Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 517.9:514.7

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ГРАДИЕНТ ЯДРА УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СНОСОМ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Ю. Н. Бернацкая

Аннотация: Для параболического уравнения со сносом на римановом многообразии положительной кривизны получено представление логарифмического градиента в виде суммы двух векторных полей, одно из которых известно, а другое ограничено. Задача рассмотрена при условии достаточно быстрого убывания на бесконечности поля сноса.

Ключевые слова: фундаментальное решение, риманово многообразие, оператор Лапласа — Бельтрами, векторное поле.

1. Введение

Пусть $\mathscr{M}$ — односвязное n-мерное риманово многообразие неположительной кривизны с метрикой ρ и объемом σ. Геодезическая на $\mathscr{M}$, соединяющая точки x и y, будет обозначаться через $\gamma(s)$, s — натуральный параметр, $\gamma(0) = y$, $\gamma(\rho(x,y)) = x$. Пусть $p(t,x,y)$ — фундаментальное решение параболического уравнения со сносом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + \langle \operatorname{grad} u, B(x)\rangle, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа — Бельтрами и снос задан векторным полем B на многообразии.

В данной работе получено представление логарифмического градиента ядра теплопроводности $p(t,x,y)$ в виде суммы двух векторных полей, одно из которых известно, а второе ограничено:

$$U(t,x,y) = \operatorname{grad}_x \ln p(t,x,y) = \operatorname{grad}_x \ln m_0(t,x,y) + W(t,x,y).$$

Функцию $m_0(t,x,y)$ возьмем равной $e^{\psi(x,y)}q(t,x,y)$, где функция q, широко используемая для сравнения с фундаментальным решением параболического уравнения на многообразии [1, 2], задана формулой

$$q(t,x,y) = (2\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{\rho^2(x,y)}{2t}},$$

а $\psi(x,y)$ описывает работу поля сноса вдоль геодезической γ:

$$\psi(x,y) = -\int\limits_0^{\rho(x,y)} \langle B(\gamma(s)), \dot\gamma(s)\rangle\, ds.$$

Тогда известное поле имеет вид

$$V(t,x,y) = \operatorname{grad}_x \ln m_0(t,x,y) = \operatorname{grad}_x \psi(x,y) - \frac{\rho(x,y)}{t}\dot{\gamma}(\rho).$$

Ограниченность поля $W(t,x,y)$ доказана ниже (теорема 3).

Фундаментальное решение $p(t,x,y)$ построено [3] только при определенных условиях на многообразие и поле сноса. Тензор Риччи будет определяться равенством

$$\operatorname{Ric}(x)(U,V) = \sum_{k=1}^{n} \langle R(x)(U,e_k)V, e_k\rangle,$$

а скалярная кривизна — равенством $r(x) = \operatorname{tr}\operatorname{Ric}(x)$ (они отличаются от общепринятых знаком).

Условия на многообразие $\mathscr{M}$ формулируются в терминах тензора кривизны $R(x)$ [2, 4]:

1а) $\langle R(x)(U,V)U,V\rangle \geqslant 0$ для всех $x \in \mathscr{M}$, $U,V \in T_x\mathscr{M}$, т. е. секционная кривизна многообразия неположительна;

1б) для произвольных ортобазисов $\{e_k\}$, $\{h_k\}$ в $T_x\mathscr{M}$

$$\sum_k |\langle R(x)(U,e_k)V,h_k\rangle| \leqslant c\sqrt{\operatorname{Ric}(x)(U,U)\operatorname{Ric}(x)(V,V)},$$

а константа c не зависит от x;

1в) вдоль любой геодезической γ скалярная кривизна убывает достаточно быстро, т. е. $\int\limits_0^\infty sr(\gamma(s))\,ds < c$, где c не зависит от γ;

1г) ковариантные производные тензора кривизны удовлетворяют оценкам

$$\|(\nabla_{X(s)}R)(\gamma(s))(Y(s),\dot{\gamma}(s))Z(s)\| \leqslant f_1(\gamma(s))\|X(s)\|\cdot\|Y(s)\|\cdot\|Z(s)\|,$$
$$\|\nabla_{U(s)}\nabla_{X(s)}R(\gamma(s))(Y(s),\dot{\gamma}(s))Z(s)\| \leqslant f_2(\gamma(s))\|X(s)\|\cdot\|Y(s)\|\cdot\|Z(s)\|\cdot\|U(s)\|,$$

где функции f_1, f_2 такие, что вдоль любой геодезической γ выполняется неравенство $\int\limits_0^\infty s^2 f_k(\gamma(s))\,ds < c$ и c не зависит от γ.

Условия на поле сноса B формулируются следующим образом [3]. Вдоль любой геодезической $\gamma(s)$ для ограниченных в $\mathscr{M}$ векторных полей $X_1(x)$, $X_2(x)$ выполняются оценки

2а) $\int\limits_0^\rho \|B(\gamma(s))\|\,ds \leqslant c_0$,

2б) $\int\limits_0^\rho \|\nabla_{X_1}B(\gamma(s))\|\,ds \leqslant c_1\|X_1\|$,

2в) $\int\limits_0^\rho \|\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}B(\gamma(s))\|\,ds \leqslant c_2\|X_1\|\|X_2\|$,

2г) $\|\operatorname{grad}\Delta\psi(x,y)\| \leqslant c_3$.

В работе [4] фундаментальное решение $p(t,x,y)$ найдено в виде

$$p(t,x,y) = m(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} m(t-\tau,x,z)r(\tau,z,y)\sigma(dz),$$

где $m(t,x,y) = e^{\psi(x,y)} p_0(t,x,y)$, $p_0(t,x,y)$ — ядро теплопроводности уравнения без сноса. Функция $r(t,x,y)$ определяется из уравнения Вольтерра:

$$r(t,x,y) = M(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathscr{M}} M(t-\tau,x,z) r(\tau,z,y)\sigma(dz),$$

где $M(t,x,y)$ — невязка уравнения (1) относительно функции $m(t,x,y)$. Также показано, что при выполнении условий 2а)–2в) на поле сноса $\|\operatorname{grad}\psi\|$ и $|\Delta\psi|$ ограничены константами, зависящими только от размерности многообразия.

В настоящей работе будет удобнее использовать начальное приближение

$$\widetilde{m}(t,x,y) = e^{\psi(x,y) - \frac{1}{2}\phi(x,y) - kt} q(t,x,y),$$

которое без функции $\psi(x,y)$ в экспоненте использовано в [2] для построения ядра уравнения теплопроводности без сноса. Функция $\phi(x,y)$ задается формулой

$$\phi(x,y) = \int_0^{\rho(x,y)} \frac{a(\gamma(s),y)}{s}\, ds,$$

где функция $a(x,y)$ определена ниже. В [2] доказано, что $\|\operatorname{grad}\phi\|$ и $|\Delta\phi|$ ограничены константой. Теорема 1 дает оценку для функции $\tilde{r}(t,x,y)$, соответствующей начальному приближению $\widetilde{m}(t,x,y)$.

2. Необходимые сведения

Определение 1. *Базисными полями Якоби* вдоль геодезической γ, $\gamma(0) = y$, $\gamma(\rho) = x$, называются n решений $Z_1(s), \dots, Z_n(s)$ уравнения Якоби

$$Z''(s) = R(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), Z(s))\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s),$$

где $Z'(s) = \nabla_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)} Z(s)$, такие, что $Z_k(0) = 0$, $Z_k(\rho)$ образуют в $T_x\mathscr{M}$ полугеодезический ортобазис (т. е. $Z_1(s) = \frac{s}{\rho}\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)$, $Z_k(s) \perp \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)$).

Для полей Якоби X, Z справедливо равенство [5]

$$\nabla_{X(s)} Z(s) = -\langle X'(s), Z(s)\rangle \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) + H(s),$$

где поле $H(s)$ удовлетворяет оценке

$$\|H(s)\| \leqslant (\rho - s) \int_0^\rho \|f(\tau, X(\tau), Z(\tau))\|\, d\tau,$$

$$\begin{aligned} f(s, X(s), Y(s)) = {} & 2R(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), X(s))Z'(s) + 2R(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), Z(s))X'(s) \\ & + (\nabla_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)} R)(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), X(s))Z(s) + (\nabla_X R)(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), Z(s))\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s). \end{aligned}$$

При выполнении условия 1в) норма $\|Z'(s)\|$ ограничена.

Для полей $Z_k(s)$ определены [1] оператор $D(\gamma(s))$:

$$D(\gamma(s))Z_k(s) = sZ_k'(s) \text{ для } Z_k(s) \perp \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), \quad D(\gamma(s))\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s),$$

и функция

$$a(x,y) = \operatorname{tr}(D(x) - I) = \sum_k (\rho Z_k'(\rho) - Z_k(\rho), Z_k(\rho)).$$

Утверждение 1. *Оператор $D(x)$ симметричен, и $\langle D(x)U, U\rangle \geqslant \langle U, U\rangle$, $U \in T_x\mathscr{M}$.*

Утверждение 2. *Для функции $a(x, y)$ справедливы оценки*

$$0 \leqslant a(x, y) \leqslant \int\limits_0^\rho s\,\mathrm{Ric}(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))\,ds$$

и $\|\operatorname{grad} a(x, y)\| < \mathrm{const}$, $|\Delta a(x, y)| < \mathrm{const}$.

Функция $q(t, x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta q + \frac{a(x, y)}{2t} q(t, x, y) \tag{2}$$

и для $t > 0$, $x, y \in \mathscr{M}$ имеет место оценка [1]

$$\exp\left\{-kt - \frac{b(x, y)}{2}\right\} \leqslant \frac{p_0(t, x, y)}{q(t, x, y)} \leqslant 1, \tag{3}$$

где k — константа и

$$b(x, y) = \int\limits_0^\rho (\rho - s)\,\mathrm{Ric}(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))\,ds.$$

3. Результаты

Фундаментальное решение $p(t, x, y)$ будем искать в виде

$$p(t, x, y) = \widetilde{m}(t, x, y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} \widetilde{m}(t - \tau, x, z)\tilde{r}(\tau, z, y)\sigma(dz). \tag{4}$$

Функция $\tilde{r}(t, x, y)$ определяется из уравнения Вольтерра:

$$\tilde{r}(t, x, y) = \widetilde{M}(t, x, y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} \widetilde{M}(t - \tau, x, z)\tilde{r}(\tau, z, y)\sigma(dz),$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{M}(t, x, y) &= \frac{1}{2}\Delta\widetilde{m} + \langle \operatorname{grad}\widetilde{m}, B(x)\rangle - \frac{\partial\widetilde{m}}{\partial t} \\ &= \widetilde{m}\left(\frac{1}{2}\Delta\psi - \frac{1}{4}\Delta\phi + \langle \operatorname{grad}\psi, B(x)\rangle - \frac{a(x, y)}{2\rho}\langle\dot{\gamma}(\rho), B(x)\rangle - k\right).\end{aligned}$$

В силу ограниченности $\|\operatorname{grad}\psi\|$, $|\Delta\psi|$, $|\Delta\phi|$, ограниченности $\|B\|$, вытекающей из условия 2a), а также оценки для $a(x, y)$ из утверждения 2 имеем

$$|\widetilde{M}(t, x, y)| \leqslant c\widetilde{m}(t, x, y).$$

Теорема 1. *Если многообразие* $\mathscr{M}$ *удовлетворяет условиям* 1, *а поле сноса* $B : \mathscr{M} \to T_x\mathscr{M}$ — *условиям* 2а)–2в), *то для* $x,\, y \in \mathscr{M}$, $t > 0$ *имеют место оценки*

$$|\tilde{r}_k(t,x,y)| \leqslant \tilde{c}\frac{(\tilde{c}t)^k}{k!}\, q(t,x,y), \quad |\tilde{r}(t,x,y)| \leqslant \tilde{c}e^{\tilde{c}t}q(t,x,y),$$
$$\widetilde{p}(t,x,y) \leqslant e^{c_0+\tilde{c}t}q(t,x,y),$$

где $\tilde{c} = ce^{c_0}$.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 4 из [3] с учетом того, что величина $\phi(x,y)$ положительна и ограничена и, следовательно, $e^{-\frac{1}{2}\phi-kt} \leqslant 1$.

Для оценки поля $W(t,x,y)$ получим уравнение на функцию $\alpha(t,x,y) = \langle W, W\rangle$.

Теорема 2. *Уравнение для функции* $\alpha(t,x,y)$ *имеет вид*

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha}{\partial t} &= \frac{1}{2}\Delta\alpha + \langle \operatorname{grad}\alpha, U\rangle + \langle \operatorname{grad}\alpha, B\rangle \\ &\quad + \alpha\left(\operatorname{Ric}(x)(E,E) - \frac{2}{t}\langle DE, E\rangle + 2\langle \nabla_E \operatorname{grad}\psi(x,y), E\rangle + 2\langle\nabla_E B, E\rangle\right) \\ &- \frac{1}{t}\langle \operatorname{grad} a(x,y), W\rangle + \langle \operatorname{grad}\Delta\psi, W\rangle + 2\langle \operatorname{grad}\langle\operatorname{grad}\psi, B\rangle, W\rangle - \sum_k \|\nabla_{Z_k}W\|^2,\end{aligned}$$

где $E(t,x,y) = \frac{W}{\|W\|}$.

Доказательство. Дифференцируя (1) вдоль некоторого векторного поля $H(t,x,y)$, получим уравнение для $\langle U, H\rangle$:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial U}{\partial t}, H\right\rangle &= \frac{1}{2}\Delta\langle U,H\rangle + \frac{1}{2}\langle\operatorname{grad}\langle U,U\rangle, H\rangle - \sum_k\langle\nabla_{Z_k}U, \nabla_{Z_k}H\rangle - \frac{1}{2}\sum_k\langle U, \nabla^2_{Z_k}H\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\operatorname{Ric}(x)(U,H) - \frac{1}{2}\langle U, \nabla_{\dot\gamma}H\rangle\sum_k\langle Z_k'(\rho), Z_k(\rho)\rangle + \langle\operatorname{grad}\langle U,B\rangle, H\rangle. \quad (5)\end{aligned}$$

Уравнение на $m_0(t,x,y)$ выводится подстановкой m_0 в (1) с учетом уравнения (2) на $q(t,x,y)$, а его дифференцирование вдоль H дает уравнение на $\langle V, H\rangle$:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial V}{\partial t}, H\right\rangle &= \frac{1}{2}\Delta\langle V,H\rangle + \frac{1}{2}\langle\operatorname{grad}\langle V,V\rangle, H\rangle - \sum_k\langle\nabla_{Z_k}V, \nabla_{Z_k}H\rangle - \frac{1}{2}\sum_k\langle V, \nabla^2_{Z_k}H\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\operatorname{Ric}(x)(V,H) - \frac{1}{2}\langle V, \nabla_{\dot\gamma}H\rangle\sum_k\langle Z_k'(\rho), Z_k(\rho)\rangle + \langle\operatorname{grad}\langle V,B\rangle, H\rangle \\ &+ \frac{1}{2t}\langle\operatorname{grad} a(x,y), H\rangle - \frac{1}{2}\langle\operatorname{grad}\Delta\psi, H\rangle - \langle\operatorname{grad}\langle\operatorname{grad}\psi, B\rangle, H\rangle. \quad (6)\end{aligned}$$

Вычитая из (4) уравнение (5) и полагая $H = W$, приходим к искомому уравнению на $\alpha(t,x,y)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha}{\partial t} &= \frac{1}{2}\Delta\alpha + \langle \operatorname{grad}\alpha, U\rangle + \langle \operatorname{grad}\alpha, B\rangle \\ &\quad + \alpha\left(\operatorname{Ric}(x)(E,E) - \frac{2}{t}\langle DE, E\rangle + 2\langle \nabla_E \operatorname{grad}\psi(x,y), E\rangle + 2\langle\nabla_E B, E\rangle\right) \\ &- \frac{1}{t}\langle \operatorname{grad} a(x,y), W\rangle + \langle \operatorname{grad}\Delta\psi, W\rangle + 2\langle \operatorname{grad}\langle\operatorname{grad}\psi, B\rangle, W\rangle - \sum_k \|\nabla_{Z_k}W\|^2.\end{aligned}$$

Теорема 3. *При выполнении условий 1 на многообразии $\mathscr{M}$ и условий 2 на поле сноса $B : \mathscr{M} \to T_x\mathscr{M}$ для $x, y \in \mathscr{M}$, $t \in (0, T]$ справедливо неравенство*

$$\|W(t, x, y)\| \leqslant \mathrm{const},$$

где константа зависит только от размерности.

Оценку получим из дифференциального уравнения на $\alpha = \|W\|^2$, пользуясь принципом максимума [6]. Этот метод был использован в [7].

Лемма 1. *Начальное условие для векторного поля $W(t, x, y)$ определяется выражением*

$$W(0, x, y) = -\frac{1}{2}\operatorname{grad}\phi(x, y).$$

Доказательство. Дифференцируя (3), получим соотношение

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad}\ln p(t, x, y)\\
&\quad= \frac{1}{p(t, x, y)}\Bigg[\widetilde{m}(t, x, y)\left(\frac{\rho(x, y)}{t}e(x, y) + \operatorname{grad}\psi(x, y) - \frac{1}{2}\operatorname{grad}\phi(x, y)\right)\\
&\qquad+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} \left(\frac{\rho(x, z)}{t-\tau}e(x, z) + \operatorname{grad}\psi(x, z) - \frac{1}{2}\operatorname{grad}\phi(x, y)\right)\\
&\qquad\qquad\times \widetilde{m}(t-\tau, x, z)\tilde{r}(\tau, z, y)\sigma(dz)\Bigg].
\end{aligned}$$

Вычитая $\operatorname{grad}_x \ln m_0(t, x, y)$ и подставляя вместо $p(t, x, y)$ его представление (3), приходим к равенству

$$\begin{aligned}
W(t, x, y) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\widetilde{m}(t,x,y)}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} \widetilde{m}(t-\tau, x, z)\tilde{r}(\tau, z, y)\,\sigma(dz)}\\
&\times\Bigg[-\frac{1}{2}\operatorname{grad}\phi(x, y) - \frac{1}{\widetilde{m}(t, x, y)}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} \frac{1}{2}\operatorname{grad}\phi(x, y)\widetilde{m}(t-\tau, x, z)\tilde{r}(\tau, z, y)\sigma(dz)\\
&+ \frac{1}{\widetilde{m}(t, x, y)}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} \left(\frac{\rho(x, z)}{t-\tau}e(x, z) - \frac{\rho(x, y)}{t}e(x, y)\right)\widetilde{m}(t-\tau, x, z)\tilde{r}(\tau, z, y)\,\sigma(dz)\\
&+ \frac{1}{\widetilde{m}(t, x, y)}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} (\operatorname{grad}\psi(x, z) - \operatorname{grad}\psi(x, y))\,\widetilde{m}(t-\tau, x, z)\tilde{r}(\tau, z, y)\sigma(dz)\Bigg].
\end{aligned}$$

Если поле B интегрируемо вместе с первой и второй ковариантными производными, т. е. выполняются условия 2а)–2в), то

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{\widetilde{m}(t, x, y)}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} \widetilde{m}(t-\tau, x, z)\tilde{r}(\tau, z, y)\sigma(dz)\\
&\leqslant \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{e^{-c_0}q(t, x, y)}\int\limits_0^t \tilde{c}e^{\tilde{c}\tau}\,d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} e^{c_0}q(t-\tau, x, z)q(\tau, z, y)\sigma(dz) = e^{2c_0}(e^{\tilde{c}t} - 1) = 0.
\end{aligned}$$

Поскольку $\|\operatorname{grad}\psi\|$ и $\|\operatorname{grad}\phi\|$ ограничены, то

$$W(0,x,y) = -\frac{1}{2}\operatorname{grad}\phi(x,y) + \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{\widetilde{m}(t,x,y)}$$
$$\times\int_0^t d\tau\int_{\mathscr{M}}\left(\frac{\rho(x,z)}{t-\tau}e(x,z) - \frac{\rho(x,y)}{t}e(x,y)\right)\widetilde{m}(t-\tau,x,z)\tilde{r}(\tau,z,y)\sigma(dz).$$

Оценим этот интеграл. Пусть $V\in T_x\mathscr{M}$. Применяя замену

$$U = \sqrt{\frac{t}{\tau(t-\tau)}}\rho(x,z)\,e(x,z) - \sqrt{\frac{t-\tau}{t\tau}}\rho(x,y)\,e(x,y),$$
$$z(U) = \operatorname{Exp}\left[\sqrt{\frac{\tau(t-\tau)}{t}}U + \frac{t-\tau}{t}\,\rho(x,y)\,e(x,y)\right],$$
$$\sigma(dz) = \left(\frac{\tau(t-\tau)}{t}\right)^{n/2}J(z,U)\,dU,$$

где якобиан ограничен, $J(z,U) < c'$, получим

$$\left|\int_{\mathscr{M}}\left\langle\frac{\rho(x,z)}{t-\tau}e(x,z) - \frac{\rho(x,y)}{t}e(x,y),V\right\rangle\widetilde{m}(t-\tau,x,z)\tilde{r}(\tau,z,y)\sigma(dz)\right|$$
$$\leqslant e^{c_0}\tilde{c}e^{\tilde{c}\tau}\int_{\mathscr{M}}\left|\left\langle\frac{\rho(x,z)}{t-\tau}e(x,z) - \frac{\rho(x,y)}{t}e(x,y),V\right\rangle\right|q(t-\tau,x,z)q(\tau,z,y)\sigma(dz)$$
$$\leqslant c'e^{c_0}\tilde{c}e^{\tilde{c}\tau}\sqrt{\frac{\tau}{t(t-\tau)}}q(t,x,y)\int_{T_x\mathscr{M}}|\langle U,V\rangle|\mu_x(dU)$$
$$\leqslant c'e^{c_0}\tilde{c}e^{\tilde{c}\tau}\sqrt{\frac{\tau}{t(t-\tau)}}q(t,x,y)\sqrt{\int_{T_x\mathscr{M}}\langle U,V\rangle^2\mu_x(dU)\int_{T_x\mathscr{M}}\mu_x(dU)}$$
$$= c'e^{c_0}\tilde{c}e^{\tilde{c}\tau}\sqrt{\frac{\tau}{t(t-\tau)}}\|V\|q(t,x,y).$$

Здесь использовано неравенство Коши — Буняковского, а через $\mu_x(dU)$ обозначена стандартная гауссовская мера $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\exp\bigl\{-\frac{\|U\|^2}{2}\bigr\}\,dU$. Интегрируя по $d\tau$, находим оценку

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{\widetilde{m}(t,x,y)}\int_0^t d\tau\int_{\mathscr{M}}\left(\frac{\rho(x,z)}{t-\tau}e(x,z) - \frac{\rho(x,y)}{t}e(x,y)\right)$$
$$\times\,\widetilde{m}(t-\tau,x,z)\tilde{r}(\tau,z,y)\sigma(dz)$$
$$\leqslant \lim_{t\downarrow 0}c'\tilde{c}e^{\tilde{c}t+b_0}\frac{q(t,x,y)}{e^{-c_0}q(t,x,y)}\|V\|\int_0^t\sqrt{\frac{\tau}{t(t-\tau)}}\,d\tau = \lim_{t\downarrow 0}c'\tilde{c}\pi\sqrt{t}e^{\tilde{c}t+2c_0}\|V\| = 0,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *При выполнении условий* 2а)–2в) *справедлива оценка*

$$|\langle \operatorname{grad}\langle \operatorname{grad}\psi, B\rangle, E\rangle| \leqslant c_4.$$

Доказательство. В выражении

$$\langle \operatorname{grad}\langle \operatorname{grad}\psi, B\rangle, E\rangle = \sum_{k=1}^{n}\langle B, e_k\rangle\langle \nabla_E \operatorname{grad}\psi, e_k\rangle + \langle \operatorname{grad}\psi, \nabla_E B\rangle$$
$$\leqslant \|B\|\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\operatorname{grad}\psi, e_k\rangle + \langle \operatorname{grad}\psi, \nabla_E B\rangle$$

второе слагаемое ограничено в силу ограниченности $\|\nabla_E B\|$, вытекающей из условия 2б), и ограниченности $\|\operatorname{grad}\psi\|$. Далее,

$$\langle \nabla_{e_i}\operatorname{grad}\psi, e_k\rangle = -\langle \nabla_{e_i}B, e_k\rangle - \langle \nabla_{e_k}B, e_i\rangle + \langle e_i, \dot\gamma(\rho)\rangle\sum_{k=2}^{n}\langle \nabla_{\dot\gamma(\rho)}B, e_k\rangle$$
$$+\left(\langle e_i, \dot\gamma(\rho)\rangle\sum_{j=2}^{j}\langle Z_j'(\rho), e_k\rangle - \langle e_k, \dot\gamma(\rho)\rangle\sum_{j=2}^{n}\langle Z_i'(\rho), e_j\rangle\right)\int_0^{\rho}(\langle \nabla_{\dot\gamma}B, Z_j\rangle - \langle \nabla_{Z_j}B, \dot\gamma\rangle)\,ds$$
$$-\int_0^{\rho}(\langle \nabla_{\dot\gamma}B, \dot\gamma\rangle\langle Z_i'(s), Z_k(s)\rangle - \langle \nabla_{\dot\gamma}B, H_{ik}(s)\rangle)\,ds$$
$$+\int_0^{\rho}(\langle \nabla_{Z_i}\nabla_{\dot\gamma}B, Z_k\rangle - \langle \nabla_{Z_i}\nabla_{Z_k}B, \dot\gamma\rangle + \langle \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{Z_k}B, Z_i\rangle)\,ds.$$

Из свойств полей Якоби при выполнении условия 1в) вытекает, что $\|Z_k'(s)\|$ ограничено, а следовательно, ограничено и $\langle Z_k'(s), Z_i(s)\rangle$. Пользуясь этой оценкой, а также оценкой для $H_{ik}(s)$, легко показать, что слагаемые $\langle \nabla_{e_i}\operatorname{grad}\psi, e_k\rangle$ тоже ограничены, а значит, $|\langle \operatorname{grad}\langle \operatorname{grad}\psi, B\rangle, E\rangle| \leqslant c_4$, где константа c_4 зависит только от размерности.

Доказательство теоремы. Используя известные неравенства

$$\sqrt{\alpha} < \frac{\varepsilon\alpha}{2} + \frac{1}{2\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,$$
$$\|\operatorname{grad} a(x,y)\| \leqslant c_5, \quad \operatorname{Ric}(x)(E,E) \leqslant c_6, \quad D(x) \geqslant I,$$

вытекающее из условия 2б) неравенство $\|\nabla_E B\| \leqslant c_1$, условие 2г) и лемму 2, приходим к неравенству

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} < \frac{1}{2}\Delta\alpha + \langle \operatorname{grad}\alpha, U\rangle + \langle \operatorname{grad}\alpha, B\rangle$$
$$+\alpha\left(c_6 + 2c_1 + 2c_4 + \frac{\varepsilon(c_3+2c_4)}{2} - \frac{2}{t} + \frac{\varepsilon c_5}{2t}\right) + \frac{c_5}{2\varepsilon t} + \frac{c_3+2c_4}{2\varepsilon}.$$

откуда

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} < \frac{1}{2}\Delta\beta + \langle \operatorname{grad}\beta, B\rangle + \beta\left(c_6 + 2c_1 + 2c_4 + \frac{\varepsilon(c_3+2c_4)}{2} - \frac{2}{t} + \frac{\varepsilon c_5}{2t}\right)$$
$$+\left(\frac{c_5}{2\varepsilon t} + \frac{c_3+2c_4}{2\varepsilon}\right)p$$

для функции $\beta(t,x,y)=\alpha(t,x,y)p(t,x,y)$. Всегда можно найти настолько большое число k, чтобы функция $kp(t,x,y)$ удовлетворяла на некотором интервале $(0,t_0]$ неравенству

$$\frac{\partial(kp)}{\partial t}>\frac{1}{2}\Delta(kp)+\langle\operatorname{grad}(kp),B\rangle+kp\left(c_6+2c_1+2c_4+\frac{\varepsilon(c_3+2c_4)}{2}-\frac{2}{t}+\frac{\varepsilon c_5}{2t}\right)+\left(\frac{c_5}{2\varepsilon t}+\frac{c_3+2c_4}{2\varepsilon}\right)p.$$

Это достигается при выполнении условий

$$k>\max\left\{\frac{c_5^2}{4},\frac{1}{4}\|\operatorname{grad}\phi(x,y)\|^2\right\},$$

$$\frac{2}{c_5}-\sqrt{\frac{4}{c_5^2}-\frac{1}{k}}<\varepsilon<\frac{2}{c_5}+\sqrt{\frac{4}{c_5^2}-\frac{1}{k}},$$

$$t_0\leqslant\frac{2-c_5(\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{2\varepsilon})}{\frac{c_3+2c_4}{2\varepsilon}+k\bigl(c_6+2c_1+2c_4+\frac{\varepsilon(c_3+2c_4)}{2}\bigr)}.$$

Тогда по теореме сравнения [6, с. 72–74] для $x,\ y\in\mathscr{M}$, $0\leqslant t\leqslant t_0$ имеет место оценка $\alpha(t,x,y)<k$.

На интервале $(t_0,T]$ функция $\beta(t,x,y)$ мажорируется функцией

$$\lambda(t,x,y)=\left(e^{A(t-t_0)}\left(\frac{C}{A}+k\right)-\frac{C}{A}\right)p(t,x,y),$$

$\lambda(t_0,x,y)=kp(t_0,x,y)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}<\frac{1}{2}\Delta\lambda+\langle\operatorname{grad}\lambda,B\rangle+\lambda A+Cp,$$

где $A>c_6+2c_1+2c_4+\frac{\varepsilon(c_3+2c_4)}{2}-\frac{2}{t}+\frac{\varepsilon}{2t}c_5$ и $C>\frac{c_5}{2\varepsilon t}+\frac{c_3+2c_4}{2\varepsilon}$.

Полученная верхняя оценка для $\alpha(t,x,y)$ на интервале $(0,T]$ и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бондаренко В. Г.* Оценки ядра теплопроводности на многообразии неположительной кривизны // Укр. мат. журн. 1998. Т. 50, № 8. С. 1129–1136.
2. *Бондаренко В. Г.* Метод параметрикса для параболического уравнения на римановом многообразии // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 11. С. 1443–1448.
3. *Бернацкая Ю. Н.* Оценка фундаментального решения параболического уравнения со сносом на римановом многообразии // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 3. С. 493–512.
4. *Bondarenko V.* Diffusion sur variete de courbure non positive // Comptes Rendus A.S. 1997. V. 324, N 10. P. 1099–1103.
5. *Бондаренко В. Г.* Ковариантные производные полей Якоби на многообразии неположительной кривизны // Укр. мат. журн. 1998. Т. 50, № 6. С. 755–764.
6. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
7. *Бондаренко В. Г.* Логарифмический градиент ядра теплопроводности на римановом многообразии // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 3. С. 471–475.

Статья поступила 11 апреля 2003 г.

Бернацкая Юлия Николаевна
Институт прикладного системного анализа при Национальном техническом университете Украины «Киевский политехнический институт»,
пр. Победы, 37, корпус 14, к. 43, Киев 03056, Украина
jnb@ukma.kiev.ua