*(S, T_2) \leq T_1 x - T_2 z + \varepsilon + \delta. \end{aligned}$$

Положим $\varepsilon_1 := (\alpha_1 \circ f_1)^*(T_1, S) + \alpha_1 \circ f_1(x, y) - T_1 x + Sy$ и $\varepsilon_2 := \varepsilon + \delta - \varepsilon_1$. Тогда $(T_1, S) \in \partial_{\varepsilon_1}(\alpha_1 \circ f_1)(x, y)$ и $(S, T_2) \in \partial_{\varepsilon_2}(\alpha_2 \circ f_2)(y, z)$. Ясно, что величины ε_1 и ε_2 бесконечно малы, т. е. (T_1, T_2) входит в правую часть требуемого равенства. Противоположное включение проверяется столь же просто.

Теорема 3. *Пусть $h : X \times Y \to E^\bullet$ и $g : X \times Y \to F^\bullet$ — выпуклые операторы, и пусть $\Phi \subset X \times Y$ — выпуклое соответствие. Положим*

$$f(x) := \inf\{h(x, y) : y \in \Phi(x),\ g(x, y) \leq 0\}.$$

Предположим, что в общем положении находятся как тройка выпуклых множеств $\operatorname{epi}(h), \Phi \times E^+$, $\{g \le 0\} \times E^+$, *так и пара* $\operatorname{epi}(g)$, $X \times Y \times (-F^+)$. *Допустим, далее, что* $h(x,y) \approx f(x)$ *в некоторой точке* $(x,y) \in \operatorname{dom}(h) \cap \Phi$, $g(x,y) \le 0$. *Тогда*

$$Df(x) = \Big\{T : (T,0) \in Dh(x,y) + D\Phi(x,y) + \bigcup (D(\alpha \circ g)(x,y))\Big\},$$

где объединение берется по всем $\alpha \in \mathscr{L}(F,E)^+$.

Доказательство. Пусть ε — некоторая положительная инфинитезималь. Не вызывает сомнения, что включение $T \in \partial_\varepsilon f(x)$ означает существование операторов $\alpha \in \mathscr{L}^+(F,E)$, $T_1, T_2, T_3 \in \mathscr{L}(X,E)$ и $S_1, S_2, S_3 \in \mathscr{L}(Y,E)$ таких, что $T = T_1 + T_2 + T_3$, $0 = S_1 + S_2 + S_3$ и

$$f(x) + h^*(T_1, S_1) + \Phi^*(T_2, S_2) + (\alpha \circ g)^*(T_3, S_3)) \le Tx + \varepsilon.$$

Пусть $y \in Y$ удовлетворяет условиям теоремы. Положим $\delta := f(x) - h(x,y)$ и обозначим

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 := h(x,y) + h^*(T_1,S_1) - T_1x + S_1y,\\
&\varepsilon_2 := \Phi^*(T_2,S_2) - T_2x + S_2y,\\
&\varepsilon_3 := (\alpha \circ g)(x,y) + (\alpha \circ g)^*(T_3,S_3) - T_3x + S_3y.
\end{aligned}$$

Тогда $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \le (\alpha \circ g)(x,y) + \varepsilon + \delta$ и, привлекая 4.1.3 (1), получаем $(T_1, S_1) \in \partial_{\varepsilon_1} h(x,y)$, $(T_2,S_2) \in \partial_{\varepsilon_2}\Phi(x,y)$, $(T_3,S_3) \in \partial_{\varepsilon_3}(\alpha \circ g)(x,y)$. Тем самым

$$(T,0) \in \partial_{\varepsilon_1} h(x,y) + \partial_{\varepsilon_2}\Phi(x,y) + \partial_{\varepsilon_3}(\alpha \circ g)(x,y).$$

Поскольку величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ бесконечно малы, установлено включение левого множества из доказываемого равенства в правое. Обратное включение проверяется аналогичными рассуждениями.

Динамические экстремальные задачи. В качестве иллюстрации мы применим субдифференциальное исчисление к выводу критерия инфинитезимальной оптимальности в дискретной динамической экстремальной задаче.

Пусть $X_0, \dots, X_N$ — топологические векторные пространства, и пусть $G_k : X_{k-1} \rightrightarrows X_k$ — непустое выпуклое соответствие для каждого $k := 1, \dots, N$. Набор $G_1, \dots, G_N$ задает *динамическое семейство* процессов $(G_{k,l})_{k<l\le N}$, где соответствие $G_{k,l} : X_k \rightrightarrows X_l$ определено с помощью равенств

$$G_{k,l} := G_{k+1} \circ \dots \circ G_l, \quad \text{если } k+1 < l;$$

$$G_{k,k+1} := G_{k+1} \quad (k := 0, 1, \dots, N-1).$$

Очевидно, что $G_{k,l} \circ G_{l,m} = G_{k,m}$ для всех $k < l < m \le N$.

Траекторию указанного семейства процессов определяют как упорядоченный набор элементов $\mathfrak{x} := (x_0, \dots, x_N)$ такой, что $x_l \in G_{k,l}(x_k)$ при каждом $k < l \le N$. При этом говорят, что x_0 — *начало* $\mathfrak{x}$, а x_N — *конец* $\mathfrak{x}$.

Пусть E — топологическое пространство Канторовича. Рассмотрим некоторые выпуклые операторы $f_k : X_k \to E^\bullet$ $(k := 0, 1, \dots, N)$, а также выпуклые множества $S_0 \subset X_0$ и $S_N \subset X_N$. Имея набор $\mathfrak{x} := (x_0, \dots, x_N)$, положим

$$f(\mathfrak{x}) := \sum_{k=1}^{N} f_k(x_k).$$

Траекторию называют *допустимой*, если ее начало принадлежит S_0, а конец — S_N. Траекторию $\mathfrak{x}^0 := \left(x_1^0, \dots, x_N^0\right)$ называют *инфинитезимально оптимальной*, если $x_0^0 \in S_0$, $x_N^0 \in S_N$ и $f(\mathfrak{x}^0)$ достигает инфинитезимального минимума на множестве всех допустимых траекторий. Здесь мы сталкиваемся с частным случаем общей *дискретной динамической экстремальной задачи*, состоящей в поиске оптимальной в том или ином смысле траектории динамического семейства.

Рассмотрим множества

$$C_0 := S_0 \times X; \quad C_1 := G_1 \times \prod_{k=2}^{N} X_k;$$

$$C_2 := X_0 \times G_2 \times \prod_{k=3}^{N} X_k; \dots ; \ C_N := \prod_{k=0}^{N-2} X_k \times G_N;$$

$$C_{N+1} := \prod_{k=1}^{N-1} X_k \times S_N; \quad X := \prod_{k=0}^{N} X_k.$$

Определим оператор $\tilde{f}_k : X \to E^{\bullet}$ формулой

$$\tilde{f}_k(\mathfrak{x}) := f_k(x_k) \quad (\mathfrak{x} := (x_0, \dots, x_N), \ k := 0, \dots, N).$$

Теорема 4. *Пусть выпуклые множества*

$$C_0 \times E^+, \dots, C_{N+1} \times E^+, \quad \operatorname{epi}(\tilde{f}_0), \dots, \operatorname{epi}(\tilde{f}_N)$$

находятся в общем положении в пространстве $X \times E$. Допустимая траектория $\left(x_0^0, \dots, x_N^0\right)$ является инфинитезимально оптимальной в том и только в том случае, если совместна следующая система условий:

$$\alpha_k \in \mathscr{L}(X_k, E) \ \ (k := 0, \dots, N);$$
$$(\alpha_{k-1}, \alpha_k) \in DG_k\left(x_{k-1}^0, x_k^0\right) - \{0\} \times Df_k\left(x_k^0\right) \quad (k := 1, \dots, N);$$
$$-\alpha_0 \in DS_0(x_0) + Df_0(x_0); \quad \alpha_N \in DS_N(x_N).$$

Доказательство. Как видно, инфинитезимально оптимальная траектория $u := \left(x_0^0, \dots, x_N^0\right)$ будет также инфинитезимальным решением программы

$$v \in C_0 \cap \dots \cap C_{N+1}, \quad f(v) \to \inf,$$

следовательно,

$$0 \in D\left(\sum_{k=0}^{N} \tilde{f}_k + \sum_{k=0}^{N+1} \delta_E(C_k)\right)(u).$$

Ввиду предположения об общем положении можно применить теорему 4.2.7 из [2]. Значит, найдутся линейные операторы $\mathscr{A}_k, \mathscr{B}_l \in \mathscr{L}(X, E)$, для которых выполнены соотношения

$$\mathscr{A}_k \in DC_k(u) \quad (k := 0, 1, \dots, N),$$
$$\mathscr{B}_l \in D\tilde{f}_l(u) \quad (l := 0, 1, \dots, N),$$
$$0 = \sum_{k=0}^{N+1} \mathscr{A}_k + \sum_{k=0}^{N} \mathscr{B}_l.$$

Нетрудно видеть, что операторы $\mathscr{A}_k$ и ($\mathscr{B} := \mathscr{B}_1 + \dots + \mathscr{B}_N$) можно записать в виде

$$\begin{gathered}
\mathscr{A}_0 = (\alpha_0', 0, 0, \dots, 0, 0, 0),\\
\mathscr{A}_1 = (\alpha_0, \alpha_1', 0, \dots, 0, 0, 0),\\
\mathscr{A}_2 = (0, -\alpha_1, \alpha_2', \dots, 0, 0, 0),\\
\vdots\\
\mathscr{A}_{N-1} = (0, 0, 0, \dots, -\alpha_{N-2}, \alpha_{N-1}', 0),\\
\mathscr{A}_N = (0, 0, 0, \dots, 0, -\alpha_{N-1}, \alpha_N'),\\
\mathscr{A}_{N+1} = (0, 0, 0, \dots, 0, 0, -\alpha_N),\\
\mathscr{B} = (-\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N-2}, \beta_{N-1}, \beta_N),
\end{gathered}$$

где $\alpha_k, \alpha_k' \in \mathscr{L}(X_k, E)$ и $-\beta_l \in Df_l\big(x_l^0\big)$ $(l := 1, \dots, N)$. Отсюда выводим $\alpha_k' = \alpha_k - \beta_k$ $(k = 1, \dots, N)$. Теперь для $k := 1, \dots, N$ ввиду субдифференциальных включений для операторов $\mathscr{A}_k$ можем написать

$$(\alpha_{k-1}, \alpha_k') = (\alpha_{k-1}, \alpha_k - \beta_k) = (\alpha_{k-1}, \alpha_k) + (0, -\beta_k) \in DG_{\hat{k}}\big(x_{k-1}^0, x_k^0\big)$$

и, далее,

$$(\alpha_{k-1}, \alpha_k) \in DG_k\big(x_{k-1}^0, x_k^0\big) - \{0\} \times Df_k\big(x_k^0\big).$$

Кроме того, при $k = 0$ и $k = N + 1$ получаем соотношения

$$-\alpha_0 = \alpha_0' - \beta_0 \in DS_0\big(x_0^0\big) + Df_0\big(x_0^0\big), \quad \alpha_N \in DS_N\big(x_N^0\big),$$

что и требовалось.

Приведенную динамическую экстремальную задачу называют *терминальной* при условии, что целевая функций зависит только от терминального состояния:

$$f(\mathfrak{x}) = f_N(x_N) \quad (\mathfrak{x} := (x_0, \dots, x_N) \in X).$$

Мы предполагаем, что f — выпуклый оператор, действующий из X_N в E.

Если $(x_0, \dots, x_N)$ — инфинитезимально оптимальная траектория терминальной задачи, то x_N является инфинитезимальным решением следующей экстремальной задачи:

$$x \in C := C_{0,N}(S_0) \cap S_N, \quad f_N(x) \to \inf.$$

Это следует из того, что, очевидно, найдется траектория с началом $a \in S_0$ и концом $b \in C$. С другой стороны, если $\bar{x}$ — инфинитезимальное решение сформулированной экстремальной задачи, то $\bar{x} \in G_{0,N}(x_0)$ для некоторого $x_0 \in S_0$, а траектория, соединяющая x_0 и $\bar{x}$, будет инфинитезимально оптимальной. В то же время нам сейчас интересна глобальная характеризация оптимальной траектории в целом, а не только ее терминальное состояние. В этом состоит различие между рассматриваемой задачей и любой программой вида $x \in C$, $f(x) \to \inf$.

Последовательность линейных операторов $\alpha_k \in \mathscr{L}(X_k, E)$ $(k := 0, \dots, N)$ называют *инфинитезимальной характеристикой* траектории $(x_0, \dots, x_N)$, если выполнены следующие соотношения:

$$\alpha_k x - \alpha_l y \approx \alpha_k x_k - \alpha_l x_l \quad ((x, y) \in G_{k,l},\ 0 \le k < l \le N).$$

Теорема 5. *Предположим, что выпуклые множества* $C_0 \times E^+, \dots, C_{N+1} \times E^+$ *и* $\prod\limits_{k=0}^{N-1} X_k \times \operatorname{epi}(f)$ *находятся в общем положении. Тогда допустимая траектория* $(x_0, \dots, x_N)$ *будет инфинитезимально оптимальной в том и только в том случае, если существует инфинитезимальная характеристика* $(\alpha_0, \dots, \alpha_N)$ *этой траектории такая, что*

$$\alpha_0 x_0 \approx \inf_{x \in S_0} \{\alpha_0 x\}; \quad \alpha_N \in Df(x_N) + DS_N(x_N).$$

Доказательство. Субдифференциальные включения теоремы 4 можно переписать в эквивалентной форме:

$$(\alpha_{k-1}, \alpha_k) \in DG(x_{k-1}, x_k) + Df_{k-1}(x_{k-1}) \times \{0\} \quad (k := 0, 1, \dots, N-1);$$
$$-\alpha_0 \in DS_0(x_0); \quad \alpha_N \in Df_N(x_N) + DS_N(x_N).$$

Отсюда немедленно вытекает требуемое.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rockafellar R. T., Wets R. J.-B.* Variational analysis. Berlin etc.: Springer-Verl., 1998.
2. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы: теория и приложения. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. Ч. 1. 2003. Ч. 2.
3. *Гордон Е. И., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Инфинитезимальный анализ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2001. Ч. I.

Статья поступила 14 ноября 2003

Кусраев Анатолий Георгиевич
Владикавказский научный центр,
Институт прикладной математики и информатики,
пр. Коста, 93, Владикавказ 362040
`kusraev@alanianet.ru`

Кутателадзе Семен Самсонович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`sskut@math.nsc.ru;`