Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 510.51

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОДМНОЖЕСТВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ПРИ ПОМОЩИ ВЫЧИСЛИМЫХ ПЕРЕСТАНОВОК

Э. Ф. Комбарро

Аннотация: Вводятся различные определения для понятия вычислимого автоморфизма множества натуральных чисел. Изучаются соотношения между ними и соотношения между классами традиционно изучаемых в теории вычислимости множеств и их группами автоморфизмов. Показана нетривиальность классификации множеств посредством групп их автоморфизмов.

Ключевые слова: вычислимая перестановка, автоморфизм, перечислимое множество, рекурсивное множество, вычислимое множество.

§ 1. Введение

Множества натуральных чисел изучались с разных точек зрения, включая алгебраическую, теоретико-множественную, топологическую и теоретико-рекурсивную. В каждом из этих случаев была предложена классификация множеств натуральных чисел по некоторым критериям.

Например, в [1, 2] для изучения вычислимо-перечислимых множеств были применены методы теории групп и теории вычислимости. В этих работах вводится определение вычислимого автоморфизма множества натуральных чисел и изучаются вычислимо-перечислимые множества, дополнение которых имеет только конечное число вычислимых автоморфизмов.

В этой работе мы расширим указанное исследование за пределы класса вычислимо-перечислимых множеств, рассмотрев некоторые популярные с точки зрения вычислимости классы множеств. Мы также предложим некоторые альтернативные определения понятия вычислимой перестановки на множестве и изучим соотношения между ними.

Настоящая работа организована следующим образом. В § 2 мы изучим некоторые определения вычислимых автоморфизмов, в § 3 исследуем соотношения между этими новыми понятиями и некоторыми классическими семействами множеств натуральных чисел. Наконец, в § 4 мы докажем результат, который можно истолковать как свидетельство нетривиальности предлагаемой нами классификации множеств натуральных чисел.

Сначала введем одно понятие, используемое на протяжении всей статьи.

1.1. Обозначения. Пусть A — множество. Группа его перестановок (см., например, [3]) будет обозначаться символом $\mathrm{Symm}\, A$. Мощность множества A будет обозначаться через $|A|$.

Если f — функция, то ее области определения и значений будут обозначаться соответственно через $\mathrm{Dom}\, f$ и $\mathrm{Rg}\, f$, ее носитель, т. е. множество неподвижных элементов, — через $\mathrm{Supp}\, f$, ограничение функции f на подмножество A ее области определения — через $f|_A$.

Множество натуральных чисел (включающее 0) будет обозначаться через ω, как и первый бесконечный ординал, n-я вычислимая функция (см. [4]) — через φ_n, а ее область определения — через W_n. Мы используем для конечных множеств *канонические индексы*, т. е.

$$D_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\},$$

где $n = 2^{x_0} + 2^{x_1} + \cdots + 2^{x_m}$.

Наконец, $\mathrm{Symm}_r\, \omega$ — группа всех всюду определенных вычислимых взаимно однозначных отображений «на».

§ 2. Группа всех вычислимых автоморфизмов множества

В этом параграфе введем и изучим естественные определения вычислимых автоморфизмов (перестановок) множеств натуральных чисел. Мы также изучим некоторые ослабления этих понятий и их связи между собой.

2.1. Определения. В [1] дано следующее

Определение 1. Группа вычислимых перестановок множества A — это $\mathrm{Aut}_r^t\, A = \{f \in \mathrm{Symm}\, A$: существует вычислимая перестановка g такая, что $f \subseteq g\}$.

Мы дадим альтернативное определение, которое представляется нам также весьма естественным, но менее ограничительным. В последующих параграфах мы покажем, что, несмотря на несовпадение этих определений, они оба годятся для наших целей, а именно для классификации множеств натуральных чисел.

Определение 2. Группа вычислимых перестановок множества A — это $\mathrm{Aut}_r\, A = \{f \in \mathrm{Symm}\, A$: существует 1-1 вычислимая функция g такая, что $f \subseteq g\}$.

В обоих случаях будем говорить, что функция g *индуцирует* автоморфизм f или что f *индуцирован* функцией g.

Следующее утверждение указывает некоторое тривиальное соотношение между этими двумя понятиями.

Предложение 1. *Для каждого множества A натуральных чисел выполнено*

$$\mathrm{Aut}_r^t\, A \leq \mathrm{Aut}_r\, A.$$

Будем говорить, что группа вычислимых автоморфизмов множества A (в смысле $\mathrm{Aut}_r\, A$ или $\mathrm{Aut}_r^t\, A$) *тривиальна*, если она содержит только множества с конечным носителем.

2.2. Ослабление определений. По поводу определений, приведенных в предыдущем параграфе, возникает естественный вопрос о том, насколько можно ослабить условие на функции, индуцирующие автоморфизмы.

Главными из этих условий являются сюръективность и разнозначность. Далее мы изучим последствия ослаблений этих условий. Мы увидим, что возможно отказаться от сюръективности и иногда от разнозначности (если мы знаем, что обратная к перестановке есть ограничение похожей функции).

Начнем со следующего определения вычислимого автоморфизма.

Предложение 2. *Пусть A — подмножество натуральных чисел. Пусть f принадлежит* $\operatorname{Symm} A$. *Если существуют вычислимые функции g и h такие, что $g|_A = f$ и $h|_A = f^{-1}$, то существует и вычислимая разнозначная функция p такая, что $p|_A = f$.*

Доказательство. Рассмотрим вычислимо перечислимое множество $B = \{x \in \operatorname{Dom} h : g(h(x)) = x\}$.

Ввиду перечислимости множества $h(B)$ функция $p = g|_{h(B)}$ разнозначна и вычислима. Остается показать, что $A \subseteq h(B)$.

Очевидно, что

$$g|_A \cdot h|_A = h|_A \cdot g|_A = \operatorname{id}|_A.$$

Предположим, что $x \in A$. Рассмотрим $y = f(x) = g(x)$. Тогда $x = f^{-1}(y) = h(y)$ и $g(h(y)) = g(x) = y$, откуда $y \in B$. □

Этот результат показывает, что полученные группы совпадают независимо от того, требуем ли мы разнозначность для индуцирующих функций или нет. Сформулируем результат более формально.

Следствие 1. *Если множество*

$$G = \{f \in \operatorname{Symm} A : \text{ существует вычислимая функция } g \text{ такая, что } f \subseteq g\}$$

образует группу, то $G = \operatorname{Aut}_r A$.

Следующее предложение, однако, показывает, что вышеуказанное множество не всегда замкнуто относительно взятия обратных элементов.

Предложение 3. *Существуют множество A и перестановка $f \in \operatorname{Symm} A$ такие, что существует всюду определенная вычислимая функция g, удовлетворяющая условию $g|_A = f$, но не существует вычислимой функции h такой, что $h|_A = f^{-1}$.*

Доказательство. Рассмотрим эффективное кодирование элементов из ω парами целых чисел. Более точно, пусть каждое натуральное число x имеет вид $a_{i,j}$, при этом i и j вычисляются по x, и наоборот.

Определим g следующим образом:

$$g(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i+1,j/2}, & \text{если } j \text{ четно,} \\ a_{i+1,(j-1)/2} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что g всюду определено и вычислимо. Определим A при помощи пошаговой конструкции.

Шаг 0. Пусть $A = \{a_{i,0} : i \in \omega\}$.

Шаг $t+1$. Если $a_{-t,n} \in A$, то в случае $n \in K$ добавим $a_{-t-1,2n+1}$ к A; в противном случае добавим $a_{-t-1,2n}$ к A. Тогда g разнозначна на A и $g(A) = A$, и мы можем положить $f = g|_A$. Теперь предположим, что существует вычислимая функция h такая, что $h|_A = f^{-1}$. Мы можем эффективно отвечать на вопрос о принадлежности n множеству K следующим образом. Вычисляем $h^{n+1}(a_{0,0}) = a_{-n-1,m}$. Элемент n принадлежит множеству K тогда и только тогда, когда m нечетно. Однако мы знаем, что это невозможно, поскольку K не вычислимо (см. [5]), откуда и следует результат. □

Рассмотрим теперь определение, предложенное А. С. Морозовым. При этом мы получим сходные результаты, но у нас будет больше условий для ослабления.

Сначала покажем, что можно отказаться от сюръективности.

Предложение 4. *Пусть A — подмножество натуральных чисел. Предположим, что f принадлежит $\operatorname{Symm} A$. Если существуют вычислимые всюду определенные разнозначные g и h такие, что $g|_A = f$ и $h|_A = f^{-1}$, то существует вычислимая перестановка p такая, что $p|_A = f$.*

Доказательство. Рассмотрим рекурсивные множества

$$C = \{x \in \omega : g(h(x)) = x\} \subseteq \operatorname{Rg} g, \quad D = \{x \in \omega : h(g(x)) = x\} \subseteq \operatorname{Rg} h.$$

Ясно, что $A \subseteq C$ и $A \subseteq D$. Более того, поскольку g разнозначна, имеем

$$g(x) \in C \iff g(h(g(x))) = g(x) \iff h(g(x)) = x \iff x \in D,$$

откуда $g(D) = C$ и $g(\overline{D}) \subseteq \overline{C}$. Далее, $|\overline{D}| = |g(\overline{D})| \leq |\overline{C}|$. Аналогично $|\overline{C}| = |h(\overline{C})| \leq |\overline{D}|$ и тем самым $|\overline{C}| = |\overline{D}|$.

Поскольку C и D вычислимы, существует вычислимая перестановка q такая, что $q(\overline{D}) = \overline{C}$. Рассмотрим

$$p(x) = \begin{cases} q(x), & \text{если } x \notin D, \\ g(x), & \text{если } x \in D. \end{cases}$$

Очевидно, что p — вычислимая перестановка, и результат следует из того, что $A \subseteq D$. $\square$

Мы можем также рассмотреть и неразнозначные функции, если известно, что обратные к ним являются ограничениями вычислимых функций.

Предложение 5. *Пусть A — подмножество натуральных чисел, и пусть f — перестановка на A. Предположим, что существуют всюду определенные вычислимые функции g и h такие, что $g|_A = f$ и $h|_A = f^{-1}$. Тогда существуют вычислимые всюду определенные разнозначные функции g' и h' такие, что $g'|_A = f$ и $h'|_A = f^{-1}$.*

Доказательство. Ввиду симметричности ситуации достаточно показать существование функции g'.

Рассмотрим множество $B = \{x \in \operatorname{Dom} h : g(h(x)) = x\}$, которое, очевидно, вычислимо и содержит A как подмножество.

Функция g разнозначна на B. Попытаемся расширить ее вне множества B. Рассмотрим два случая. Сначала предположим, что $\overline{A}$ иммунно (определение см. в [4]). Тогда $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ и, поскольку B вычислимо, $\overline{B}$ должно быть конечным (ввиду того, что $\overline{A}$ не имеет бесконечных вычислимых подмножеств).

Если $|\overline{g(B)}| \geq |\overline{B}|$, то функция g легко расширяется до g'. Докажем, что неравенство $|\overline{g(B)}| < |\overline{B}|$ невозможно. Предположим, что это не так. Рассмотрим всюду определенную вычислимую сюръективную функцию p, совпадающую с g на B и отображающую как минимум один элемент из $\overline{B}$ в элемент множества A. Такая функция существует, поскольку множество $\overline{B}$ конечно, g вычислима, и мы предположили, что $|\overline{g(B)}| < |\overline{B}|$.

Пусть x — элемент множества $\overline{B}$ со свойством $p(x) \in A$. Поскольку $A = f(A) = g(A)$, существует $z \in A$ такой, что $g(z) = p(z) = p(x)$. Так как p сюръективно, существует x_1 такое, что $p(x_1) = x$. Очевидно, что x_1 не принадлежит A, ибо $p(A) = g(A) = A$ и x не принадлежит A. Итерируя этот процесс, получим последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ элементов из $\overline{A}$, где $x_0 = x$ и $p(x_{i+1}) = x_i$. Эта последовательность не содержит повторений, иначе существуют $i < j$ такие, что $x_i = x_j$, и тогда

$$x = x_0 = p(x_1) = p^2(x_2) = \cdots = p^i(x_i) = p^i(x_j) = x_{j-i}.$$

Но $p(x) \in A$ и $p(x_{j-i}) = x_{j-i-1} \notin A$, поскольку $j > i$. Значит, последовательность бесконечна, и мы нашли бесконечное вычислимо перечислимое множество, содержащееся в $\overline{A}$, что невозможно.

Теперь рассмотрим случай не иммунного множества $\overline{A}$. Тогда существует бесконечное вычислимо перечислимое множество $C \subseteq \overline{A}$. Если $C \cap g(B)$ конечно, то $C \cap \overline{g(B)}$ бесконечно и вычислимо перечислимо, и мы можем отобразить $\overline{B}$ в его бесконечное вычислимое подмножество. Предположим теперь, что $C \cap g(B)$ бесконечно. Тогда $C \cap g(B)$ вычислимо перечислимо (и таковы же оба множества C и $g(B)$) и существует бесконечное вычислимое множество $D \subseteq C \cap g(B)$. Пусть D_1 и D_2 дают разбиение D на бесконечные вычислимые подмножества. Рассмотрим всюду определенную вычислимую разнозначную функцию z_1 такую, что

$$\begin{cases} z_1(x) = x, & \text{если } x \notin D, \\ z_1(x) \in D_1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и всюду определенную вычислимую разнозначную функцию z_2 такую, что $\operatorname{Rg} z_2 \subseteq D_2$. Определим

$$p(x) = \begin{cases} z_1(g(x)), & \text{если } x \in B, \\ z_2(x) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что p разнозначна, всюду определена и вычислима и что $p|_A = g|_A$, поскольку $D \subseteq C \subseteq \overline{A}$. $\square$

Конечно, предложение 3 показывает, что существование функции h в сформулированном выше предложении не выводится из существования g. Если мы рассмотрим всюду определенные функции, то справедлив следующий в некотором смысле более сильный результат.

Предложение 6. *Существуют вычислимо перечислимое множество A и функция $f \in \operatorname{Symm} A$ такие, что найдется всюду определенная вычислимая разнозначная функция g такая, что $g|_A = f$, но нет всюду определенной вычислимой функции h такой, что $h|_A = f^{-1}$.*

Доказательство. Рассмотрим вычислимо перечислимое невычислимое множество B. Мы знаем, что существует бесконечное вычислимое подмножество $C \subseteq B$ (см. [5]). Строим g по шагам.

Шаг $2t$. Пусть x — наименьший элемент, еще не попавший в $\operatorname{Dom} g$. Возьмем c из C, которое еще не попало ни в $\operatorname{Dom} g$, ни в $\operatorname{Rg} g$. Пусть $g(x) = c$.

Шаг $2t+1$. Перечисляем элементы из B, пока не найдем y, которое еще не попало в $\operatorname{Rg} g$. Рассмотрим два случая.

1. Если y еще не содержится в $\operatorname{Dom} g$, то полагаем $g(y) = y$.

2. Если y уже попало в $\operatorname{Dom} g$, то ввиду способа построения g существуют $x_1, \ldots, x_n$ такие, что $g(y) = x_1$, $g(x_i) = x_{i+1}$ для $i = 1, \ldots, n-1$ и x_n не принадлежит $\operatorname{Dom} g$. Полагаем $g(x_n) = y$.

Ясно, что g всюду определена, вычислима, разнозначна и $\operatorname{Rg} g = B$. Более того, из конструкции следует, что если x принадлежит B, но не принадлежит C, то оно содержится в конечном цикле g.

Рассмотрим $A = \{x \in \omega : \text{существует } n \geq 1 \text{ такой, что } g^n(x) = x\}$, т. е. множество конечных циклов g. Ясно, что A вычислимо перечислимо и что $A \subseteq \operatorname{Rg} g = B$. Справедливо также равенство $g(A) = A$. Теперь, поскольку g разнозначна, мы можем положить $f = g|_A$. Это, очевидно, перестановка на A.

Предположим, что существует всюду определенная вычислимая h такая, что $h|_A = f^{-1}$. Рассмотрим

$$D = \{x \in \omega : g(h(x)) = x\} \subseteq \operatorname{Rg} g = B.$$

Это множество, очевидно, вычислимо.

Ясно, что $A \subseteq D$, и нам известно, что $B \setminus C \subseteq A \subseteq D$. Тогда

$$B = C \cup (B \setminus C) \subseteq C \cup D \subseteq B$$

и мы имеем $B = C \cup D$, откуда следует рекурсивность B; противоречие, из которого следует результат. $\square$

§ 3. Классификация множеств

В этом параграфе мы изучаем отношения между определениями из § 2 и некоторыми хорошо известными классами натуральных чисел (определения можно найти в [4]). Особый интерес представляет вопрос об определении принадлежности множества данному классу по группе его вычислимых автоморфизмов.

Мы будем пытаться ответить на два следующих вопроса для каждого класса $\mathscr{C}$.

1. Верно ли, что любые две группы вычислимых автоморфизмов для элементов класса $\mathscr{C}$ изоморфны?

2. Замкнут ли класс $\mathscr{C}$ относительно взятия множеств с изоморфными группами вычислимых автоморфизмов?

В настоящей работе мы сначала изучим данные вопросы для групп вычислимых автоморфизмов, понимаемых как $\operatorname{Aut}_r A$, а потом как $\operatorname{Aut}_r^t A$.

3.1. Классификация множеств A по группам $\operatorname{Aut}_r A$. В этом случае вышеупомянутые вопросы переформулируются следующим образом.

1. Если $A, B \in \mathscr{C}$, верно ли, что $\operatorname{Aut}_r A \cong \operatorname{Aut}_r B$?

2. Если $A \in \mathscr{C}$ и $\operatorname{Aut}_r A \cong \operatorname{Aut}_r B$, верно ли, что $B \in \mathscr{C}$?

В табл. 1 собраны ответы для изучаемых классов множеств. Заметим, что один из ответов неизвестен. Дальнейшее содержание параграфа состоит из обоснования табл 1.

Очередное утверждение отвечает на первый вопрос для сжатых множеств.

Предложение 7. *Если A сжато, то группа $\operatorname{Aut}_r A$ тривиальна.*

Доказательство. Предположим, что некоторая функция f из $\operatorname{Aut}_r A$ передвигает бесконечное число элементов. Пусть g — вычислимая функция такая, что $f \subseteq g$. Рассмотрим два случая.

1. Если существует $x \in A$ такой, что $f^n(x) \neq x$ для каждого $n > 1$, то определим $C = \{g^n(x) : n \in \omega\}$. Ясно, что C — вычислимо перечислимое бесконечное подмножество в A. Но A сжато и поэтому иммунно. Получили противоречие.

2. Если для всех $x \in A$ существует n такое, что $f^n(x) = x$, то определим

$$B = \{x \in \omega : g(x) = x\}.$$

Это множество, очевидно, вычислимо перечислимо.

Мы знаем, что f передвигает бесконечное число элементов из A. Поэтому $\overline{B} \cap A$ бесконечно и отсюда ввиду того, что A сжато, получим, что $B \cap A$ конечно. Тогда A содержит бесконечное число конечных циклов f.

Таблица 1. Классификация с помощью групп Aut_r

Класс множеств	**Вопрос 1**	**Вопрос 2**
р.п.	Да	Да
ко-р.п.	Нет	Нет
сжатые	Да	Нет
иммунные	Нет	Да
гипериммунные	Нет	Нет
гипергипериммунные	Нет	Нет
копростые	Нет	Нет
когиперпростые	Нет	Нет
когипергиперпростые	Нет	Нет
арифметические	Нет	Нет
продуктивные	Нет	?

Рассмотрим вычислимо перечислимые множества $D_1 = \{x \in \omega : g(x) > x\}$, $D_2 = \{x \in \omega : g(x) < x\}$.

Ясно, что каждый цикл f с двумя и более элементами имеет непустое пересечение с D_1 и D_2. Тогда $A \cap D_1$ и $A \cap D_2$ бесконечны и получаем противоречие, поскольку $D_1 \subseteq \overline{D_2}$ и A сжато. $\square$

Теперь покажем, что ответ на вопрос 2 будет отрицательным в случае гипериммунных, гипергипериммунных и сжатых множеств.

Предложение 8. *Существует бесконечное не гипериммунное множество A, для которого группа $\mathrm{Aut}_r A$ тривиальна.*

Доказательство. Пусть g будет всюду определенной вычислимой функцией, удовлетворяющей следующим условиям.

- Если $x \neq y$, то $D_{g(x)} \cap D_{g(y)} = \varnothing$.
- Для любого x справедливо $|D_{g(x)}| = 3x + 1$.

Пусть $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ — перечисление без повторений всех вычислимых разнозначных функций с бесконечным носителем.

Определим множество A по шагам. На каждом шаге n будем определять множество A_n и в конце концов определим $A = \bigcup\limits_{n \in \omega} A_n$.

Шаг 0. Положим $A_0 = \varnothing$.

Шаг $n+1$. Выберем $x \in D_{g(n)}$ так, чтобы не существовало запрета на вхождение x в A, и так, чтобы $x \notin A_n$. Теперь выберем y из $\mathrm{Supp}\, f_n$, для которого не существует запрета на вхождение в A и $f_n(y) \notin A_n \cup \{x\}$. Положим

$$A_{n+1} = A_n \cup \{x, y\}$$

и наложим запрет на вхождение $f_n(y)$ в A.

Ясно, что описанный выше процесс осуществим, поскольку $|A_n| \leq 2n$, число запретов на шаге n равно n и у нас имеется для выбора $3n+1$ из $D_{g(n)}$. Более того, носитель f_n бесконечен, и сама функция разнозначна.

Множество A не гипериммунно, так как оно пересекается с массивом из попарно не пересекающихся множеств $\{D_{g(n)}\}_{n\in\omega}$. Кроме того, A имеет только нетривиальные автоморфизмы, ибо для каждой вычислимой разнозначной функции f найдется $x \in A$ такой, что $f(x) \notin A$. Отсюда получаем, что A обладает требуемыми свойствами. $\square$

Следующее предложение дает решение вопроса 1 для гипергипериммунных, гипериммунных и иммунных множеств.

Предложение 9. *Существует гипергипериммунное множество A такое, что $\mathrm{Aut}_r A$ не является тривиальным.*

Доказательство. В [1] доказано существование гипергипериммунного множества A, для которого группа $\mathrm{Aut}_r^t A$ нетривиальна. Результат следует из предложения 1. $\square$

Дадим теперь ответ на вопрос 2 для иммунных множеств.

Предложение 10. *Если A иммунно и B — бесконечное множество, для которого $\mathrm{Aut}_r A \cong \mathrm{Aut}_r B$, то B тоже иммунно.*

Доказательство. Известно, что из изоморфности групп автоморфизмов следует (см. [6, 7]; краткое доказательство можно найти в [8])

$$\langle \mathrm{Aut}_r A, A, app\rangle \cong \langle \mathrm{Aut}_r B, B, app\rangle,$$

где app — операция применения функции к элементу, т. е.

$$app : \mathrm{Aut}_r A \times A \longrightarrow A, \quad (f, a) \longmapsto f(a).$$

Мы знаем, что в A не существует вычислимо перечислимого подмножества такого, что для каждого его автоморфизма f и для всех x из A существует n такое, что $f^n(x) = x$ (если нет, то по f и x можно эффективно перечислить бесконечное подмножество A).

То же самое справедливо и для B, т. е. оно не имеет вычислимого подмножества. Это следует из вышеупомянутого изоморфизма. $\square$

Следствие 2. *Если A — бесконечное множество и группа $\mathrm{Aut}_r A$ тривиальна, то A иммунно.*

Доказательство. Это непосредственно следует из предложений 7, 10 и существования сжатого множества (каждое сжатое множество иммунно), поскольку все тривиальные группы автоморфизмов бесконечных множеств, очевидно, изоморфны. $\square$

Теперь обратимся к вычислимо перечислимым множествам.

Предложение 11. *Если A вычислимо перечислимо и бесконечно, то $\mathrm{Aut}_r A \cong \mathrm{Symm}_r\, \omega$.*

Доказательство. Пусть f — всюду определенная разнозначная вычислимая функция такая, что $\mathrm{Rg}\, f = A$. Тогда $h = f^{-1}$ — разнозначная (частичная) вычислимая функция и $\mathrm{Rg}\, h = \omega$.

Рассмотрим функцию

$$\bar{h} : \mathrm{Aut}_r A \longrightarrow \mathrm{Symm}_r\, \omega, \quad p \longmapsto h \cdot p \cdot f,$$

которая, очевидно, является мономорфизмом (она корректно определена, поскольку p индуцировано разнозначной вычислимой функцией). Более того, если q — вычислимая перестановка на ω, то $m = f \cdot q \cdot h$ принадлежит $\mathrm{Aut}_r A$ и $\bar{h}(m) = q$, откуда $\bar{h}$ — отображение «на». $\square$

Предложение 12. *Пусть A — бесконечное вычислимо перечислимое множество и B — бесконечное множество такое, что $\mathrm{Aut}_r A \cong \mathrm{Aut}_r B$. Тогда B также является вычислимо перечислимым.*

Доказательство. Из предложения 11 известно, что $\mathrm{Aut}_r B \cong \mathrm{Symm}_r \omega$. Более того, из доказательства предложения 10 мы знаем, что

$$\langle \mathrm{Aut}_r B, B, app\rangle \cong \langle \mathrm{Symm}_r \omega, \omega, app\rangle.$$

Рассмотрим f из $\mathrm{Symm}_r \omega$, состоящую в точности из одного бесконечного цикла. Из вышеупомянутого изоморфизма следует существование $g \in \mathrm{Aut}_r B$, состоящего в точности из одного бесконечного цикла. Тогда существует разнозначная вычислимая функция h такая, что $g = h_{|B}$, и если b — элемент B, то B равно множеству $\{h^z(b) : z \in \mathscr{Z}\}$, которое вычислимо перечислимо. $\square$

В следующих двух результатах мы изучаем арифметические множества.

Предложение 13. *Существует неарифметическое множество A такое, что группа $\mathrm{Aut}_r A$ тривиальна.*

Доказательство. Пусть $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ — перечисление без повторений всех бесконечных арифметических множеств, и пусть $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ — перечисление без повторений всех вычислимых разнозначных функций с бесконечными носителями.

Определим множества A_n по шагам.

Шаг 0. Пусть $A_0 = \varnothing$.

Шаг $n+1$. Выберем $x \in \mathrm{Supp}\, f_n$ таким образом, чтобы не существовало запрета на вхождение x в A и чтобы $f_n(x)$ не содержалось в A_n. Это возможно ввиду конечности A_n, и на этом шаге существует лишь конечное число запретов. Положим $A_{n+1} = A_n \cup \{x\}$ и создадим запрет на вхождение $f_n(x)$ в A. Выберем также некоторое z из $B_n \setminus A_{n+1}$ и наложим запрет на вхождение этого элемента в A.

Теперь если мы положим $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$, то A будет неарифметическим, поскольку оно отличается от всех бесконечных арифметических множеств и само бесконечно. Кроме того, ни одна разнозначная вычислимая функция с бесконечным носителем не индуцирует автоморфизма множества A. $\square$

Предложение 14. *Существует неарифметическое множество, для которого группа $\mathrm{Aut}_r A$ не является тривиальной.*

Доказательство. Пусть B — произвольное неарифметическое множество. Рассмотрим

$$A = B \oplus B = \{2x : x \in B\} \cup \{2x+1 : x \in B\};$$

это множество не арифметическое и имеет автоморфизмы с бесконечным носителем, например, индуцируемые функцией

$$f(x) = \begin{cases} 2y, & \text{если } x = 2y+1, \\ 2y+1, & \text{если } x = 2y. \end{cases} \qquad \square$$

Перед тем как ответить на вопрос для продуктивных множеств, дадим определение и докажем несколько лемм.

Определение 3. Пусть A — некоторое множество натуральных чисел. Определим его *домен* $\mathrm{Dom}\, A = \{n \in A : W_n \subseteq A\}$, где W_n обозначает n-е вычислимо перечислимое множество.

Лемма 1. *Множество* $\operatorname{Dom}\overline{K}$ *является подмножеством* $\overline{K}$.

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{Dom}\overline{K}$. Тогда $W_x \subseteq \overline{K}$. Если $x \in K$, то $x \in W_x \subseteq \overline{K}$, что невозможно. $\square$

Лемма 2. *Множество* $\overline{K} \setminus \operatorname{Dom}\overline{K}$ *бесконечно.*

Доказательство. Теорема о рекурсии дает нам бесконечное множество натуральных чисел x таких, что $W_x = \overline{\{x\}}$. Все эти числа, очевидно, принадлежат $\overline{K}$, но не принадлежат $W_x \not\subseteq \overline{K}$. $\square$

Лемма 3. *Если* $\operatorname{Dom}\overline{K} \subseteq A \subseteq \overline{K}$, *то множество* A *продуктивно.*

Доказательство. Пусть $W_x \subseteq A$. Тогда $W_x \subseteq \overline{K}$, откуда $x \in \operatorname{Dom}\overline{K}$. Если $x \in W_x$, то $x \in K$; противоречие. Тем самым $x \in (\operatorname{Dom}\overline{K} \setminus W_x) \subseteq (A \setminus W_x)$ и тождественная функция является продуктивной для A. $\square$

Лемма 4. *Существует автоморфизм* $f \in \operatorname{Aut}_r \overline{K}$ *такой, что для всех* $x \in \overline{K}$ *выполнено* $f(x) \neq x$.

Доказательство. Рассмотрим множество $\overline{K} \oplus \overline{K}$, которое, очевидно, m-эквивалентно $\overline{K}$. Тогда оно 1-эквивалентно множеству $\overline{K}$, откуда следует изоморфизм их групп. Но очевидно, что $\overline{K} \oplus \overline{K}$ имеет требуемый автоморфизм (см. доказательство предложения 14). $\square$

Наконец, докажем

Предложение 15. *Существует продуктивное множество* A *такое, что* $\operatorname{Aut}_r A \not\cong \operatorname{Aut}_r \overline{K}$.

Построим продуктивное множество A так, чтобы для любой функции $f \in \operatorname{Aut}_r A$ существовало x такое, что $f(x) = x$ (см. лемму 4).

Пусть $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ — перечисление без повторений всех вычислимых функций таких, что

- $\operatorname{Dom}\overline{K} \subseteq \operatorname{Dom} f_n$,
- f_n разнозначна,
- множество $\operatorname{Supp} f_n \setminus \operatorname{Dom}\overline{K}$ бесконечно.

Построим A по шагам.

Шаг 0. Полагаем $A_0 = \operatorname{Dom}\overline{K}$.

Шаг $n+1$. Рассмотрим несколько случаев.

Если существует $x \in \operatorname{Supp} f_n \setminus A_n$ такое, что $f_n(x) \in A_n$, то запретим x входить в A и выберем y из $\overline{K} \setminus (A_n \cup \{x\})$ так, чтобы не существовало запрета на вхождение y в A. Это возможно, поскольку по лемме 2 последнее множество бесконечно и число запретов на этом шаге тоже конечно. Положим $A_{n+1} = A_n \cup \{y\}$.

Если это не выполнено, то для каждого $x \in \operatorname{Supp} f_n \setminus A_n$ число $f_n(x)$ не принадлежит A_n. Здесь имеются две возможности.

Если найдется $x \in (\operatorname{Supp} f_n \setminus A_n) \cap \overline{K}$ такое, что не существует запрета на вхождение x в A, то запретим $f_n(x)$ входить в A и положим $A_{n+1} = A_n \cup \{x\}$.

В противном случае каждому x из $(\operatorname{Supp} f_n \setminus A_n) \cap \overline{K}$ запрещено входить в A и поэтому ввиду конечности числа таких запретов множество $(\operatorname{Supp} f_n \setminus A_n) \cap \overline{K}$ также конечно. Тогда мы можем выбрать x из бесконечного множества $\overline{K} \setminus A_n$, которому не запрещено входить в A и которое не принадлежит $\operatorname{Supp} f_n$. Положим $A_{n+1} = A_n \cup \{x\}$.

Наконец, положим $A = \bigcup\limits_{n \in \omega} A_n$. Очевидно, будут выполнены следующие условия:

Таблица 2. Классификация по группам Aut_r^t

Класс множеств	**Вопрос 1**	**Вопрос 2**
бесконечные рекурсивные	Да	Да
р.п.	Нет	Нет
ко-р.п.	Нет	Нет
сжатые	Да	Нет
иммунные	Нет	Да
гипериммунные	Нет	Нет
гипергипериммунные	Нет	Нет
копростые	Нет	Нет
когиперпростые	Нет	Нет
когипергиперпростые	Нет	Нет
арифметические	Нет	Нет
продуктивные	Нет	?

1) $\mathrm{Dom}\,\overline{K} \subseteq A \subseteq \overline{K}$,

2) $A \setminus \mathrm{Dom}\,\overline{K}$ бесконечно,

и из леммы 3 получается, что A продуктивно.

Теперь предположим, что $f \in \mathrm{Aut}_r\, A$ и для каждого $x \in A$ выполнено $f(x) \neq x$. Пусть g — некоторая разнозначная вычислимая функция такая, что $g|_A = f$. Тогда $\mathrm{Supp}\, g \supseteq A$, $\mathrm{Supp}\, g \setminus \mathrm{Dom}\,\overline{K} \supseteq A \setminus \mathrm{Dom}\,\overline{K}$ и последнее множество бесконечно. Найдется n такое, что $f_n = g$, и на шаге $n+1$ либо f_n не индуцирует автоморфизма A, либо мы обеспечим $x \in A \setminus \mathrm{Supp}\, f_n$ (откуда $A \not\subseteq \mathrm{Supp}\, g$). Результат следует из противоречия. □

3.2. Классификация множеств A по $\mathrm{Aut}_r^t\, A$. Если мы будем считать Aut_r^t группой вычислимых автоморфизмов, то наши вопросы будут звучать следующим образом.

1. Если $A, B \in \mathscr{C}$, то верно ли, что $\mathrm{Aut}_r^t\, A \cong \mathrm{Aut}_r^t\, B$?
2. Если $A \in \mathscr{C}$ и $\mathrm{Aut}_r^t\, A \cong \mathrm{Aut}_r^t\, B$, то верно ли, что $B \in \mathscr{C}$?

Большинство результатов из п. 3.1 получаются непосредственно. Эти результаты представлены в табл. 2.

Главное отличие данной ситуации состоит в том, что теперь мы не в состоянии распознавать вычислимо перечислимые множества (за исключением вычислимых множеств), что показано в следующих ниже предложениях.

Предложение 16. *Существует вычислимо перечислимое множество A такое, что $\mathrm{Aut}_r^t\, A$ не изоморфно $\mathrm{Symm}_r\, \omega$.*

Доказательство. В [2] доказано, что в каждой ненулевой вычислимо перечислимой тьюринговой степени существует вычислимо перечислимое множество, дополнение которого имеет тривиальную группу вычислимых автоморфизмов. Такие множества названы *специальными*. Рассмотрим специальное множество A. Такие множества вычислимо перечислимы, но не вычислимы. Если группа $\mathrm{Aut}_r^t A$ изоморфна $\mathrm{Symm}_r\,\omega$, то существует $f \in \mathrm{Aut}_r^t A$ такой, что $f(x) \neq x$ для каждого x из A. Это означает, что существует вычислимая перестановка g такая, что $g|_A = f$. Следовательно, $g(x) \neq x$ для всех x из A. Но A специальное, поэтому число элементов y из дополнения A таких, что $g(y) \neq y$, должно быть конечным. Значит, A вычислимо, поскольку оно равно вычислимому множеству без конечного числа элементов; противоречие. □

Предложение 17. *Если A — бесконечное вычислимое множество, то группа $\mathrm{Aut}_r^t A$ изоморфна группе $\mathrm{Symm}_r\,\omega$.*

Доказательство. В доказательстве предложения 11 остается доказать, что $\bar{h}$ является отображением «на». В целом доказательство не проходит, поскольку p должно индуцироваться перестановкой. Если q — вычислимая перестановка, то рассмотрим

$$m(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \notin A, \\ f(q(h(x))), & \text{если } x \in A. \end{cases}$$

Ясно, что m — вычислимая перестановка (поскольку A вычислимо), $m(A) = A$ и $\bar{h}(m|_A) = q$, поэтому $\bar{h}$ является отображением «на». □

Для переноса предыдущих результатов и заполнения табл. 2 будем использовать следующее утверждение, которое следует непосредственно из определений.

Предложение 18. *Если A — множество натуральных чисел и группа $\mathrm{Aut}_r A$ тривиальна, то и группа $\mathrm{Aut}_r^t A$ тривиальна.*

Теперь из результатов предыдущих параграфов мы можем получить следующие результаты.

Предложение 19. *Если A сжато, то группа $\mathrm{Aut}_r^t A$ тривиальна.*

Предложение 20. *Существует бесконечное не гипериммунное множество A такое, что группа $\mathrm{Aut}_r^t A$ тривиальна.*

Предложение 21. *Существует неарифметическое множество A, для которого группа $\mathrm{Aut}_r^t A$ тривиальна.*

Мы можем перенести следующие результаты на нашу ситуацию, заметив, что автоморфизмы, построенные в соответствующих доказательствах из предыдущего параграфа, на самом деле индуцированы вычислимыми перестановками.

Предложение 22. *Существует гипергипериммунное множество A такое, что группа $\mathrm{Aut}_r^t A$ нетривиальна.*

Предложение 23. *Существует неарифметическое множество A, для которого группа $\mathrm{Aut}_r^t A$ нетривиальна.*

Лемма 5. *Существует $f \in \mathrm{Aut}_r^t \overline{K}$ такое, что $f(x) \neq x$ для всех $x \in \overline{K}$.*

Справедливо также

Предложение 24. *Существует продуктивное множество A такое, что $\mathrm{Aut}_r^t A \ncong \mathrm{Aut}_r^t \overline{K}$.*

Доказательство. Доказательство соответствующего предложения для Aut_r в предыдущем параграфе показывает, что каждая $f \in \mathrm{Aut}_r A$ имеет неподвижный элемент. Результат следует из того, что $\mathrm{Aut}_r^t A \leq \mathrm{Aut}_r A$. □

Следующее предложение очевидно.

Предложение 25. *Если A иммунно, B бесконечно и при этом $\mathrm{Aut}_r^t A \cong \mathrm{Aut}_r^t B$, то B также иммунно.*

§ 4. Число неизоморфных групп

Результаты предыдущего параграфа показывают, что, зная группу вычислимых автоморфизмов множества A, мы не всегда можем определить, принадлежит ли это множество одному из хорошо известных классов множеств. Тем не менее в завершение работы докажем, что эти группы дают нетривиальную классификацию подмножеств ω, т. е. все-таки какая-то информация об A может быть извлечена из $\mathrm{Aut}_r A$ $\big($или $\mathrm{Aut}_r^t A\big)$, и соответствующие объекты заслуживают дальнейшего изучения.

Теорема 1. *Существует 2^ω неизоморфных групп вида $\mathrm{Aut}_r A$.*

Доказательство. По множеству A и функции $f \in \mathrm{Aut}_r A$ определим $C(f) = \{n \in \omega : f \text{ имеет цикл длины } n+1\}$, $C(A) = \{C(f) : f \in \mathrm{Aut}_r A\}$.

Очевидно, что $\mathrm{Aut}_r A \cong \mathrm{Aut}_r B$ влечет $C(A) = C(B)$. Тогда если существует только счетное число типов изоморфизма таких групп, множество $\{C(A) : A \subseteq \omega\}$ счетно и таковым будет также множество $\mathscr{H} = \bigcup\{C(A) : A \subseteq \omega\}$, поскольку каждое $C(A)$ счетно.

Теперь предположим, что B — бесконечное множество натуральных чисел. Построим A и $f \in \mathrm{Aut}_r A$ такие, что $B = C(f)$.

Пусть g — разнозначная вычислимая функция, определенная как

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ x+1, & \text{если } \frac{n(n+1)}{2} \le x < \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ для некоторого } n, \\ \frac{n(n+1)}{2}, & \text{если } x = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1. \end{cases}$$

Рассмотрим

$$A = \bigcup_{n \in B} \left[\frac{n(n+1)}{2}, \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right]$$

и $f = g|_A$. Ясно, что $f \in \mathrm{Aut}_r A$ и $B = C(f)$, откуда $B \in C(A) \subseteq \mathscr{H}$. Тогда $\mathscr{H}$ несчетно, и мы получили противоречие. $\square$

Фактически мы доказали большее.

Следствие 3. *Существует 2^ω неизоморфных групп вида $\mathrm{Aut}_r^t A$.*

Доказательство. В доказательстве предыдущей теоремы функция g является вычислимой перестановкой. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозов А. С.* Об одном классе рекурсивно перечислимых множеств // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 2. С. 124–128.

2. *Шмидт Ю. Д.* О классе специальных множеств // Некоторые проблемы дифференциальных уравнений и дискретной математики. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1986. С. 11–19.

3. *Joseph J. Rotman* The theory of groups. Boston: Allyn and Bacon, 1965.

4. *Odifreddi P.* Classical recursion theory. Amsterdam; New York; Oxford; Tokio: Noth Holland, 1989. V. 1.

5. *Rogers R.* Theory of recursive functions and effective computability. New York; St. Louis; San Francisco; Toronto; London; Sydney: McGraw-Hill, 1967.

6. *Ершов Ю. Л.* Неразрешимость теорий симметрических и простых конечных групп // Докл. АН СССР. 1964. Т. 158, № 4. С. 777–779.

7. *McKenzie R.* Automorphism groups of denumerable Boolean algebras // Canad J. Math. 1977. V. 29, N 3. P. 466–471.

8. *Morozov A. S.* Groups of computable automorphisms. Handbook of Recursive Mathematics. V. 1: Recursive Model Theory. Amsterdam; Lausanne; New York; Oxford; Shannon; Singapore; Tokyo: Elsevier, 1998. Chapter 8. P. 311–345. (Stud. Logic Found. Math.).

Статья поступила 15 июня 2002 г.

Elías Fernández-Combarro Álvarez
Department of Computer Science, University of Oviedo (Spain)
`elias@aic.uniovi.es`