Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 517.518.235

ОБОБЩЕННЫЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В. С. Климов

Аннотация: Изучается задача о полном описании областей, для которых справедливы обобщенные мультипликативные неравенства типа теорем вложения. Утверждения, известные ранее для пространств С. Л. Соболева $L_p^1(\Omega)$, переносятся на классы функций, возникающие при замене $L_p(\Omega)$ идеальным пространством вектор-функций. Доказывается эквивалентность функциональных и геометрических неравенств, связывающих нормы индикаторов и емкости замкнутых подмножеств области Ω. Наиболее обозримые результаты относятся к случаю, когда рассматриваемые идеальные пространства симметричны.

Ключевые слова: мультипликативные неравенства, идеальные пространства, область, емкость.

В работе изучается задача о полном описании областей, для которых справедливы обобщенные мультипликативные неравенства типа теорем вложения. Для пространств С. Л. Соболева [1–3] близкая задача рассматривалась в [4]. Ниже устанавливаются аналоги ряда утверждений [4] для пространств, возникающих при замене $L_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ идеальным пространством вектор-функций [5–8]. Доказывается эквивалентность функциональных и геометрических неравенств, связывающих нормы индикаторов и емкости замкнутых подмножеств области Ω. Наиболее обозримые результаты относятся к случаю, когда изучаемые идеальные пространства симметричны.

Нормированные пространства, рассматриваемые в статье, предполагаются действительными. Запись $E_1 \subset E_0$ означает, что нормированное пространство E_1 непрерывно вложено в нормированное пространство E_0; если при этом норма оператора вложения не превосходит 1, то используется запись $E_1 \overset{1}{\subset} E_0$. Равенство $E_1 = E_0$ означает не только теоретико-множественное совпадение E_1 и E_0, но и эквивалентность норм $\|\cdot; E_1\|$ и $\|\cdot; E_0\|$ в пространствах E_1 и E_0; если же $\|\cdot; E_1\| = \|\cdot; E_0\|$, то применяется запись $E_1 \overset{1}{=} E_0$. Через kE_0 $(k > 0)$ обозначается пространство, для которого $\|\cdot; kE_0\| = k\|\cdot; E_0\|$.

1. Геометрические свойства идеальных пространств. Пусть (Ω, μ) — измеримое пространство с полной σ-конечной мерой μ, $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $a \cdot b$ и нормой $|a| = \sqrt{a \cdot a}$ $(a, b \in \mathbb{R}^m)$, $S(\Omega, \mathbb{R}^m)$ — линейное метрическое пространство μ-п.в. конечных μ-измеримых функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^m$. При $m = 1$ полагаем $S(\Omega, \mathbb{R}^1) = S(\Omega)$; подобные сокращения используются и для других пространств скалярных функций. Линейное пространство $E = E(\Omega, \mathbb{R}^m)$ функций класса $S(\Omega, \mathbb{R}^m)$ называют [5–8] *нормированным идеальным пространством* (НИП), если из соотношений $y \in E$, $\alpha \in S(\Omega)$, $|\alpha(x)| \le 1$ μ-п.в. следует, что $\alpha y \in E$

и $\|\alpha y; E\| \le \|y; E\|$. Если НИП E полно относительно нормы $\|y; E\|$, то его называют *банаховым идеальным пространством* (БИП).

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Банахово пространство $h = h(\mathbb{Z})$ двусторонних последовательностей $u = (u_i)$ $(i \in \mathbb{Z})$ называют [5, 8] *симметричным*, если из условий $u = (u_i) \in h$, $|v_i| \le |u_{\pi(i)}|$ $(i \in \mathbb{Z}$, π — биекция $\mathbb{Z})$ следует, что $v = (v_i) \in h$ и $\|v; h\| \le \|u; h\|$. Например, пространство $l_p = l_p(\mathbb{Z})$ $(1 \le p \le \infty)$ симметрично, другие примеры симметричных пространств последовательностей рассматриваются ниже.

Функциональную последовательность y_i из $S(\Omega, \mathbb{R}^m)$ $(i \in \mathbb{Z})$ назовем *дизъюнктной*, если $|y_i(x)|\,|y_j(x)| = 0$ μ-п.в. при $i \ne j$. Пусть $h = h(\mathbb{Z})$ — симметричное пространство (СП) последовательностей. БИП $E = E(\Omega, \mathbb{R}^m)$ назовем *h-супераддитивным* (*h-субаддитивным*), если для каждой дизъюнктной последовательности $y_i \in E$ $(i \in \mathbb{Z})$ имеет место оценка $\|y; E\| \ge \|u; h\|$ (соответственно $\|y; E\| \le \|u; h\|$), где

$$u = (u_i), \quad u_i = \|y_i; E\| \ (i \in \mathbb{Z}), \quad y = \sum_{i \in \mathbb{Z}} y_i,$$

при этом считается, что если $y \notin E$, то $\|y; E\| = \infty$; аналогичное соглашение относится и к $\|u; h\|$. Для БИП скалярных функций близкие понятия вводились многими авторами (см., например, [5, 9] и приведенную там библиографию). В данной работе используется терминология, принятая в [10, 11].

Среди СП $h = h(\mathbb{Z})$, относительно которых БИП E h-супераддитивно (h-субаддитивно), имеется [11] пространство τ_E (σ_E) с наибольшей (наименьшей) нормой

$$\|u; h\| \le \|u; \tau_E\|, \ u \in \tau_E \quad (\|u; \sigma_E\| \le \|u; h\|, \ u \in h)$$

соответственно. Пространство E h-супераддитивно в том и только том случае, если $\tau_E \overset{1}{\subset} h$. Это замечание характеризует пространство τ_E, называемое нижним для пространства E. Аналогично пространство E h-субаддитивно, если и только если $h \overset{1}{\subset} \sigma_E$; пространство σ_E называют верхним для E. В ряде случаев пространства τ_E, σ_E могут быть найдены; в других случаях имеются оценки норм в этих пространствах (см., например, [9–11]).

Приведем ряд примеров. Обозначим через $\beta(\mathbb{R}^m)$ класс выпуклых [12–14] четных функций $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\xi) > 0$ при $\xi \ne 0$. Пусть $H = H(\Omega)$ есть БИП скалярных функций на Ω, носитель $\operatorname{supp} H$ [7, с. 137] которого совпадает с Ω. Сопоставим H и функции Ψ из $\beta(\mathbb{R}^m)$ совокупность функций $H^\Psi(\Omega, \mathbb{R}^m)$ класса $S(\Omega, \mathbb{R}^m)$ с конечной нормой $\|y; H^\Psi\| = \inf\{k > 0; \|\Psi(y/k); H\| \le 1\}$. С данной нормой $H^\Psi(\Omega, \mathbb{R}^m)$ представляет собой БИП [10, 11]. Если $H = L_1(\Omega)$ — пространство суммируемых по мере μ функций со стандартной [7] нормой, то $H^\Psi(\Omega, \mathbb{R}^m)$ обозначают символом $L^\Psi(\Omega, \mathbb{R}^m)$ и называют пространством Орлича; соответствующая норма $\|\cdot; L^\Psi\|$ совпадает с нормой Люксембурга [7, с. 150; 12, с. 95; 14, с. 202].

Далее будут рассматриваться аналогичные H^Ψ пространства последовательностей. Пусть $M(\cdot) : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}U(+\infty)$ — выпуклая четная функция, $M(0) = 0$, функция M непрерывна в нуле. Функции M и СП $h = h(\mathbb{Z})$ сопоставим множество таких последовательностей $v = (v_i)$ $(i \in \mathbb{Z})$, для которых конечна норма

$$\|v; h^M\| = \inf\{k > 0 : \|(M(v_i/k)); h\| \le 1\}.$$

Если $h = l_1(\mathbb{Z})$ — пространство суммируемых последовательностей, то h^M обозначают символом l_M и называют пространством Орлича последовательностей;

при $M(s) = |s|^p$ $(1 \le p \le \infty)$ полагают $l_M = l_p$. В общем случае h^M является симметричным пространством двусторонних последовательностей. Пространства h^M, l_M применяются для оценок верхнего и нижнего пространств.

Важную роль далее играет класс $\beta_0(\mathbb{R}^m) \subset \beta(\mathbb{R}^m)$, состоящий из функций $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих оценке $\Phi(2\xi) \le k_0\Phi(\xi)$ $(\xi \in \mathbb{R}^m, k_0 < \infty)$. Функции $\Phi \in \beta_0(\mathbb{R}^m)$ сопоставим функцию $\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяемую равенством

$$\Phi_1(t) = \inf_{\xi \ne 0} \frac{\Phi(t\xi)}{\Phi(\xi)} \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Функция $\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ четна, положительна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\Phi_1(1) = 1$, функция $\Phi_1(t)t^{-1}$ возрастает на $(0, \infty)$. Справедливы [11] неравенства $\Phi_1^{**}(t) \le \Phi_1(t) \le \Phi_1^{**}(2t)$, где Φ_1^{**} — вторая сопряженная [13] к функции Φ_1.

В формулируемом ниже предложении 1 $\Phi \in \beta_0(\mathbb{R}^m)$, функции M, M_1, N определены равенствами

$$M(t) = \Phi_1^{**}(t), \quad M_1(t) = M(2t), \quad N(t) = \sup_{\xi \ne 0} \frac{\Phi(t\xi)}{\Phi(\xi)},$$

функция Φ_1 задана равенством (1); $L^\Phi = L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Далее $H = H(\Omega)$ — БИП скалярных измеримых относительно меры μ функций, $\operatorname{supp} H = \Omega$, τ_H и σ_H — нижнее и верхнее пространства для H; $\mathfrak{A}_H$ — совокупность таких множеств $X \subset \Omega$, что индикатор (характеристическая функция) 1_X множества X принадлежит H. В некоторых случаях используется условие (Δ_H): для каждого множества X_0 из $\mathfrak{A}_H$ и любого числа $t > 0$ найдется такое множество X, что $X \subset \Omega \setminus X_0$ и $\|1_X; H\| = t$; условие (Δ_H) обсуждается в [11].

Предложение 1. (а) *Справедливы вложения*

$$(\sigma_H)^N \overset{1}{\subset} \sigma_{H^\Phi}, \quad \tau_{H^\Phi} \overset{1}{\subset} (\tau_H)^M;$$

(б) *если выполнено условие* (Δ_H), *то*

$$(\sigma_{H^\Phi}) \overset{1}{\subset} (\tau_H)^N, \quad (\sigma_H)^{M_1} \overset{1}{\subset} \tau_{H^\Phi};$$

(в) *если* $\mu(\Omega) = \infty$, *то*

$$2l_M \overset{1}{\subset} \tau_{L^\Phi} \overset{1}{\subset} l_M, \quad \sigma_{L^\Phi} \overset{1}{=} l_N. \tag{2}$$

Предложение 1 вытекает из результатов статьи [11]. При $m = 1$ близкие к (2) соотношения установлены в [9], там же найдены σ_E, τ_E в случаях, когда E совпадает с пространством Лоренца (Марцинкевича).

Обозначим через $(\mathscr{L})$ совокупность неотрицательных непрерывных ненулевых вогнутых функций $\varphi : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ положительно однородных первой степени $\varphi(k\xi, k\eta) = k\varphi(\xi, \eta)$ $(k > 0,\ \xi \ge 0,\ \eta \ge 0)$. Класс $(\mathscr{L})$ играет важную роль в теории интерполяции [5]. В этот класс входят, например, функции $\varphi_+(\xi, \eta) = \xi + \eta$, $\varphi_\delta(\xi, \eta) = \xi^\delta \eta^{1-\delta}$ $(0 < \delta < 1)$,

$$\varphi_M(\xi, \eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \eta > 0, \\ \eta M^{-1}(\xi/\eta), & \text{если } \eta > 0, \end{cases}$$

где $M(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ есть N-функция [12], M^{-1} — обратная к сужению функции M на $\mathbb{R}_+$. Каждая функция φ из $(\mathscr{L})$ обладает [15] свойствами:

1) $\varphi(\xi, \eta) > 0$ при $\xi > 0$, $\eta > 0$;

2) $\varphi(\xi, \cdot)$ не убывает на $\mathbb{R}_+$ при любом $\xi \geq 0$;
3) $\varphi(\cdot, \eta)$ не убывает на $\mathbb{R}_+$ для любого $\eta \geq 0$;
4) $\varphi(\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2) \geq \varphi(\xi_1, \eta_1) + \varphi(\xi_2, \eta_2)$ $((\xi_i, \eta_i) \in \mathbb{R}^2_+,\ i = 1, 2)$.

Пусть P, Q, R — БИП вектор-функций (не исключается случай, когда области определения и размерности области значений рассматриваемых вектор-функций различны), $\varphi \in (\mathscr{L})$. Будем говорить, что пара $\{P, R\}$ *φ-мажорирует* Q ($Q \overset{\varphi}{\prec} \{P, R\}$), если найдется такая постоянная $k = k(P, Q, R)$, что для любых последовательностей $u = (u_i) \in \tau_P$, $v = (v_i) \in \tau_R$ выполнено неравенство

$$\|\varphi(u, v); \sigma_Q\| \leq k\varphi(\|u; \tau_P\|, \|v; \tau_R\|), \tag{3}$$

где $\varphi(u, v) = (\varphi(u_i, v_i))$ $(i \in \mathbb{Z})$, τ_P, τ_R (σ_Q) — нижнее (верхнее) для P, R (соответственно Q) СП последовательностей. В случае $\varphi(\xi, \eta) = \xi$ аналогичные понятия вводились в [9–11]. Оценка (3) для $\varphi = \varphi_+$ равносильна вложению $\tau_P + \tau_R \subset \sigma_Q$, где $\tau_P + \tau_R$ — сумма пространств τ_P, τ_R, образующих банахову пару [8, с. 20]. Для $\varphi = \varphi_\delta$ оценка (3) равносильна вложению $\tau_P^\delta \tau_R^{1-\delta} \subset \sigma_Q$; здесь $\tau_P^\delta \tau_R^{1-\delta}$ — пространство средних Кальдерона [5, 8, 16]. Аналогичная интерпретация неравенства (3) возможна и в случае $\varphi = \varphi_M$; необходимо лишь вместо конструкции Кальдерона использовать некоторые ее обобщения [5, 15].

Оценка (3) имеет место, если справедливо неравенство

$$\|\varphi(u, v); \sigma\| \leq k\varphi(\|u; \tau_1\|, \|v; \tau_0\|), \tag{4}$$

где τ_1, τ_0, σ — СП последовательностей, $\tau_P \overset{1}{\subset}$, $\tau_R \overset{1}{\subset} \tau_0$, $\sigma \overset{1}{\subset} \sigma_Q$. Это замечание позволяет установить соотношение типа $Q \overset{\varphi}{\prec} \{P, R\}$, располагая лишь оценками пространств τ_P, τ_R, σ_Q. Пусть, например, $\tau_1 = l_{M_1}$, $\tau_0 = l_{M_0}$, $\sigma = l_M$ — пространства Орлича, порождаемые функциями M_1, M_0, M соответственно, $\varphi = \varphi_\delta$. Тогда неравенство (4) выполняется (с некоторой константой $k > 0$), если $M^{-1}(t) \geq \big(M_1^{-1}(t)\big)^\delta \big(M_0^{-1}(t)\big)^{1-\delta}$ $(0 < t < \infty)$.

2. Неравенства для функций, равных 0 на подмножестве Ω. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{cl}_\Omega \mathfrak{M}$ — замыкание множества $\mathfrak{M} \subset \Omega$ в относительной топологии Ω; $C(\Omega)$ — линейное пространство непрерывных в Ω функций, $W_1^1(\Omega, \mathrm{loc})$ — класс функций, имеющих в Ω локально суммируемые в смысле Соболева производные первого порядка [1]. Пусть также $CW(\Omega) = C(\Omega) \cap W_1^1(\Omega, \mathrm{loc})$, $CW(\Omega, \Omega_0)$ — часть $CW(\Omega)$, состоящая из функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$, равных 0 на множестве $\Omega \setminus \Omega_0$.

Будем говорить, что пара множеств $(F, \mathscr{G})$ *образует проводник*, если $\mathscr{G}$ — открытое собственное подмножество области Ω, $\varnothing \neq F = \operatorname{cl}_\Omega F \subset \mathscr{G}$. Проводнику $(F, \mathscr{G})$ сопоставим множества функций

$$U(F, \mathscr{G}) = \{f \in CW(\Omega),\ f(x) \geq 1\ \forall x \in F,\ f(x) \leq 0\ \forall x \in \Omega \setminus \mathscr{G}\},$$
$$V(F, \mathscr{G}) = \{f \in CW(\Omega, \mathscr{G}),\ 0 \leq f(x) \leq 1\ \forall x \in \Omega,\ f(x) = 1\ \forall x \in F\}.$$

Очевидно включение $V(F, \mathscr{G}) \subset U(F, \mathscr{G})$; если $f \in U(F, \mathscr{G})$, функция $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определена равенством

$$\alpha(t) = \min\{1, t_+\} \quad (t_+ = \max(0, t)), \tag{5}$$

то $\alpha \circ f \in V(F, \mathscr{G})$ и $\nabla(\alpha \circ f) = \alpha'(f)\nabla f$ п.в. относительно n-мерной лебеговой меры mes_n. Пусть $P = P(\Omega, \mathbb{R}^n)$ — БИП измеримых относительно меры

mes_n функций со значениями в $\mathbb{R}^n$. Не оговаривая каждый раз особо, считаем справедливыми вложения

$$L_\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \subset P(\Omega, \mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathscr{K}, \mathbb{R}^n), \tag{6}$$

где $\mathscr{K}$ — произвольный принадлежащий области Ω компакт. Число $c_P(F, \mathscr{G}) = \inf\{\|\nabla f; P\| \ f \in U(F, \mathscr{G})\}$ назовем *вариационной P-емкостью проводника* $(F, \mathscr{G})$. В случае $P = L_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ аналогичные характеристики вводились в [3, 4].

Класс $U(F, \mathscr{G})$, фигурирующий в определении емкости $c_P(F, \mathscr{G})$, можно заменить более узким, например классом $V(F, \mathscr{G})$. Доказательство без труда вытекает из отмечавшегося выше равенства $\nabla(\alpha \circ f) = \alpha'(f)\nabla f$, в котором функция α задана равенством (5). Если $(F_1, \mathscr{G}_1)$, $(F_2, \mathscr{G}_2)$ — два проводника и $F_1 \subset F_2$, $\mathscr{G}_2 \subset \mathscr{G}_1$, то $U(F_2, \mathscr{G}_2) \subset U(F_1, \mathscr{G}_1)$, поэтому верно неравенство $c_P(F_1, \mathscr{G}_1) \leq c_P(F_2, \mathscr{G}_2)$, выражающее свойство монотонности вариационной емкости.

Лемма 1 (ср. с [3, с. 126]). *Пусть $f \in CW(\Omega, \mathscr{G}), \nabla f \in P(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\mathscr{M}_t = \{x \in \Omega, |f(x)| \geq t\}$ $(t > 0)$. Тогда $tc_P(\mathscr{M}_t, \mathscr{G}) \leq \|\nabla f; P\|$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что функция $g = |f|t^{-1}$ принадлежит $U(\mathscr{M}_t, \mathscr{G})$ и поэтому $c_P(\mathscr{M}_t, \mathscr{G}) \leq \|\nabla f; P\|t^{-1}$.

Далее $Q = Q(\Omega)$, $R = R(\Omega)$ — БИП измеримых относительно борелевских мер μ_Q, μ_R скалярных функций, $\nu_Q : S(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ — функционал, определяемый равенством $\nu_Q(f) = \sup\{t\|1_{\mathscr{M}_t}; Q\|\}$, в котором $1_{\mathscr{M}_t}$ — индикатор множества $\mathscr{M}_t = \{x \in \Omega, \ |f(x)| \geq t\}$. Функционал ν_Q положительно-однороден, удовлетворяет неравенству 2-треугольника и подчинен норме $\|\cdot; Q\|$:

$$\nu_Q(\lambda f) = |\lambda|\nu_Q(f), \quad \nu_Q(f + g) \leq 2(\nu_Q(f) + \nu_Q(g)), \quad \nu_Q(f) \leq \|f; Q\|.$$

Пусть Ω_0 — открытое собственное подмножество области Ω. Функцию f класса $CW(\Omega, \Omega_0)$ назовем *допустимой*, если $\nabla f \in P$, $f \in R$. Ниже формулируются критерии справедливости функционального неравенства

$$\|f; Q\| \leq C\varphi(\|\nabla f; P\|, \|f; R\|), \tag{7}$$

где $\varphi \in (\mathscr{L})$, постоянная C не зависит от выбора допустимой функции f. Наряду с (7) изучается его вариант

$$\nu_Q(f) \leq B\varphi(\|\nabla f; P\|, \|f; R\|) \tag{8}$$

для тех же φ и f. Если $C(\Omega_0; P, Q, R)$ $(B(\Omega_0; P, Q, R))$ — наименьшая из констант $C(B)$, для которых имеет место (7) (соответственно (8)), то $B(\Omega_0; P, Q, R) \leq C(\Omega_0; P, Q, R)$.

Оказывается, постоянные $B(\Omega_0; P, Q, R)$, $C(\Omega_0; P, Q, R)$ можно оценить через постоянную $A(\Omega_0; P, Q, R)$, определяемую как минимальную из констант A, для которых справедлива оценка

$$\|1_F; Q\| \leq A\varphi(c_P(F, \mathscr{G}), \|1_{\mathscr{G}}; R\|), \tag{9}$$

A не зависит от пробного проводника $(F, \mathscr{G})$, $\mathscr{G} \subset \Omega_0$. Если подобных констант A не существует, то полагаем $A(\Omega_0; P, Q, R) = \infty$; аналогичные замечания относятся и к постоянным $B(\Omega_0; P, Q, R)$, $C(\Omega_0; P, Q, R)$.

Теорема 1. *Неравенство* (8) *справедливо в том и только том случае, если* $A(\Omega_0; P, Q, R) < \infty$, *при этом* $A(\Omega_0; P, Q, R) \leq B(\Omega_0; P, Q, R) \leq 2A(\Omega_0; P, Q, R)$. *Следовательно, функциональное неравенство* (8) *эквивалентно геометрическому неравенству* (9).

Доказательство. Пусть имеет место неравенство (8). Фиксируем пробный проводник $(F, \mathscr{G})$ $(\mathscr{G} \subset \Omega_0)$. Для любой функции f из $V(F, \mathscr{G})$ справедливы неравенства $\|1_F; Q\| \leq \nu_Q(f)$, $\|f; R\| \leq \|1_{\mathscr{G}}; R\|$. Поэтому из (8) вытекает оценка

$$\|1_F; Q\| \leq \nu_Q(f) \leq B\varphi(\|\nabla f; P\|, \|f; R\|) \leq B\varphi(\|\nabla f; P\|, \|1_{\mathscr{G}}; R\|).$$

Минимизируя правую часть по всем функциям класса $V(F, \mathscr{G})$, приходим к оценке

$$\|1_F; Q\| \leq B\varphi(c_P(F, \mathscr{G}), \|1_{\mathscr{G}}; R\|)$$

для произвольного проводника $(F, \mathscr{G})$, $\mathscr{G} \subset \Omega_0$. Тем самым доказаны неравенство (9) и оценка $A(\Omega_0; P, Q, R) \leq B(\Omega_0; P, Q, R)$.

Пусть теперь $A(\Omega_0; P, Q, R) < \infty$. Фиксируем допустимую функцию f и число $t > 0$. Положим $F = \{x \in \Omega : |f(x)| \geq t\}$, $\mathscr{G} = \{x \in \Omega : |f(x)| > t/2\}$. Применяя к проводнику $(F, \mathscr{G})$ оценку (9) и используя очевидное неравенство $\|1_{\mathscr{G}}; R\| \leq \frac{2}{t}\|f; R\|$, получаем $\|1_F; Q\| \leq A\varphi\left(c_P(F, \mathscr{G}), \frac{2}{t}\|f; R\|\right)$. Функция $f_0(x) = \frac{1}{t - t_1}(|f(x)| - t_1)_+$ $\left(\frac{t}{2} < t_1 < t\right)$ принадлежит $U(F, \mathscr{G})$, следовательно, $c_P(F, \mathscr{G}) \leq \|\nabla f_0; P\| \leq \frac{1}{t - t_1}\|\nabla f; P\|$. Объединяя установленные оценки, имеем

$$\|1_F; Q\| \leq A\varphi\left(\frac{1}{t - t_1}\|\nabla f; P\|, \frac{2}{t}\|f; R\|\right).$$

Последнее неравенство при $t_1 \to \frac{t}{2}$ влечет (8) и оценку

$$B(\Omega_0; P, Q, R) \leq 2A(\Omega_0; P, Q, R).$$

Теорема доказана.

В ряде случаев из неравенства (8) вытекает его сильный аналог — неравенство (7). Например, в том случае, если функционал ν_Q эквивалентен норме $\|\cdot; Q\|$. В общем случае требование эквивалентности ν_Q и $\|\cdot; Q\|$ слишком ограничительно [8, с. 196].

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in (\mathscr{L})$ *и* $Q \overset{\varphi}{\prec} \{P, R\}$. *Тогда неравенство* (7) *имеет место в том и только том случае, если* $A(\Omega_0; P, Q, R) < \infty$, *при этом* $A(\Omega_0; P, Q, R) \leq C(\Omega_0; P, Q, R) \leq 8kA(\Omega_0; P, Q, R)$, *где постоянная* $k = k(P, Q, R)$ *та же, что и в неравенстве* (3).

Доказательство. Достаточно установить оценку $C(\Omega_0; P, Q, R)$ сверху. Пусть f — допустимая функция, $A(\Omega_0; P, Q, R) < \infty$. Положим

$$F_i = \{x : |f(x)| \geq 2^i\}, \quad \mathscr{G}_i = \{x : |f(x)| > 2^{i-1}\}, \quad D_i = F_i \setminus F_{i+1},$$
$$u_i = \|1_{D_{i-1}} \nabla f; P\|, \quad v_i = \|1_{D_i} f; R\|, \quad w_i = \|1_{D_i} f; Q\| \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

Пусть $F_i \neq \varnothing$, функция $\alpha(\cdot)$ определена равенством (5). Функция $f_i(x) = \alpha(2^{1-i}(|f(x)| - 2^{i-1}))$ принадлежит $U(F_i, \mathscr{G}_i)$, поэтому

$$c_P(F_i, \mathscr{G}_i) \leq \|\nabla f_i; P\| \leq 2^{1-i}\|1_{D_{i-1}} \nabla f; P\| \leq 2^{1-i} u_i. \tag{10}$$

Так как

$$\mathscr{G}_i \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} D_{i-1+j},$$

то
$$\|1_{\mathscr{G}_i};R\| \le \sum_{j=0}^{\infty} \|1_{D_{i-1+j}};R\| \le \sum_{j=0}^{\infty} 2^{1-i-j} v_{i+j-1}. \tag{11}$$
Объединяя (10), (11) с вытекающей из (9) оценкой
$$\|1_{F_i};Q\| \le A\varphi(c_P(F_i,\mathscr{G}_i), \|1_{\mathscr{G}_i};R\|)$$
и тривиальным неравенством $w_i \le 2^{i+1}\|1_{F_i};Q\|$, приходим к соотношению
$$w_i \le 4A\varphi\left(u_i, \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} v_{i+j-1}\right) \quad (i \in \mathbb{Z}). \tag{12}$$
Используя определения пространств σ_Q, τ_0, τ_R, получаем неравенства $\|f;Q\| \le \|(w_i);\sigma_Q\|$, $\|(u_i);\tau_P\| \le \|\nabla f;P\|$,
$$\left\|\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} v_{i+j-1}\right);\tau_R\right\| = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\|(v_{i+j-1});\tau_R\|$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\|(v_i);\tau_R\| \le \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\|f;R\| = 2\|f;R\|.$$
Комбинируя эти неравенства с (12) и (3), приходим к оценке
$$\|f;Q\| \le 4kA\varphi(\|\nabla f;P\|, 2\|f;R\|) \le 8kA\varphi(\|\nabla f;P\|, \|f;R\|),$$
показывающей, что $C(\Omega_0;P,Q,R) \le 8kA(\Omega_0;P,Q,R)$. Теорема доказана.

Теорема 2 означает, что при условии $Q \overset{\varphi}{\prec} \{P,R\}$ константа $C(\Omega_0;P,Q,R)$ в функциональном неравенстве (7) имеет тот же порядок, что и постоянная $A(\Omega_{\mathscr{G}};P,Q,R)$ в геометрическом неравенстве (9). Другим следствием теоремы является равносильность неравенств (7), (9). Из доказательства теорем 1, 2 видно, что в качестве множеств F, $\mathscr{G}$, фигурирующих в оценке (9), достаточно брать лебеговы множества $\{x : |f(x)| \ge t\}$, $\{x : |f(x)| > s\}$ допустимой функции f. Поэтому сужение класса допустимых функций может облегчить проверку геометрического неравенства (9).

Обозначим через $\mathscr{A}(\Omega_0;P,Q,R)$ наименьшую из постоянных $\mathscr{A}$, для которых имеет место оценка
$$\|1_F;Q\| \le \mathscr{A}\varphi(c_P(F,\Omega_0), \|1_F;R\|), \tag{13}$$
$\mathscr{A}$ не зависит от выбора множества F ($\varnothing \ne F = \mathrm{cl}_\Omega F \subset \Omega_0$). Так как $c_P(F,\mathscr{G}) \ge c_P(F,\Omega_0)$ (монотонность емкости) и $\|1_{\mathscr{G}};R\| \ge \|1_F;R\|$, то
$$A(\Omega_0;P,Q,R) \le \mathscr{A}(\Omega_0;P,Q,R).$$
Поэтому оценка (13) влечет неравенство (9), однако обратная импликация не всегда верна [4, с. 111]. В общем случае (13) можно рассматривать как достаточное условие для более трудно проверяемой оценки (9). При $\varphi = \varphi_\delta$ из теоремы 2 вытекает критерий справедливости мультипликативного неравенства $\|f;Q\| \le C\|\nabla f;P\|^{\delta}\|f;R\|^{1-\delta}$.

3. Неравенства для функций из пространств Соболева. Существенную роль в построениях п. 2 играло условие обращения в 0 на $\Omega \setminus \Omega_0$ рассматриваемых функций. В этом пункте доказываются варианты теорем 1, 2 для функций, не удовлетворяющих данному условию.

Обозначим через $W^1P(\Omega)$ совокупность локально суммируемых в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функций f, градиенты ∇f в смысле Соболева [1] которых принадлежат БИП $P = P(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Определим в $W^1P(\Omega)$ норму равенством $\|f; W^1P\| = \|\nabla f; P\| + \|f; L_1(K)\|$, где K — принадлежащий Ω компакт, причем $\mathrm{mes}_n K > 0$. Из соотношений (6) и стандартных результатов теории вложения следует, что разным компактам K соответствуют эквивалентные нормы, поэтому зависимость нормы $\|\cdot; W^1P\|$ от K несущественна.

Ниже $Q = Q(\Omega)$, $R = R(\Omega)$ — БИП измеримых относительно меры mes_n функций. Считаем справедливыми вложения

$$L_\infty(\Omega) \subset R(\Omega) \subset L_1(\mathscr{K}), \quad L_\infty(\Omega) \subset Q(\Omega) \subset L_1(\mathscr{K}), \tag{14}$$

где $\mathscr{K}$ — произвольный принадлежащий области Ω компакт. Положим

$$P^1R(\Omega) = W^1P(\Omega) \cap C(\Omega) \cap R(\Omega).$$

Рассмотрим аналогичные (7), (8) неравенства

$$\|f; Q\| \le \mathfrak{C}\varphi(\|f; W^1P\|, \|f; R\|) \quad (f \in P^1R(\Omega)), \tag{15}$$

$$\nu_Q(f) \le \mathfrak{B}\varphi(\|f; W^1P\|, \|f; R\|) \quad (f \in P^1R(\Omega)). \tag{16}$$

Наименьшая из констант $\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{B}$), для которых справедливы неравенства (15) и (16), обозначается через $\mathfrak{C}(P,Q,R)$ и $\mathfrak{B}(P,Q,R)$ соответственно; если же подобных констант $\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{B}$) нет, то полагаем $\mathfrak{C}(P,Q,R) = \infty$ ($\mathfrak{B}(P,Q,R) = \infty$).

Оказывается, неравенства (15), (16) равносильны равномерной ограниченности постоянных $C(\Omega_0; P, Q, R)$, $B(\Omega_0; P, Q, R)$, фигурирующих в (7) и (8), на некотором классе открытых подмножеств области Ω. Именно, числу m_0 из $(0, \mathrm{mes}_n \Omega)$ сопоставим совокупность $\omega(m_0)$ открытых множеств Ω_0, удовлетворяющих условиям $\Omega_0 \subset \Omega$, $0 < \mathrm{mes}_n \Omega_0 < m_0$.

Лемма 2. *Конечность $\mathfrak{B}(P,Q,R)$ равносильна ограниченности функционала $B(\cdot; P, Q, R)$ на классе $\omega(m_0)$ при некотором m_0 из $(0, \mathrm{mes}_n \Omega)$.*

Доказательство. Пусть существуют такие постоянные m_0, b_0, $0 < m_0 < \mathrm{mes}_n \Omega$, и $B(\Omega_0; P, Q, R) \le b_0$ для любого $\Omega_0 \in \omega(m_0)$.

Не ограничивая общности, будем считать, что компакт $K \subset \Omega$, фигурирующий в определении нормы $\|\cdot; W^1P\|$, удовлетворяет требованию $2\,\mathrm{mes}_n(\Omega \setminus K) < m_0$. Фиксируем функцию u из $P^1R(\Omega)$ и положим $K_T = \{x \in K, |u(x)| \ge T\}$ $(T > 0)$. Если $T = \frac{2}{m_0}\|u; L_1(K)\|$, то $\mathrm{mes}_n\{x \in \Omega, |u(x)| \ge T\} < m_0$ [11]. Функция $v = (|u| - T)_+$ обращается в нуль вне множества $\Omega_0 = \{x \in \Omega, |u(x)| > T\}$, поэтому $\Omega \in \omega(m_0)$. В силу (8) $\nu_Q(v) \le b_0\varphi(\|\nabla v; P\|, \|v; R\|)$. Так как $|u| \le v + T$, то

$$\begin{aligned}\nu_Q(u) \le \nu_Q(|v| + T) \le 2\nu_Q(v) + 2\nu_Q(T)&\\ \le 2b_0\varphi(\|\nabla v; P\|, \|v; R\|) + \frac{4}{m_0}\nu_Q(1_\Omega)\|u; L_1(K)\|.&\end{aligned}$$

Поскольку $\varphi \in (\mathscr{L})$, то $k_0 = \varphi(1,1) > 0$ и $\varphi(t,t) \ge k_0 t$ для любого $t \ge 0$; в частности, отсюда получаем оценку

$$\frac{4}{m_0}\nu_Q(1_\Omega)\|u; L_1(K)\| \le k_1\varphi(\|u; L_1(K)\|, \|u; L_1(K)\|)$$

с некоторой константой k_1. Объединяя полученные оценки, имеем неравенства

$$\begin{aligned}\nu_Q(u) &\le 2b_0\varphi(\|\nabla v; P\|, \|v; R\|) + k_1\varphi(\|u; L_1(K)\|, \|u; L_1(K)\|)\\ &\le (2b_0 + k_1)\varphi(\|u; W^1P\|, \|v; R\| + \|u; L_1(K)\|) \le b_1\varphi(\|u; W^1P, \|u; R\|),\end{aligned}$$

где b_1 — некоторая постоянная, не зависящая от выбора функции u из $P^1R(\Omega)$. Следовательно, ограниченность функционала $B(\cdot;P,Q,R)$ на $\omega(m_0)$ влечет конечность $\mathfrak{B}$.

Докажем теперь, что из (16) вытекает ограниченность функционала $B(\cdot;P,Q,R)$ на $\omega(m_0)$ при любом m_0 из $(0,\mathrm{mes}_n\,\Omega)$. Фиксируем m_0 из $(0\,\mathrm{mes}_n\,\Omega)$ и область Ω_1 с гладкой границей, причем

$$K\subset\Omega_1,\quad \overline{\Omega}_1\subset\Omega,\quad \mathrm{mes}_n\,\Omega_1>2^{-1}(\mathrm{mes}_n\,\Omega+m_0).$$

Если $\Omega_0\in\omega(m_0)$, то $(\mathrm{mes}_n(\Omega_1\cap(\Omega\setminus\Omega_0))>2^{-1}(\mathrm{mes}_n\,\Omega-m_0)$ [11]. Для любой функции f из $CW(\Omega,\Omega_0)$ ее сужение на Ω_1 обращается в нуль на множестве $\Omega_1\cap(\Omega\setminus\Omega_0)$, мера которого больше $2^{-1}(\mathrm{mes}_n\,\Omega-m_0)$. В силу теорем вложения для областей с гладкой границей [4, гл. 3] справедлива оценка $\|f;L_1(K)\|\le\varkappa\|\nabla f;L_1(\Omega_1)\|$, константа $\varkappa$ не зависит от выбора Ω_0 из $\omega(m_0)$. Таким образом, для каждой допустимой функции f имеют место неравенства

$$\begin{aligned}\nu_Q(f)&\le\mathfrak{B}\varphi(\|f;W^1P\|,\,\|f;R\|)=\mathfrak{B}\varphi(\|\nabla f;P\|+\|f;L_1(K)\|,\,\|f;R\|)\\&\le\mathfrak{B}\varphi(\|\nabla f;P\|+\varkappa\|\nabla f;L_1(\Omega_1)\|,\,\|f;R\|)\le\mathfrak{B}_1\varphi(\|\nabla f;P\|,\,\|f;R\|).\end{aligned}$$

Константа $\mathfrak{B}_1$ зависит лишь от $\varkappa$ и φ; в частности, $\mathfrak{B}_1$ не зависит от выбора Ω_0. Лемма доказана.

В силу теоремы 1 постоянная $B(\Omega_0;P,Q,R)$ имеет тот же порядок, что и постоянная $A(\Omega_0;P,Q,R)$. Класс областей $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, для которых

$$\sup\{A(\Omega_0;P,Q,R),\ \Omega_0\in\omega(m_0)\}<\infty$$

при некотором m_0 из $(0,\mathrm{mes}_n\,\Omega)$, обозначим через $I(P,Q,R)$. Таким образом, $\Omega\in I(P,Q,R)$, если существуют такие постоянные m_0 из $(0,\mathrm{mes}_n\,\Omega)$ и $\mathfrak{A}$ из $(0,\infty)$, что имеет место неравенство

$$\|1_F;Q\|\le\mathfrak{A}\varphi(c_P(F,\mathscr{G}),\|1_{\mathscr{G}};R\|)$$

для любого проводника $(F,\mathscr{G})$, $\mathrm{mes}_n\,\mathscr{G}<m_0$.

Теорема 3. *Неравенство* (16) *справедливо в том и только том случае, если* $\Omega\in I(P,Q,R)$.

Доказательство. Теорема 3 очевидным образом вытекает из леммы 2 и теоремы 1.

Лемма 3. *Конечность* $\mathfrak{C}(P,Q,R)$ *равносильна ограниченности функционала* $C(\,\cdot\,;P,Q,R)$ *на классе* $\omega(m_0)$ *при некотором* m_0 *из* $(0,\mathrm{mes}_n\,\Omega)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2, поэтому не приводится.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi\in(\mathscr{L})$ *и* $Q\overset{\varphi}{\prec}\{P,R\}$. *Тогда неравенство* (15) *справедливо в том и только том случае, если* $\Omega\in I(P,Q,R)$.

Доказательство. Теорема 4 вытекает из леммы 3 и теоремы 2.

В ряде случаев вместо (15) удобно пользоваться оценками, обобщающими неравенство Пуанкаре. Положим

$$l_0(f)=\frac{1}{\mathrm{mes}_n\,K}\int\limits_K f(x)\,dx,\quad \|f\|_1=\|\nabla f;P\|+|l_0(f)|.$$

Нормы $\|\cdot;W^1P\|$ и $\|\cdot\|_1$ эквивалентны на классе $W^1P(\Omega)$, поэтому (15) равносильно неравенству

$$\|f;Q\| \le \mathfrak{C}\varphi(\|f\|_1,\, \|f;R\|) \quad (f\in P^1R(\Omega)). \tag{17}$$

Наименьшая из постоянных $\mathfrak{C}_1$, обозначаемая символом $\mathfrak{C}_1(P,Q,R)$, конечна в том и только том случае, если конечна постоянная $\mathfrak{C}(P,Q,R)$.

Из неравенства (17) легко выводится следующий вариант неравенства Пуанкаре:

$$\inf_{t\in\mathbb{R}}\|f-t;Q\| \le \mathscr{D}\varphi(\|\nabla f;P\|,\, \|f;R\|) \quad (f\in P^1R(\Omega)). \tag{18}$$

Действительно, если $f\in P^1R(\Omega)$, то функция $f_1 = f-l_0(f)$ также принадлежит $P^1R(\Omega)$, причем $l_0(f_1)=0$, $\|f_1\|_1 = \|\nabla f;P\|$,

$$\|f_1;R\| \le \|f;R\| + |l_0(f)|\,\|1_\Omega;R\| \le \varkappa_1\|f;R\|.$$

Поэтому, заменяя в (17) функцию f функцией f_1, получаем усиливающую (18) оценку

$$\begin{aligned}\|f_1;Q\| = \|f-l_0(f);Q\| &\le \mathfrak{C}_1\varphi(\|\nabla f;P\|, \varkappa_1\|f;R\|)\\ &\le \mathfrak{C}_1(1+\varkappa_1)\varphi(\|\nabla f;P\|,\, \|f;R\|) \le \mathscr{D}\varphi(\|\nabla f;P\|,\, \|f;R\|)\end{aligned}$$

с $\mathscr{D} = \mathfrak{C}_1(1+\varkappa_1)$.

Теперь установим, что, в свою очередь, неравенство (18) влечет неравенство (17) с некоторой постоянной $\mathfrak{C}_1$. Пусть $f\in P^1R(\Omega)$, $\varepsilon>0$. Подберем постоянную t_0 так, что

$$\|f-t_0;Q\| \le \mathscr{D}\varphi(\|\nabla f;P\|,\, \|f;R\|)+\varepsilon.$$

Так как $Q\subset L_1(K)$, то $\|f-t_0;Q\| \ge \varkappa_0|l_0(f-t_0)| \ge \varkappa_0|t_0| - \varkappa_0|l_0(f)|$ с некоторой постоянной $\varkappa_0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}|t_0| &\le |l_0(f)| + \frac{1}{\varkappa_0}\|f-t_0;Q\| \le |l_0(f)| + \frac{\mathscr{D}}{\varkappa_0}\varphi(\|\nabla f;P\|,\, \|f;R\|)+\varepsilon\\ &\le \frac{\varphi(|l_0(f)|,\, |l_0(f)|)}{\varphi(1,1)} + \frac{\mathscr{D}}{\varkappa_0}\varphi(\|\nabla f;P\|,\, \|f;R\|)+\varepsilon \le \mathscr{D}_1\varphi(\|f\|_1, \|f;R\|)+\varepsilon.\end{aligned}$$

Объединяя установленные оценки, получаем

$$\|f;Q\| \le \|f-t_0;Q\| + |t_0|\,\|1_\Omega;Q\| \le (2\mathscr{D} + \mathscr{D}_1\|1_\Omega;Q\|)\varphi(\|f\|_1,\, \|f;R\|)+\varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon>0$ последнее неравенство влечет (17) с $\mathfrak{C}_1 = 2\mathscr{D} + \mathscr{D}_1\|1_\Omega;Q\|$.

Из теоремы 4 вытекает

Следствие 1. *Пусть $\varphi\in(\mathscr{L})$, $Q \overset{\varphi}{\prec} \{P,R\}$. Тогда неравенство* (18) *справедливо в том и только том случае, если $\Omega\subset I(P,Q,R)$.*

Обозначим через $\mathscr{P}^1\mathscr{R}(\Omega)$ замыкание класса $P^1R(\Omega)$ в метрике пространства $W^1P(\Omega)\cap R(\Omega)$, порождаемой нормой $\|f\| = \|f;W^1P\| + \|f;R\|$. При определенных предположениях пространства $\mathscr{P}^1\mathscr{R}(\Omega)$ и $W^1P(\Omega)\cap R(\Omega)$ совпадают; например, это произойдет, если $W^1P(\Omega)\cap R(\Omega)\subset C(\Omega)$.

Подобные вопросы в достаточно общей ситуации обсуждаются в [2, с. 321; 4, с. 137]. Неравенства (15), (16), (18) могут быть распространены на класс $\mathscr{P}^1\mathscr{R}(\Omega)$. В частности, справедлива

Лемма 4. *Если неравенство* (15) *верно для всех функций f из $P^1R(\Omega)$, то оно имеет место и для любой функции f из $\mathscr{P}^1\mathscr{R}(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть

$$\partial_-(\varphi) = \big\{(a,b) \in \mathbb{R}^2_+,\ \varphi(\xi,\eta) \le a\xi + b\eta \forall(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2_+\big\}.$$

Как известно (см., например, [15]), $\partial_-(\varphi) \ne \varnothing$,

$$\varphi(\xi,\eta) = \inf\{a\xi + b\eta,\, (a,b) \in \partial_-(\varphi)\}. \tag{19}$$

Фиксируем функцию f из $\mathscr{P}^1\mathscr{R}(\Omega)$ и вектор (a,b) из $\partial_-(\varphi)$. Так как $f \in \mathscr{P}^1\mathscr{R}(\Omega)$, то существует последовательность f_i из $P^1R(\Omega)$ такая, что $\|f-f_i\| \to 0$ при $i \to \infty$. По предположению (15) верно для функций из $P^1R(\Omega)$, поэтому

$$\|f_i - f_j; Q\| \le C\varphi(\|f_i - f_j; W^1P\|, \|\|f_i - f_j; R\|) \\ \le Ca\|f_i - f_j; W^1P\| + Cb\|f_i - f_j; R\|,$$

$$\|f_i; Q\| \le C\varphi(\|f_i; W^1P\|,\, \|f_i; R\|) \le Ca\|f_i; W^1P\| + Cb\|f_i; R\|.$$

Устремляя i, j к ∞, получаем, что предельная функция f принадлежит пространству $Q(\Omega)$ и

$$\|f; Q\| \le Ca\|f; W^1P\| + Cb\|f; R\|.$$

Последняя оценка и равенство (19) влекут неравенство (15). Лемма доказана.

Из теоремы 4 и леммы 4 вытекает

Следствие 2. *Пусть $f \in (\mathscr{L})$ и $Q \overset{\varphi}{\prec} \{P,R\}$. Тогда неравенство* (15) *для всех функций f из $\mathscr{P}^1\mathscr{R}(\Omega)$ справедливо тогда и только тогда, когда $\Omega \in I(P,Q,R)$.*

4. Функциональные неравенства для симметричных пространств. Остановимся на модификациях теорем 1, 2, относящихся к специальному классу функций одного переменного. Пусть $\mathscr{G} = (0,d)$ $(0 < d < \infty)$; $P(\mathscr{G})$, $Q(\mathscr{G})$, $R(\mathscr{G})$ — БИП измеримых относительно mes_1 скалярных функций на $\mathscr{G}$, $P'(\mathscr{G})$ — двойственное [6, 8] к $P(\mathscr{G})$ пространство. Обозначим через $W_+(\mathscr{G})$ совокупность функций $f : (0,d] \to \mathbb{R}$, обладающих свойствами:

1) f абсолютно непрерывны на каждом отрезке $[\varepsilon, d]$ $(0 < \varepsilon < d)$;

2) $f'(x) \le 0$ п.в.;

3) $f(d) = 0$.

Функцию f класса $W_+(\mathscr{G})$ назовем допустимой, если $f' \in P = P(\mathscr{G})$, $f \in R = R(\mathscr{G})$. Приведем критерии справедливости функциональных неравенств

$$\|f; Q\| \le C_+\varphi(\|f', P\|,\, \|f; R\|), \tag{7_+}$$

$$\nu_Q(f) \le B_+\varphi(\|f', P\|,\, \|f; R\|). \tag{8_+}$$

Как и в аналогичных им равенствах (7), (8), $\varphi \in (\mathscr{L})$, f — допустимая функция. Если $C_+(P,Q,R)$, $B_+(P,Q,R)$ — наименьшие из констант C_+, B_+, для которых имеют место (7_+), (8_+) соответственно, то $B_+(P,Q,R) \le C_+(P,Q,R)$.

Постоянные $B_+(P,Q,R)$, $C_+(P,Q,R)$ можно оценить через постоянную $A_+(P,Q,R)$, определяемую как наименьшую из констант A_+, для которых справедливо неравенство

$$\|1_{(0,a]}; Q\| \le A_+\varphi(\|1_{[a,b]}; P'\|^{-1},\, \|1_{(0,b]}; R\|), \tag{9_+}$$

A_+ не зависит от чисел a, b, $0 < a < b < d$. Если подобных констант не существует, полагаем $A_+(P,Q,R) = \infty$; аналогичное замечание относится и к постоянным $B_+(P,Q,R)$, $C_+(P,Q,R)$.

Теорема 5. *Неравенство* (8) *справедливо в том и только том случае, если* $A_+(P, Q, R) < \infty$*; при этом* $A_+(P, Q, R) \le B_+(P, Q, R) \le 2A_+(P, Q, R)$.

Доказательство. Неравенство (9_+) — вариант неравенства (9), а доказательство теоремы 5 проводится по схеме, использованной при доказательстве теоремы 1. Как отмечалось в п. 2, при доказательстве теорем 1, 2 используются проводники $(F, \mathscr{G})$ специального вида, для которых F, $\mathscr{G}$ совпадают с лебеговыми множествами функции f. Для функции f класса $W_+(\mathscr{G})$ лебеговы множества $F = \{x \in \mathscr{G}, |f(x)| \ge t\}$, $\mathscr{G} = \{x \in \mathscr{G}, |f(x)| > s\}$ $(0 < s < t < \infty)$ суть промежутки $(0, a]$ и $(0, b)$ $(0 < a < b < d)$ соответственно. Фигурирующая в (9) емкость $c_P(F, \mathscr{G})$ для определяемого таким образом проводника $(F, \mathscr{G})$ совпадает со значением экстремальной задачи

$$\|f'; P\| \to \inf, \quad \int\limits_a^b f'(x)\,dx = -1,$$

сводящейся к проблеме моментов

$$\|v; P\| \to \inf, \quad l(v) = \int\limits_a^b v(x)\,dx = 1. \tag{20}$$

Как хорошо известно, значение задачи (20) равно $\|l\|^{-1}$, где $\|l\|$ — норма линейного функционала $l : P(\mathscr{G}) \to \mathbb{R}$. Отсюда вытекает равенство $c_P(F, \mathscr{G}) = \|1_{[a,b]}; P'\|^{-1}$, а вместе с ним и теорема 5. Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть* $\varphi \in (\mathscr{L})$ *и* $Q \overset{\varphi}{\prec} \{P, R\}$. *Тогда неравенство* ($7_+$) *имеет место в том и только том случае, если* $A_+(P, Q, R) < \infty$*; при этом* $A_+(P, Q, R) \le C_+(P, Q, R) \le 8kA_+(P, Q, R)$, *постоянная* k *та же, что и в неравенстве* (3).

Доказательство такое же, как и в теореме 5. Следует лишь вместо теоремы 1 использовать теорему 2. Теорема доказана.

Для выполнения (9_+) достаточно, чтобы имело место аналогичное оценке (13) однопараметрическое неравенство

$$\|1_{(0,a]}; Q\| \le \mathscr{A}_+ \varphi(\|1_{[a,d]}; P'\|^{-1}, \|1_{(0,a]}; R\|),$$

постоянная $\mathscr{A}_+$ не зависит от выбора a из $(0, d)$.

Применим предшествующие результаты к СП функций на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ [5, 8].

Вначале рассмотрим случай, когда $P = P(\Omega, \mathbb{R}^n)$ — изотропное СП вектор-функций. Более точно, пусть

$$\|y; P\| = \||y|; E\| \quad (y \in P), \tag{21}$$

где $E = E(\Omega)$ — максимальное СП [8, с. 141] скалярных функций на Ω.

Пусть $0 < m_0 < \mathrm{mes}_n\,\Omega$, $\lambda : (0, m_0) \to \mathbb{R}$ — функция, определяемая равенством

$$\lambda(s) = \inf h_{n-1}(\partial_\Omega Y), \tag{22}$$

где Y — любое подмножество Ω с локально липшицевой относительно Ω частью границы $\partial_\Omega Y$ такое, что $m_0 \ge \mathrm{mes}_n\,Y \ge s$, $h_{n-1}(\partial_\Omega Y)$ — $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа множества $\partial_\Omega Y$. Функция λ изучена в работах [4, 17]. Как показано в [17], $\lambda(s) > 0$. Если область Ω удовлетворяет условию конуса, то $\lambda(s) \geq k_0 s^{1-1/n}$ $(k_0 > 0)$.

Равенства (21), (22) влекут [18] оценку

$$\|\nabla f; P\| \geq \left\| \frac{df^*}{ds}\lambda; E(\mathscr{G}) \right\|, \tag{23}$$

где $f \in CW(\Omega, \Omega_0)$ $(\Omega_0 \in \omega(m_0))$, $f^* : (0, \mathrm{mes}_n\,\Omega] \to \mathbb{R}$ — перестановка функции f в убывающем порядке [8, с. 83; 19], $\mathscr{G} = (0, m_0)$, $E(\mathscr{G})$ — порождаемое E СП функций на $\mathscr{G}$. Отметим [18, 19], что функция f^* убывает, абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[\varepsilon, \mathrm{mes}_n\,\Omega]$ $(0 < \varepsilon < \mathrm{mes}_n\,\Omega)$, $f^*(s) = 0$ при $s \in [m_0, \mathrm{mes}_n\,\Omega]$, в частности, $f^* \in W_+(0, \mathrm{mes}_n\,\Omega)$.

Если R, Q — СП функций на Ω, то

$$\|1_{(0,a]}; Q\| = \Psi_Q(a), \quad \|1_{(0,b]}; R\| = \Psi_R(b),$$

где Ψ_Q, Ψ_R — фундаментальные функции [8] СП Q, R. Справедливы равенства

$$\|f; R\| = \|f^*; R(\mathscr{G})\|, \quad \|f; Q\| = \|f^*, Q(\mathscr{G})\|, \quad \nu_Q(f) = \nu_Q(f^*); \tag{24}$$

здесь $f \in CW(\Omega, \Omega_0)$; $R(\mathscr{G})$ $((Q(\mathscr{G}))$ — порождаемые R, Q СП функций на $\mathscr{G}$.

Теорема 7. *Пусть функция* $\lambda : (0, m_0) \to \mathbb{R}$ *определена равенством* (22). *Пусть существует такая константа* A_+, *что*

$$\Psi_Q(a) \leq A_+ \varphi(\|1_{[a,b]}(1/\lambda); E'\|^{-1}, \Psi_R(b)), \tag{25}$$

где $0 < a < b < m_0$. *Тогда область* Ω *принадлежит классу* $I(P, Q, R)$.

Доказательство. Согласно результатам п. 3 включение $\Omega \in I(P, Q, R)$ равносильно неравенству (8), в котором постоянная B не зависит от выбора области Ω_0 и функции f класса $CW(\Omega, \Omega_0)$, удовлетворяющих предположениям $\Omega_0 \in \omega(m_0)$, $\nabla f \in P(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $f \in R(\Omega)$. Из соотношений (23), (24) вытекает, что (8) имеет место, если

$$\nu_Q(f^*) \leq B\varphi\left(\left\| \frac{df^*}{ds}\lambda; E \right\|, \|f^*; R\| \right), \tag{26}$$

где $E = E(0, m_0)$, $R = R(0, m_0)$. Неравенство (26) аналогично неравенству (8) и получается из него заменой f на f^*, B_+ на B, пространство P заменяется пространством E с весом λ так, что $\|v; P\| = \|v\lambda; E\|$. Поскольку $\|w; P'\| = \left\|\frac{w}{\lambda}; E'\right\|$, включение $\Omega \in I(P, Q, R)$ вытекает из теоремы 5. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если справедлива оценка* (25), *то*

1) *имеет место неравенство* (16);

2) *при дополнительном условии* $Q \overset{\varphi}{\prec} \{P, R\}$ *верны неравенства* (15), (18).

Действительно, утверждение 1 вытекает из теорем 3, 7. Утверждение 2 следует из теорем 4, 7.

Следствие 2. *Пусть*

$$\gamma_E(b) = \lim_{a \to +0} \|1_{[a,b]}(1/\lambda); E'\|^{-1}.$$

Если верно неравенство

$$\varphi(\gamma_E(b), \Psi_R(b)) \geq k_0 \quad (0 < b < m_0) \tag{27}$$

с некоторой постоянной $k_0 > 0$, *то* $\Omega \in I(P, L_\infty, R)$.

Для доказательства достаточно заметить, что

$$\Psi_{L_\infty}(a) = 1, \quad \left\| 1_{[a,b]} \frac{1}{\lambda}; E' \right\|^{-1} \geq \gamma_E(b) \text{ при } a > 0.$$

Поэтому (27) влечет (25). Поскольку $\sigma(L_\infty) = l_\infty$, то $L_\infty \overset{\varphi}{\prec} \{P, R\}$. Следовательно, согласно теореме 4 из оценки (27) вытекает неравенство (15) с $Q = L_\infty(\Omega)$.

Теперь рассмотрим случай, когда $P = P_1 \times \cdots \times P_n$, где $P_i = P_i(\Omega)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — максимальные СП функций на Ω, норма $\|y; P\|$ вектор-функции $y = (y_1, \ldots, y_n)$ связана с нормами ее компонент $y_1, \ldots, y_n$ равенством

$$\|y; P\| = \|y_1; P_1\| + \cdots + \|y_n; P_n\|.$$

Сопоставим набору $P_1, \ldots, P_n$ пространство средних Кальдерона [5, 16], состоящее из измеримых функций $v : \Omega \to \mathbb{R}$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|v; E\| = \inf\{k > 0 : |v| \leq k \sqrt[n]{|v_1 \ldots v_n|}, \|v_i; P_i\| \leq 1, \ i = 1, \ldots n\}.$$

Как известно, E — максимальное СП.

Фиксируем непустое открытое подмножество Ω_0 множества Ω, для которого $\Omega \setminus \mathrm{cl}_\Omega \Omega_0$ также непустое открытое подмножество Ω. Обозначим через $W^1P(\Omega, \Omega_0)$ часть пространства Соболева $W_1^1(\Omega)$, состоящую из функций f, равных 0 на $\Omega \setminus \mathrm{cl}_\Omega \Omega_0$ и имеющих конечную норму $\|\nabla f; P\|$. Для функции f из $W^1P(\Omega, \Omega_0)$ конечно среднее геометрическое

$$\mathfrak{G}(f) = \sqrt[n]{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}; P_1 \right\| \ldots \left\| \frac{\partial f}{\partial x_n}; P_n \right\|}$$

норм частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ функции f по переменным x_i в пространствах P_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Предложение 2 [20]. *Пусть существует такой куб*

$$K(\rho) = \{x = (x_1, \ldots, x_n), \ 0 < \delta_i x_i < \rho, \ |\delta_i| = 1, \ i = 1, \ldots, n \ (\rho > 0)\},$$

что $\Omega_0 + K(\rho) \subset \Omega$. *Тогда имеет место оценка*

$$\mathfrak{G}(f) \geq \left\| \frac{df^*}{ds} s^{1-1/n)}; E \right\|, \tag{28}$$

где f^* *— перестановка в убывающем порядке функции* f *из* $W^1P(\Omega, \Omega_0)$.

Из результатов [18–20] следуют равенство

$$f^*(s) = 0 \quad (m_0 = \mathrm{mes}_n \Omega_0 \leq s \leq \mathrm{mes}_n \Omega)$$

и включение

$$f^* \in W_+(0, \mathrm{mes}_n \Omega).$$

Оценка (28) влечет неравенство

$$\varphi(\mathfrak{G}(f), \|f; R\|) \geq \varphi\left(\left\| \frac{df^*}{ds} s^{1-1/n)}; E \right\|, \|f; R\| \right). \tag{29}$$

Теорема 8. *Пусть выполнены условия предложения* 2. *Пусть справедлива оценка* (25) *с* $\lambda(s) = s^{1-1/n}$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\nu_Q(f) \leq B\varphi(\mathfrak{G}(f),\, \|f; R\|),$$

в котором постоянная B *не зависит от* f *из* $W^1P(\Omega, \Omega_0)$. *При дополнительном условии* $Q \overset{\varphi}{\prec} \{E, R\}$ *верно неравенство*

$$\|f; Q\| \leq C\varphi(\mathfrak{G}(f),\, \|f; R\|) \tag{30}$$

с постоянной C, *одинаковой для функций* f *из* $W^1P(\Omega, \Omega_0)$.

Доказательство очевидным образом выводится из соотношений (28), (24) и теорем 5, 6.

Следствие. *Если в условиях теоремы* 8

$$\tau_E^{\delta}\tau_R^{1-\delta} \subset \sigma_Q \quad (0 < \delta < 1),$$

то справедливо мультипликативное неравенство

$$\|f; Q\| \leq C \left\| \frac{df}{dx_n}; P_1 \right\|^{\delta/n} \ldots \left\| \frac{df}{dx_n}; P_n \right\|^{\delta/n} \|f; R\|^{1-\delta} \quad (f \in W^1P(\Omega, \Omega_0)).$$

Комбинируя развитый в п. 3 подход с результатами статьи [20], можно установить аналоги неравенства (30) для функций f из $W^1P(\Omega)$. Предполагается, что область Ω удовлетворяет условию бруса [20]. Жесткость этого требования зависит от степени анизотропности пространства P.

Следует подчеркнуть, что даже для изотропного СП P приведенное в теореме 7 условие включения $\Omega \in I(P, Q, R)$ является лишь достаточным. Как и для классических пространств Соболева [4, § 4, 5], критерий справедливости мультипликативных неравенств типа теорем вложения нельзя сформулировать в терминах функции $\lambda(\cdot)$; в данной ситуации становится неизбежным привлечение емкостных характеристик множеств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П, Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
3. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
4. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
5. *Брудный Ю. А., Крейн С. Р., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 2. С. 3–163. (Итоги науки и техники).
6. *Забрейко П. П.* Идеальные пространства вектор-функций // Докл. АН СССР. 1987. Т. 31, № 4. С. 298–301.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
8. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
9. *Бережной Е. И.* Точные оценки операторов на конусах в идеальных пространствах // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1993. Т. 204. С. 3–36.
10. *Климов В. С.* Функциональные неравенства и обобщенные емкости // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 1. С. 41–54.
11. *Климов В. С., Панасенко Б. С.* Геометрические свойства идеальных пространств и емкости множеств // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 573–586.

12. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.

13. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклые анализ. М.: Мир, 1973.

14. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ и его применения в математике и экономике. М.: Наука, 1985.

15. *Лозановский Г. Я.* Преобразования банаховых идеальных пространств с помощью выпуклых функций // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль: Изд-во Яросл. гос. ун-та, 1978. Т. 3. С. 122–148.

16. *Кальдерон А. П.* Промежуточные пространства и интерполяция. Комплексный метод // Математика. 1965. Т. 9, № 3. С. 56–129.

17. *Мазья В. Г.* О слабых решениях задач Дирихле и Неймана // Тр. Моск. мат. о-ва. 1969. Т. 20. С. 137–172.

18. *Климов В. С.* Теоремы вложения для пространств Орлича и их приложения к краевым задачам // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 2. С. 334–348.

19. *Коляда В. И.* Перестановки функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, № 5. С. 61–95.

20. *Климов В. С.* К теоремам вложения анизотропных классов функций // Мат. сб. 1985. Т. 127, № 2. С. 198–208.

Статья поступила 18 октября 2001 г.

Климов Владимир Степанович
Ярославский гос. университет, кафедра математического анализа,
ул. Советская, 14, Ярославль 150054