Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 519.21

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

О. Ш. Шарипов

Аннотация: Рассматриваются ограниченный и компактный законы повторного логарифма для слабо зависимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве. Для последовательностей одинаково распределенных гильбертовозначных случайных величин, удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания, при оптимальных моментных условиях доказываются ограниченный и компактный законы повторного логарифма.

Ключевые слова: закон повторного логарифма, гильбертовозначная случайная величина, условие перемешивания.

Введение и формулировка результатов

В работе мы рассмотрим два вида закона повторного логарифма: ограниченный и компактный. Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность центрированных случайных величин (с.в.) со значениями в сепарабельном банаховом пространстве B (с нормой $\|\cdot\|$ и сопряженным пространством B^*).

Положим

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad Lx = \max(1, \ln x), \quad a_n = \sqrt{2nLLn}.$$

Мы будем говорить, что $\{X_n, n \geq 1\}$ *удовлетворяет ограниченному закону повторного логарифма* (ОЗПЛ), если

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|S_n\|}{a_n} < \infty \quad \text{п. н.}$$

Будем говорить, что $\{X_n, n \geq 1\}$ *удовлетворяет компактному закону повторного логарифма* (КЗПЛ), если существует компактное множество $K \subset B$ такое, что

$$C(\{S_n/a_n\}) = K \ \text{ п. н.}, \quad \lim_{n\to\infty} \|S_n/a_n - K\| = 0 \ \text{ п. н.},$$

где $C(\{b_n\})$ означает множество предельных точек $\{b_n\}$ и

$$\|S_n/a_n - K\| = \inf_{x\in K} \|S_n/a_n - x\|.$$

ОЗПЛ и КЗПЛ для последовательностей с.в. со значениями в бесконечномерных пространствах исследовались многими авторами (см. [1–8] и библиографию в них). Необходимые и достаточные условия справедливости ОЗПЛ и

КЗПЛ для последовательностей независимых одинаково распределенных (н.о.р.) с.в. со значениями в любом сепарабельном банаховом пространстве получены в [4]. В частности, если B — банахово пространство типа 2 (определение см., например, в [3]), то для ОЗПЛ необходимы и достаточны условия:

$$EX_1 = 0, \quad Ef^2(X_1) < \infty \quad \text{для всех } f \in B^*, \tag{1.1}$$

$$E\left(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|}\right) < \infty, \tag{1.2}$$

а для КЗПЛ необходимо и достаточно выполнение условий (1.1), (1.2) и следующего:

$$C(f,g) = Ef(X_1)g(X_1), \quad f,g \in B^*, \text{ непрерывна в } *\text{-слабой топологии.} \tag{1.3}$$

Условие (1.3) эквивалентно свойству равномерной интегрируемости семейства $\{f^2(X_1),\ f \in B^*\}$; $C(f,g)$ называется *ковариационной функцией.*

ОЗПЛ и КЗПЛ для слабозависимых с.в. со значениями в гильбертовых и банаховых пространствах получены в [9, 10]. Кроме того, ОЗПЛ и КЗПЛ можно получать как следствие почти наверное принципа инвариантности (ПНПИ). С результатами по ПНПИ для слабозависимых с.в. со значениями в бесконечномерных пространствах можно ознакомиться в обзорной статье [11]. Но все выше упомянутые результаты имеют одно общее свойство: для выполнимости ОЗПЛ и КЗПЛ требуется существование момента $E\|X_k\|^{2+\delta}$, $k = 1, 2, \dots$, для некоторого $\delta > 0$.

В [12] автором доказано, что стационарная в узком смысле последовательность гильбертовозначных с.в. $\{X_n, n \geq 1\}$, для которой выполнены условия (1.1) и φ-перемешивания (с определенной скоростью убывания коэффициентов перемешивания) удовлетворяет ОЗПЛ тогда и только тогда, когда выполнено (1.2). Также было доказано, что (1.2) необходимо и достаточно для КЗПЛ, если $\{X_n, n \geq 1\}$ вдобавок удовлетворяет условию типа (1.3) (более точно это условие будет приведено ниже).

В [13] результаты работы [4] обобщены для стационарной в узком смысле последовательности банаховозначных с.в. $\{X_n, n \geq 1\}$, удовлетворяющей условию m-зависимости.

Целью настоящей статьи является получение ОЗПЛ и КЗПЛ для необязательно стационарной последовательности с.в. $\{X_n, n \geq 1\}$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H (с нормой $\|\cdot\|$, порожденной скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, и сопряженным пространством H^*). При этом мы будем предполагать, что $\{X_n, n \geq 1\}$ удовлетворяет условию φ-перемешивания.

Введем коэффициенты перемешивания

$$\varphi(n) = \sup\{|P(A/B) - P(A)| : k \in N,\ B \in F_1^k,\ A \in F_{n+k}^\infty,\ P(B) > 0\},$$

где F_a^b — σ-алгебра, порожденная с.в. $X_a, \dots, X_b$.

Роль ковариационной функции из (1.3) в дальнейшем будет играть

$$T(f,g) = \lim_{n\to\infty} \frac{Ef(S_n)g(S_n)}{n}, \quad f,g \in H^*,$$

что, очевидно, в случае н.о.р. с.в. совпадает с ковариационной функцией из (1.3).

Сформулируем результаты.

Теорема 1. *Пусть* $\{X_n, n \geq 1\}$ *— последовательность одинаково распределенных с.в. со значениями в* H, *удовлетворяющих следующим условиям:*

$$Ef(X_1) = 0, \quad Ef^2(X_1) < \infty \quad \text{для всех } f \in H^*, \tag{1.4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{\theta}}(2^k) < \infty \quad \text{для некоторого } \theta > 3, \tag{1.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Ef^2(S_n)}{n} = \sigma_f < \infty \quad \text{для всех } f \in H^*. \tag{1.6}$$

Тогда для того чтобы $\{X_n, n \geq 1\}$ *удовлетворяла ОЗПЛ, необходимо и достаточно, чтобы*

$$E\biggl(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|}\biggr) < \infty. \tag{1.7}$$

Теорема 2. *Пусть* $\{X_n, n \geq 1\}$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и*

$$T(f, g) \quad \text{непрерывна в } *\text{-слабой топологии.} \tag{1.8}$$

Тогда для того чтобы $\{X_n, n \geq 1\}$ *удовлетворяла КЗПЛ, необходимо и достаточно выполнение условия* (1.7).

Условие (1.6) обеспечивает существование $T(f, g)$, так как для любых $f, g \in H^*$ имеем $h = f + g \in H^*$ и

$$\frac{1}{n} Eh^2(S_n) = \frac{1}{n}(E^2 f(S_n) + 2Ef(S_n)g(S_n) + Eg^2((S_n)).$$

Остается перейти к пределу в обеих частях равенства и использовать условие (1.6).

Заметим, что условие (1.6) выполняется для слабо ортогональных последовательностей (см. [14]). Напомним, что последовательность $\{X_n, n \geq 1\}$ называется слабо ортогональной, если для всех $f \in H^*$ выполнено равенство

$$Ef(X_i)f(X_j) = 0 \quad i \neq j,\ i, j \geq 1.$$

Условию (1.6) также удовлетворяют слабо стационарные последовательности с определенным коэффициентом φ-перемешивания (см. [9, 10]). Последовательность $\{X_n, n \geq 1\}$ называется *слабо стационарной*, если

$$Ef(X_1)g(X_n) = Ef(X_{k+1})g(X_{k+n}) \quad \text{для всех } f, g \in H^*,\ n, k \geq 1.$$

Для того чтобы слабо стационарная последовательность удовлетворяла (1.6), достаточно выполнения следующего условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(k) < \infty,$$

так как (имея в виду одинаковую распределенность) имеем

$$\frac{1}{n} Ef^2(S_n) = Ef^2(X_1) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\biggl(1 - \frac{k}{n}\biggr) Ef(X_1)f(X_{1+k}).$$

Теперь выполнимость условия (1.6) вытекает из следующего известного неравенства:

$$|Ef(X_1)f(X_{1+k})| \leq \varphi^{1/2}(k) Ef^2(X_1).$$

Условия (1.4) и (1.6) (и определение $T(f, g)$) можно было записать, используя скалярное произведение, например

$$E\langle a, X_1\rangle = 0, \quad E(\langle a, X_1\rangle)^2 < \infty \quad \text{для всех } a \in H.$$

Доказательство результатов

При доказательстве теорем мы существенно используем метод разделения на блоки Бернштейна и методы, развитые в работе [2].

Доказательство теоремы 1. Достаточность. Всюду в дальнейшем буквой C будем обозначать абсолютные и неабсолютные константы, возможно, разные даже в одной цепочке неравенств. Они могут зависеть от разных параметров, но не зависят от индексов суммирования и от числа слагаемых (от n, p, q, m, r, k, i, j и т. д.). Необходимые утверждения будем формулировать в виде лемм. Ради удобства они приведены непосредственно перед их применением.

Пусть $\beta > 1$. Введем следующие обозначения:

$$n_k = [\beta^k], \quad I(k) = \{n_k + 1, \dots, n_{k+1}\}, \quad \tau_k = 2n_{k+1} LLn_{k+1} = \alpha^2_{n_{k+1}},$$

$$\Gamma = \sup_{x \in K} \|x\| = \sup_{\|f\| \le 1} (T(f, f))^{1/2},$$

$[k]$ — целая часть k. Отношение $a_n \sim b_n$ означает существование абсолютных констант $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ таких, что $c_1 < a_n/b_n < c_2$, $n = 1, 2, \dots$. Здесь K определяется в следующей лемме.

Лемма 1 [1]. *Пусть μ — вероятностная мера на H с ковариационной функцией $T(f, g)$. Рассмотрим отображение $S : H^* \to H$, определенное следующим образом:*

$$Sf = \int_H x f(x)\, d\mu(x),$$

где интеграл понимается в смысле Петтиса. Обозначим через H_μ замыкание образа S и в H_μ введем норму с помощью скалярного произведения

$$\langle Sf, Sg \rangle = \int_H f(x) g(x)\, d\mu(x) = T(f, g).$$

Тогда единичный шар K в H_μ будет замкнутым симметричным выпуклым множеством и для всех $f \in H^*$

$$\sup_{x \in K} f(x) = \left(\int_H f^2(y)\, d\mu(y) \right)^{1/2};$$

K компактно тогда и только тогда, когда $T(f, g)$ непрерывна в $*$-слабой топологии.

Существование вероятностной меры μ с ковариационной функцией $T(f, g)$ следует из утверждений гл. 3 (точнее, теоремы 2.2 на с. 142) книги [15]. При этом используются симметричность и положительная определенность $T(f, g)$.

Произведем срезку следующим образом:

$$u_j = X_j I(\|X_j\|^2 \le \tau_k) - E X_j I(\|X_j\|^2 \le \tau_k)), \quad j \in I(k),\ k = 1, 2, \dots,$$

$$w_j = X_j I(\|X_j\|^2 > \tau_k) - E X_j I(\|X_j\|^2 > \tau_k), \quad j \in I(k),$$

$$U_n = \sum_{j=1}^n u_j, \quad W_n = \sum_{j=1}^n w_j.$$

В определениях u_j и w_j $I(A)$ есть индикатор события A.

Покажем, что для всех $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|U_n\|}{a_n} \le \Gamma + \varepsilon \quad \text{п. н.}, \tag{2.1}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|W_n\|}{a_n} = 0 \quad \text{п. н.}, \tag{2.2}$$

из которых в силу произвольности ε вытекает

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|S_n\|}{a_n} \le \Gamma \quad \text{п. н.} \tag{2.3}$$

Заметим, что достаточно доказать (2.3) при условии $\Gamma > 0$. Ради полноты доказательства приведем рассуждения из [13, с. 712], обосновывающее это замечание. Предположим, что для случая $\Gamma > 0$ соотношение (2.3) доказано. Пусть последовательность $\{X_n, n \ge 1\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и для нее $\Gamma = 0$. Для фиксированного ненулевого $x \in H$ рассмотрим последовательность $\{X_n + \varepsilon_n x, n \ge 1\}$, где $\{\varepsilon_n, n \ge 1\}$ — последовательность н.о.р. с.в. с распределением

$$P(\varepsilon_1 = 1) = P(\varepsilon_1 = -1) = 1/2$$

и последовательности $\{X_n, n \ge 1\}$ и $\{\varepsilon_n, n \ge 1\}$ независимы. Легко видеть, что последовательность $\{X_n + \varepsilon_n x, n \ge 1\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тем самым

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \left\| \sum_{k=1}^n (X_k + \varepsilon_k x) \right\| \le \sup_{\|f\|\le 1} T_1^{1/2}(f,f) = \|x\| \quad \text{п. н.},$$

где

$$T_1(f,f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Ef^2\left(\sum_{k=1}^n (X_k + \varepsilon_n x) \right).$$

Из закона повторного логарифма Хартмана — Винтнера имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \right| = 1 \quad \text{п. н.}$$

Далее,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \left\| \sum_{k=1}^n X_k \right\| \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \left\| \sum_{k=1}^n (X_k + \varepsilon_k x) \right\| + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x \right\| \le 2\|x\| \text{ п. н.}$$

Устремляя x к нулю, придем к (2.3) в случае $\Gamma = 0$.

В дальнейшем будем считать, что $\Gamma > 0$.

Лемма 2. *Если выполнено условие* (1.7), *то имеет место* (2.2).

Эта лемма доказана в [2] для случая независимых с.в., но без применения свойства независимости. Вновь ради полноты мы приведем доказательство этой леммы из [2].

Доказательство леммы 2. Из условия (1.7) и леммы Бореля — Кантелли следует, что для (2.2) достаточно доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \left\| \sum_{j=1}^n EX_j I(\tau_k < \|X_j\|^2) \right\| = 0.$$

В свою очередь, для последнего соотношения достаточно доказать, что

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j\in I(k)} E(\|X_j\|I(\tau_k<\|X_j\|^2))/\sqrt{n_rLLn_r}=0.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{j\in I(k)}\frac{E(\|X_j\|I(\tau_k<\|X_j\|^2))}{\sqrt{n_rLLn_r}}\le\sum_{k=1}^{r}\frac{n_{k+1}-n_k}{\sqrt{n_rLLn_r}}E(\|X_1\|I(\tau_k<\|X_1\|^2))$$
$$\le c\sum_{k=1}^{r}\frac{n_{k+1}-n_k}{\sqrt{n_rLLn_r}}E\biggl(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|}I(\tau_k<\|X_1\|^2)\biggr)\frac{LL\tau_k}{\tau_k^{1/2}}.$$

Теперь необходимое для нас соотношение вытекает из того, что

$$\lim_{k\to\infty}E\biggl(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|}I(\tau_k<\|X_1\|^2)\biggr)=0$$

и

$$\sum_{k=1}^{r}(n_{k+1}-n_k)\frac{LL\tau_k}{\tau_k^{1/2}}=O\biggl(\sqrt{LLn_r}\sum_{k=1}^{r}\beta^{k/2}\biggr).$$

Лемма 2 доказана.

Докажем (2.1). Покажем существование такого $\beta>1$, что

$$\limsup_{r\to\infty}\max_{n\in I(r)}\biggl\|\frac{U_n}{a_n}\biggr\|\le\Gamma+\varepsilon\quad\text{п. н.}\tag{2.4}$$

В силу возрастания a_n имеем

$$\max_{n\in I(r)}\biggl\|\frac{U_n}{a_n}\biggr\|\le\frac{a_{n_{r+1}}}{a_{n_r}}\max_{n\in I(r)}\biggl\|\frac{U_n}{a_{n_{r+1}}}\biggr\|\le\sqrt{\beta}\max_{n\in I(r)}\biggl\|\frac{U_n}{a_{n_{r+1}}}\biggr\|\quad\text{п. н.}$$

Так как мы можем выбрать β сколь угодно близким к единице, для (2.4) достаточно доказать, что

$$\limsup_{r\to\infty}\max_{n\in I(r)}\biggl\|\frac{U_n}{a_{n_{r+1}}}\biggr\|\le\Gamma+\varepsilon\quad\text{п. н.}\tag{2.5}$$

Теперь произведем секционирование (разделение на блоки) следующим образом. Зафиксировав $n\in I(r)$, для натуральных p и q положим

$$\xi_i=\sum_{j=(p+q)(i-1)+1}^{(p+q)(i-1)+p}u_j,\quad \eta_i=\sum_{j=(p+q)i-q+1}^{(p+q)i}u_j.$$

Для $n\in I(r)$ имеем

$$U_n=\sum_{i=1}^{m}\xi_i+\sum_{i=1}^{k}\eta_i+U_0,$$

где U_0 — «остаток», получающийся после блокирования $\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2,\dots$, до тех пор пока для очередного ξ или η не будет достаточного количества X_i. Заметим, что

$$m=m(n),\quad k=k(n),\quad |m-k|\le1.$$

Выбираем

$$p = \left[\frac{\beta^r}{r^\gamma}\right], \quad 2 < \gamma < \theta - 1, \quad q = [\beta^{\alpha r}], \quad 0 < \alpha < 1. \tag{2.6}$$

Тогда $m \sim k \sim r^\gamma$.

Далее,

$$\limsup_{r\to\infty} \max_{n\in I(r)} \left\| \frac{U_n}{a_{n_{r+1}}} \right\| \le \limsup_{r\to\infty} \max_{n\in I(r)} \frac{1}{a_{n_{r+1}}} \left\| \sum_{i=1}^{m} \xi_i \right\| + \limsup_{r\to\infty} \max_{n\in I(r)} \frac{1}{a_{n_{r+1}}} \left\| \sum_{i=1}^{k} \eta_i \right\| + \limsup_{r\to\infty} \max_{n\in I(r)} \left\| \frac{U_0}{a_{n_{r+1}}} \right\| \quad \text{п. н.} \tag{2.7}$$

Покажем, что два последних слагаемых в правой части (2.7) п. н. равны нулю. При этом мы существенно будем использовать моментные неравенства, доказанные в [16], которые сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть $\{X_n, n \ge 1\}$ — последовательность центрированных с.в. со значениями в H, удовлетворяющая* (1.5). *Тогда для $t \ge 2$ имеет место следующее неравенство:*

$$E \max_{1\le k\le n} \|S_k\|^t \le C\left(\sum_{k=1}^{n} E\|X_k\|^t + \left(\sum_{k=1}^{n} E\|X_k\|^2\right)^{t/2}\right).$$

Применяя лемму 3 и простое неравенство

$$E\|X_1 I(\|X_1\|^2 \le \tau_r) - EX_1 I(\|X_1\|^2 \le \tau_r)\|^2 \le 4E\|X_1\|^2 I(\|X_1\|^2 \le \tau_r),$$

получим

$$\sum_{r=1}^{\infty} P\left(\max_{n\in I(r)} \left\| \frac{U_0}{a_{n_{r+1}}} \right\| > \varepsilon\right) \le \sum_{r=1}^{\infty} \frac{E \max_{n\in I(r)} \|U_0\|^2}{\varepsilon^2 a^2_{n_{r+1}}} \le \sum_{r=1}^{\infty} \frac{CpE(\|X_1\|^2 I(\|X_1\|^2 \le \tau_r))}{\varepsilon^2 a^2_{n_{r+1}}}$$
$$\le \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Cp}{\varepsilon^2 \beta^r} E\left(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|} I(\|X_1\|^2 \le \tau_r) \frac{LL\|X_1\|}{LL\tau_r}\right).$$

Из (2.6) вытекает сходимость последнего ряда.

Точно так же

$$\sum_{r=1}^{\infty} P\left(\max_{n\in I(r)} \left\| \frac{1}{a_{n_{r+1}}} \sum_{i=1}^{k} \eta_i \right\| > \varepsilon\right) \le \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2 a^2_{n_{r+1}}} E \max_{n\in I(r)} \left\| \sum_{i=1}^{k} \eta_i \right\|^2$$
$$\le \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Ckq}{\varepsilon^2 a^2_{n_{r+1}}} E(\|X_1\|^2 I(\|X_1\|^2 \le \tau_r))$$
$$\le \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Ckq}{\varepsilon^2 \beta^r} E\left(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|} I(\|X_1\|^2 \le \tau_r) \frac{LL\|X_1\|}{LL\tau_r}\right).$$

Опять (2.6) влечет сходимость последнего ряда. Следовательно, по лемме Бореля — Кантелли два последних слагаемых в правой части (2.7) п. н. равны нулю.

Для того чтобы оценить первое слагаемое в правой части неравенства (2.7), сначала приходим к неравенству

$$\sup_{n\in I(r)} P\Bigg(\Bigg\|\sum_{i=1}^{m(n)}\xi_i-\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])}\xi_i\Bigg\|>\frac{\varepsilon}{2}a_{n_{r+1}}\Bigg)$$

$$\le \sup_{n\in I(r)} P\Bigg(\Bigg\|\sum_{i=m(n)+1}^{m([\beta^{r+1}])}\xi_i\Bigg\|>\frac{\varepsilon}{2}a_{n_{r+1}}\Bigg)\le C\frac{1}{a_{n_{r+1}}}\sup_{n\in I(r)}\Bigg\|\sum_{i=m(n)+1}^{m([\beta^{r+1}])}\xi_i\Bigg\|$$

$$\le \frac{C}{a_{n_{r+1}}}\bigg(\bigg[\frac{\beta^{r+1}}{p}\bigg]-\bigg[\frac{\beta^{r}}{p}\bigg]\bigg)^{1/2}\sup_{n\in I(r)}\max_{m(n)\le i\le m([\beta^{r+1}])}(E\|\xi_i\|^2)^{1/2}$$

$$\le C\frac{r^{\gamma/2}p^{1/2}}{a_{n_{r+1}}}(E\|X_1I(\|X_1\|^2\le\tau_r)-EX_1I(\|X_1\|^2\le\tau_r)\|^2)^{1/2}$$

$$\le C\frac{\beta^{r/2}LL\tau_r}{a_{n_{r+1}}}\bigg\{E\bigg(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|}I(\|X_1\|^2\le\tau_r)\frac{LL\|X_1\|}{LL\tau_r}\bigg)\bigg\}^{1/2}$$

$$\le C\bigg\{E\bigg(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|}I(\|X_1\|^2\le\tau_r)\frac{LL\|X_1\|}{LL\tau_r}\bigg)\bigg\}^{1/2}. \quad (2.8)$$

Последняя величина при $r\to\infty$ стремится к нулю.

Теперь используем следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть $\{X_n, n\ge 1\}$ — φ-перемешивающаяся последовательность с.в. со значениями в H. Если для некоторого a*

$$\min_{1\le j\le n} P(\|S_n-S_j\|<a)-\varphi(1)>0,$$

то для всех $x\in R$

$$P(\max_{1\le k\le n}\|S_k\|>x)\le(\min_{1\le j\le n}P(\|S_n-S_j\|<a)-\varphi(1))^{-1}P(\|S_n\|>x-a).$$

Эта лемма доказана в [17] для одномерных с.в. Для гильбертовозначных с.в. лемма доказывается точно так же, с той лишь разницей, что вместо абсолютного значения надо использовать норму.

Выбирая r настолько большим, чтобы выполнялось $\varphi(q)<1$, и применяя (2.8) и лемму 4, получим

$$P\Bigg(\max_{n\in I(r)}\Bigg\|\sum_{i=1}^{m(n)}\xi_i\Bigg\|>(\Gamma+\varepsilon)a_{n_{r+1}}\Bigg)\le CP\Bigg(\Bigg\|\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])}\xi_i\Bigg\|>\Big(\Gamma+\frac{\varepsilon}{2}\Big)a_{n_{r+1}}\Bigg).$$

Дальнейшая наша цель — показать, что

$$\sum_{r=1}^{\infty}P\Bigg(\Bigg\|\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])}\xi_i\Bigg\|>\Big(\Gamma+\frac{\varepsilon}{2}\Big)a_{n_{r+1}}\Bigg)<\infty.$$

По теореме Беркеша — Филиппа [18] существует последовательность независимых с.в. $\{y_i\}$ в H таких, что y_i и ξ_i одинаково распределены и

$$P(\|\xi_i-y_i\|>6\varphi(q))\le 6\varphi(q),\quad i=1,2,\dots.$$

Так как из (1.5) и (2.6) имеем

$$\sum_{r=1}^{\infty} P\left(\left\| \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} (\xi_i - \eta_i) \right\| > \frac{\varepsilon}{4} a_{n_{r+1}} \right) \le \sum_{r=1}^{\infty} C m([\beta^{r+1}]) \varphi(q) < \infty,$$

нам остается доказать, что

$$\sum_{r=1}^{\infty} P\left(\left\| \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} y_i \right\| > \left(\Gamma + \frac{\varepsilon}{4}\right) a_{n_{r+1}} \right) < \infty. \tag{2.9}$$

Используем следующую лемму.

Лемма 5 (см. [2]). *Пусть $\{Z_i,\, i \ge 1\}$ — последовательность независимых предгауссовских с.в. со значениями в B, где B — банахово пространство типа 2, норма (точнее вторая производная Фреше нормы) которого удовлетворяет следующим условиям:*

а) $\sup\limits_{\|x\|=1} \left\| D_x^2 \right\|_1 < \infty$,

б) *D_x^2 удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α вне точки 0.*

Здесь D_x^2 означает вторую производную Фреше нормы в точке x и $\|\cdot\|_1$ — стандартную норму второй производной Фреше.

Тогда

$$\left| E\left(g\left(\sum_{j=1}^{n} Z_j \right) \right) - E\left(g\left(\sum_{j=1}^{n} G_j \right) \right) \right| < C(\delta, \Lambda, \alpha) \sum_{j=1}^{n} \|Z_j\|^{2+\alpha},$$

где $\{G_i, i \ge 1\}$ — последовательность независимых гауссовских с.в. в B таких, что G_i имеет тот же ковариационный оператор, что и Z_i, $g(x) = \Phi(\|x\|)$, $\Phi(t) = 0$ при $0 \le t \le \Lambda$, возрастает при $\Lambda \le t \le \Lambda + \delta$ и $\Phi(t) = 1$ при $t \ge \Lambda + \delta$, $\Lambda > 0$, $\delta > 0$; $C(\delta, \Lambda, \alpha)$ — константа, зависящая только от δ, Λ, α и не зависящая от $\{Z_i, i \ge 1\}$ и $\{G_i, i \ge 1\}$.

Так как последовательность $\{y_i, i \ge 1\}$ и гильбертово пространство удовлетворяют условиям леммы 5 (с $\alpha = 1$), то, выбирая $\Lambda = \Gamma + \varepsilon/8$, $\delta = \varepsilon/8$, получим

$$P\left(\left\| \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} y_i \right\| > \left(\Gamma + \frac{\varepsilon}{4}\right) a_{n_{r+1}} \right) \le E\left(g\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} y_i / a_{n_{r+1}} \right) \right)$$

$$\le E\left(g\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} G_i / a_{n_{r+1}} \right) \right) + C \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{E\|y_i\|^3}{a_{n_{r+1}}^3}. \tag{2.10}$$

Подставляя (2.10) в ряд (2.9), оценим второе слагаемое, используя лемму 3:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{E\|y_i\|^3}{a_{n_{r+1}}^3} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}]]} \frac{E\|\xi_i\|^3}{a_{n_{r+1}}^3}$$

$$\le \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{C}{a_{n_{r+1}}^3} \left[\sum_{j=(p+q)(i-1)+1}^{(p+q)(i-1)+p} E\|X_j I(\|X_j\|^2 \le \tau_r) - E X_j I(\|X_j\|^2 \le \tau_r)\|^3 \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{j=(p+q)(i-1)+1}^{(p+q)(i-1)+p} E\|X_j I(\|X_j\|^2 \le \tau_r) - E X_j I(\|X_j\|^2 \le \tau_r)\|^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right] = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности:

$$\mathrm{II} = \sum_{r=1}^{\infty}\Biggl(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])}\frac{C}{a^3_{n_{r+1}}}\sum_{j=(p+q)(i-1)+1}^{(p+q)(i-1)+p} E\|X_j I(\|X_j\|^2 \le \tau_r)$$

$$- EX_j I(\|X_j\|^2 \le \tau_r)\|^2\Biggr)^{\frac{3}{2}}$$

$$\le \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])}\frac{C}{a^3_{n_{r+1}}}p^{\frac{3}{2}}(E(\|X_1\|^2 I(\|X_1\|^2 \le \tau_r)))^{\frac{3}{2}}$$

$$\le \sum_{r=1}^{\infty}\frac{C\beta^{r+1}p^{\frac{3}{2}}}{pa^3_{n_{r+1}}}(E(\|X_1 I(\|X_1\|^2 \le \tau_r)))^{\frac{3}{2}}$$

$$\le \sum_{r=1}^{\infty}\frac{C\beta^{r+1}p^{\frac{1}{2}}(LL\tau_r)^{\frac{3}{2}}}{\beta^{\frac{3(r+1)}{2}}(LL\beta^{r+1})^{\frac{3}{2}}}\left(E\left(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|}I(\|X_1\|^2 \le \tau_r)\frac{LL\|X_1\|}{LL\tau_r}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\le \sum_{r=1}^{\infty}\frac{C}{r^{\frac{\gamma}{2}}}\left(E\left(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|}I(\|X_1\|^2 \le \tau_r)\frac{LL\|X_1\|}{LL\tau_r}\right)\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Из (2.6) вытекает сходимость последнего ряда.

Теперь оценим слагаемое I (ниже $\psi(x) = \log_\beta x$):

$$I = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])}\frac{C}{a^3_{n_{r+1}}}\Biggl(\sum_{j=(p+q)(i-1)+1}^{(p+q)(i-1)+p} E\|X_1 I(\|X_1\|^2 \le \tau_r)$$

$$- EX_1 I(\|X_1\|^2 \le \tau_r)\|^3\Biggr) \le \sum_{r=1}^{\infty}\frac{C\beta^{r+1}p}{pa^3_{n_{r+1}}}E(\|X_1\|^3 I(\|X_1\|^2 \le \tau_r))$$

$$\le \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{a^2_{n_{r+1}}}\frac{k^{\frac{3}{2}}P(k-1 \le \|X_1\|^2 \le k)}{\beta^{\frac{r\alpha}{2}}(LL\beta^r)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\le C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r \ge \psi(\frac{k}{4LLk})-1}\frac{k^{\frac{3}{2}}P(k-1 \le \|X_1\|^2 \le k)}{\beta^{\frac{r\alpha}{2}}(LL\beta^r)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\le C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{\frac{3}{2}}P(k-1 \le \|X_1\|^2 \le k)}{(\frac{k}{LLk})^{1/2}\bigl(LL(\frac{k}{LLk})\bigr)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\le C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{LLk}P(k-1 \le \|X_1\|^2 \le k) \le CE\left(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|}\right) < \infty.$$

Для установления (2.9) остается доказать, что

$$\sum_{r=1}^{\infty}E\left(g\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])}G_i/a_{n_{r+1}}\right)\right) < \infty. \tag{2.11}$$

Имеем

$$Eg\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} G_i/a_{n_{r+1}}\right) \le E\left(I\left(\left\|\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} G_i/a_{n_{r+1}}\right\| > \Gamma + \frac{\varepsilon}{8}\right)\right)$$
$$= P\left(\left\|\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} G_i/a_{n_{r+1}}\right\| > \Gamma + \frac{\varepsilon}{8}\right).$$

Покажем, что

$$\sum_{r=1}^{\infty} P\left(\left\|\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} G_i/a_{n_{r+1}}\right\| > \Gamma + \frac{\varepsilon}{8}\right) < \infty. \tag{2.12}$$

Для гауссовской с.в. G в H имеет место равенство (доказательство см. [2, с. 116])

$$P(\|G\| > t) = \exp\left\{\frac{(1-\delta)}{\delta\Lambda}E\|G\|^2 - \frac{(1-\delta)}{\Lambda}t^2\right\}, \quad \text{где } \delta > 0,\ \Lambda = 2\sup_{\|f\|\le 1} Ef^2(G).$$

Теперь берем

$$G = \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \frac{G_i}{\sqrt{n_{r+1}}}, \quad t = \left(\Gamma + \frac{\varepsilon}{8}\right)\sqrt{2LLn_{r+1}}.$$

Тогда $\Gamma_r = (\Lambda_r/2)^{1/2}$ и $E\|G\|^2 = o(LLn_{r+1})$, так как

$$\lim_{r\to\infty} E\left\|\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} G_i/a_{n_{r+1}}\right\|^2 \le \lim_{r\to\infty}\frac{1}{a^2_{n_{r+1}}}\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} E\|G_i\|^2$$
$$\le \lim_{r\to\infty}\frac{1}{a^2_{n_{r+1}}}\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} E\|\xi_i\|^2 \le \lim_{r\to\infty}\frac{C\beta^{r+1}p}{pa^2_{n_{r+1}}}E(\|X_1\|^2 I(\|X_1\|^2 \le \tau_r))$$
$$\le C\lim_{r\to\infty}\frac{E(\|X_1\|^2 I(\|X_1\|^2 \le \tau_r))}{LLn_{r+1}}$$
$$= C\lim_{r\to\infty} E\left(\frac{\|X_1\|^2}{LL\|X_1\|} I(\|X_1\|^2 \le \tau_r)\frac{LL\|X_1\|}{LLn_{r+1}}\right) = 0.$$

Выше мы использовали следующий факт о сходимости вторых моментов в центральной предельной теореме (см. [19]):

$$E\|G_i\|^2 = \lim_{n\to\infty} E\|(y_{i1} + \cdots + y_{in})/\sqrt{n}\|^2 = E\|y_{i1}\|^2 = E\|\xi_i\|^2,$$

где $\{y_{ik} : k \ge 1\}$ — независимые копии y_i.

Теперь покажем, что $\Gamma_r \to \Gamma$ при $r \to \infty$. Напомним, что

$$\Gamma_r = (\sup_{\|f\|\le 1} Ef^2(G))^{1/2} = \sup_{\|f\|\le 1}\left(Ef^2\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} G_i/\sqrt{n_{r+1}}\right)\right)^{1/2},$$

$$\Gamma = \sup_{\|f\|\le 1}(T(f,f))^{1/2} = \sup_{\|f\|\le 1}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{Ef^2(S_n)}{n}\right)^{1/2}.$$

Докажем следующее соотношение:

$$\left|Ef^2\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} G_i/\sqrt{n_{r+1}}\right) - \frac{Ef^2(S_{n_{r+1}})}{n_{r+1}}\right| \to 0 \quad \text{при } r \to \infty. \tag{2.13}$$

В силу независимости $\{G_i, i \ge 1\}$ и того факта, что G_i и y_i имеют одинаковый ковариационный оператор, получим

$$Ef^2\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} G_i/\sqrt{n_{r+1}}\right) = \frac{1}{n_{r+1}} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} Ef^2(G_i)$$
$$= \frac{1}{n_{r+1}} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} Ef^2(y_i) = \frac{1}{n_{r+1}} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} Ef^2(\xi_i). \quad (2.14)$$

Теперь докажем, что при $r \to \infty$

$$\left|\frac{1}{n_{r+1}} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} Ef^2(\xi_i) - \frac{1}{n_{r+1}} Ef^2\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \xi_i\right)\right| \to 0. \quad (2.15)$$

Используем следующую лемму, которая является частным случаем более общих результатов С. А. Утева [16].

Лемма 6. *Для центрированной последовательности с.в.* $\{X_n, n \ge 1\}$ *со значениями в гильбертовом пространстве имеет место следующее неравенство:*

$$\left|\sum_{\substack{i,j=1\\ |i-j|>1}}^{n} E\langle X_i, X_j\rangle\right| \le C \exp\left(\sum_{j=0}^{[\log_2 n]} \varphi^{1/2}(2^{i/3})\right) \sum_{j=0}^{[\log_2 n]} \varphi^{1/2}(2^{i/3}) \sum_{j=1}^{n} E\|X_j\|^2,$$

здесь C *— абсолютная константа.*

Используя лемму 6 для одномерных с.в. $f(\xi_i)$, а также лемму 3 и условие (1.5), получим

$$\left|\frac{1}{n_{r+1}}\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} Ef^2(\xi_i) - Ef^2\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \xi_i\right)\right)\right| = \left|\frac{1}{n_{r+1}}\left(\sum_{\substack{i,j=1\\ |i-j|>1}}^{n} Ef(\xi_i)f(\xi_j)\right)\right|$$
$$\le \frac{C}{n_{r+1}} \exp\left(2C\frac{\log_2 r}{r^2}\right)\frac{\log_2 r}{r^2} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} Ef^2(\xi_i)$$
$$\le \frac{C\exp\left(2C\frac{\log_2 r}{r^2}\right)\log_2 r}{\beta^r r^2} \sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} Ef^2\left(\sum_{j=(p+q)(i-1)+1}^{(p+q)(i-1)+p} u_j\right)$$
$$\le \frac{C\exp\left(2C\frac{\log_2 r}{r^2}\right)\log_2 r}{\beta^r r^2} r^\gamma p Ef^2(u_{(p+q)(m([\beta^{r+1}])-1)+p})$$
$$\le \frac{C\log_2 r}{r^2} Ef^2(u_{(p+q)(m([\beta^{r+1}])-1)+p}) \to 0 \quad \text{при } r \to \infty.$$

Теперь покажем, что при $r \to \infty$

$$\frac{1}{n_{r+1}}\left|Ef^2\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])} \xi_i\right) - Ef^2\left(\sum_{i=1}^{n_{r+1}} u_i\right)\right| \to 0. \quad (2.16)$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n_{r+1}}\left(Ef^2\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])}\xi_i\right)-Ef^2\left(\sum_{i=1}^{n_{r+1}}u_i\right)\right)\right| \\
&\quad=\left|\frac{1}{n_{r+1}}\left(Ef^2\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])}\xi_i\right)-Ef^2\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])}\xi_i+\sum_{i=1}^{k}\eta_i+U_0\right)\right)\right| \\
&\quad=\left|\frac{1}{n_{r+1}}\left(Ef^2\left(\sum_{i=1}^{k}\eta_i\right)+Ef^2(U_0)+2Ef\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])}\xi_i\right)f\left(\sum_{i=1}^{k}\eta_i\right)\right.\right. \\
&\qquad\qquad\left.\left.+\,2Ef\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])}\xi_i\right)f(U_0)+2Ef\left(\sum_{i=1}^{k}\eta_i\right)f(U_0)\right)\right|.
\end{aligned}$$

Сходимость последнего выражения к нулю вытекает из следующих пяти соотношений:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n_{r+1}}Ef^2\left(\sum_{i=1}^{k}\eta_i\right) &\le \frac{C}{n_{r+1}}\sum_{i=1}^{n}Ef^2(\eta_i)\le\frac{Ck\cdot q}{n_{r+1}}Ef^2(u_{(p+q)k}) \\
&\le\frac{Cr^\gamma\beta^{\alpha r}}{\beta^{r+1}}Ef^2(u_{(p+q)k})\to 0 \quad \text{при } r\to\infty;
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{n_{r+1}}Ef^2(U_0)\le\frac{C\cdot p}{n_{r+1}}Ef^2(u_{n_{r+1}})\le\frac{C\frac{\beta^r}{r^\gamma}}{\beta^{r+1}}Ef^2(u_{n_{r+1}})\to 0 \quad \text{при } r\to\infty;$$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2}{n_{r+1}}Ef\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])}\xi_i\right)f\left(\sum_{i=1}^{k}\eta_i\right)\right| \\
&\qquad\le\frac{2}{n_{r+1}}\left(Ef^2\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])}\xi_i\right)\right)^{1/2}\left(Ef^2\left(\sum_{i=1}^{k}\eta_i\right)\right)^{1/2} \\
&\qquad\le\frac{C\sqrt{m([\beta^{r+1}])p}\sqrt{kq}}{n_{r+1}}\le\frac{C\sqrt{r^\gamma\frac{\beta^r}{r^\gamma}r^\gamma\beta^{\alpha r}}}{\beta^{r+1}}\to 0 \quad \text{при } r\to\infty;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2}{n_{r+1}}Ef\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])}\xi_i\right)f(U_0)\right| \\
&\qquad\le\frac{2}{n_{r+1}}\left(Ef^2\left(\sum_{i=1}^{m([\beta^{r+1}])}\xi_i\right)\right)^{1/2}\left(Ef^2(U_0)\right)^{1/2} \\
&\qquad\le\frac{C\sqrt{r^\gamma\frac{\beta^r}{r^\gamma}}\sqrt{\frac{\beta^r}{r^\gamma}}}{\beta^r}\to 0 \quad \text{при } r\to\infty;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2}{n_{r+1}}Ef\left(\sum_{i=1}^{k}\eta_i\right)f(U_0)\right| &\le\frac{2}{n_{r+1}}\left(Ef^2\left(\sum_{i=1}^{k}\eta_i\right)\right)^{1/2}(Ef^2(U_0))^{1/2} \\
&\le\frac{C\sqrt{r^\gamma\beta^{\alpha r}}\sqrt{\frac{\beta^r}{r^\gamma}}}{\beta^r}\to 0 \quad \text{при } r\to\infty.
\end{aligned}$$

Остается доказать, что при $r \to \infty$

$$\left| \frac{1}{n_{r+1}} \left(Ef^2\left(\sum_{i=1}^{n_{r+1}} u_i \right) - Ef^2(S_{n_{r+1}}) \right) \right| \to 0. \tag{2.17}$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{n_{r+1}} \left(Ef^2\left(\sum_{i=1}^{n_{r+1}} u_i \right) - Ef^2(S_{n_{r+1}}) \right) \right| \\ &\quad = \left| \frac{1}{n_{r+1}} \left(Ef^2\left(\sum_{i=1}^{n_{r+1}} u_i \right) - Ef^2(U_{n_{r+1}} + W_{n_{r+1}}) \right) \right| \\ &\quad = \frac{1}{n_{r+1}} |Ef^2(W_{n_{r+1}}) + Ef(U_{n_{r+1}})f(W_{n_{r+1}})|. \end{aligned}$$

Из леммы 3 следует, что

$$\frac{1}{n_{r+1}} Ef^2(W_{n_{r+1}}) \le \frac{C}{n_{r+1}} \sum_{i=1}^{n_{r+1}} Ef^2(w_i). \tag{2.18}$$

Так как $Ef^2(w_{n_{r+1}}) \to 0$ при $r \to \infty$, то из известной леммы Теплица вытекает, что при $r \to \infty$

$$\frac{1}{n_{r+1}} \sum_{i=1}^{n_{r+1}} Ef^2(w_i) \to 0. \tag{2.19}$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n_{r+1}} |Ef(U_{n_{r+1}})f(W_{n_{r+1}})| \le \frac{1}{n_{r+1}} (Ef^2(U_{n_{r+1}}))^{1/2} (Ef^2(W_{n_{r+1}}))^{1/2} \\ &\qquad \le \frac{C\sqrt{n_{r+1}}(Ef^2(W_{n_{r+1}}))^{1/2}}{n_{r+1}} \le C\left(\frac{Ef^2(W_{n_{r+1}})}{n_{r+1}} \right)^{1/2} \to 0 \quad \text{при } r \to \infty. \end{aligned}$$

Сходимость к нулю последнего выражения получим из (2.18), (2.19).

Таким образом, из (2.14)–(2.17) вытекает (2.13), что, в свою очередь, влечет сходимость $\Gamma_r \to \Gamma$ при $r \to \infty$. Имея это в виду и выбирая $\delta > 0$ таким, чтобы для достаточно больших r выполнялось

$$\frac{(1-\delta)\left(\Gamma + \frac{\varepsilon}{8}\right)^2}{2\Gamma_r^2} > \frac{1}{2},$$

заключаем, что существует $\eta > 0$ такое, что для достаточно больших r

$$P\left(\left\| \sum_{j=1}^{m([\beta^{r+1}])} G_j / \sqrt{n_{r+1}} \right\| > \left(\Gamma + \frac{\varepsilon}{8} \right) \right) \le \exp\{-(1+\eta) LLn_{r+1}\},$$

откуда следует (2.12). Итак, мы доказали (2.9), и доказательство достаточности условий теоремы закончено.

Необходимость. Из $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\|S_n\|}{a_n} < \infty$ п. н. вытекает существование константы A такой, что

$$P(\|X_n/a_n\| > A \quad \text{бесконечно часто}) = 0. \tag{2.20}$$

Следующая лемма является непосредственным следствием результатов из [20].

Лемма 7. *Для последовательности* $\{X_n, n \geq 1\}$ *φ-перемешивающихся с.в. со значениями в* H *из* (2.20) *вытекает соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\|X_n/a_n\| > A) < \infty.$$

Используя одинаково распределенность и лемму 7, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\ \|X_n/a_n\| > A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\|X_1\| > Aa_n) < \infty.$$

Сходимость последнего ряда эквивалентна условию (1.7).

Доказательство теоремы 1 закончено.

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Так как из КЗПЛ следует ОЗПЛ, необходимость условия (1.7) вытекает из теоремы 1.

Достаточность. Мы должны доказать, что существует компактное множество $K \subset H$ такое, что

$$C\left(\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}\right) = K \quad \text{п. н.}, \tag{2.21}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{S_n}{a_n} - K\right\| = 0 \quad \text{п. н.} \tag{2.22}$$

В качестве K возьмем единичный шар гильбертова пространства H_μ, построенного по вероятностной мере μ с ковариационной функцией $T(f,g)$ по лемме 1. Условие (1.8) влечет компактность множества K. Сначала докажем (2.22). Ковариационный оператор, соответствующий ковариационной функции $T(f,g)$, обозначим через T.

Имеет место следующая

Лемма 8 [2]. *T является ограниченным симметричным неотрицательно определенным оператором, и*

$$T^{1/2}(V) = K,$$

где $V = \{x \in H : \|x\| = (\langle x, x\rangle)^{1/2} \leq 1\}$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и I — тождественный оператор в H (т. е. $I(x) = x$). Тогда существует оператор $(T^{1/2} + \varepsilon I)^{-1}$ и он ограничен. Положим

$$q(x) = \|(T^{1/2} + \varepsilon I)^{-1}(x)\| = (\langle (T^{1/2} + \varepsilon I)^{-1}(x), (T^{1/2} + \varepsilon I)^{-1}(x)\rangle)^{1/2}. \tag{2.23}$$

Рассмотрим гильбертово пространство H с нормой $q(\cdot)$ (которая определена через скалярное произведение). Для пространства (H, q) имеет место теорема 1, и из (2.3) имеем

$$\limsup_{n\to\infty} q(S_n/a_n) \leq \sup_{x\in K} q(x) \quad \text{п. н.} \tag{2.24}$$

Из леммы 8 получим

$$\sup_{x\in K} q(x) = \sup_{x\in K} \|(T^{1/2} + \varepsilon I)^{-1}(x)\| = \sup_{y\in V} \|(T^{1/2} + \varepsilon I)^{-1} T^{1/2}(y)\|$$
$$= |||(T^{1/2} + \varepsilon I)^{-1} T^{1/2}|||, \tag{2.25}$$

где $|||\cdot|||$ означает норму оператора.

Обозначим $U = T^{1/2} + \varepsilon I$. В [2, с. 119] доказано, что

$$\langle x, x\rangle \geq \langle U^{-1}T^{1/2}(x), U^{-1}T^{1/2}(x)\rangle. \tag{2.26}$$

Из соотношений (2.24)–(2.26) следует

$$\limsup_{n\to\infty} q\left(\frac{S_n}{a_n}\right) \leq 1 \quad \text{п. н.} \tag{2.27}$$

Так как $q(x) \leq 1$ тогда и только тогда, когда $(T^{1/2}+\varepsilon I)^{-1}(X) = y$ для некоторого $y \in V$, по лемме 8

$$\{x:\ g(x) \leq 1\} \leq K + \varepsilon V. \tag{2.28}$$

Из (2.27) и (2.28) имеем

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{S_n}{a_n} - K\right\| \leq \varepsilon \quad \text{п. н.},$$

откуда в силу произвольности ε получим (2.22). Остается доказать (2.21). Используем следующие леммы.

Лемма 9. *Пусть H_μ — гильбертово пространство, построенное по вероятностной мере μ на H, с нулевым средним и непрерывной в $*$-слабой топологии ковариационной функцией $T(f, g)$ по лемме 1. Далее, пусть для последовательности с.в. $\{X_n, n \geq 1\}$ со значениями в H выполнено следующее условие:*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(S_n)}{a_n} = \sup_{x\in K} f(x) \quad \text{п. н. для всех } f \in H^*,$$

где K — единичный шар H_μ. Тогда

1) *если $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ п. н. относительно компактна, то*

$$C\left(\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}\right) = K \text{ п. н.}$$

2) *$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ п. н. относительно компактна тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{S_n}{a_n} - K\right\| = 0 \quad \text{п. н.}$$

Лемма 10. *Пусть $\{\xi_i, i \geq 1\}$ — последовательность одномерных одинаково распределенных с.в., удовлетворяющих следующим условиям:*

$$E\xi_i = 0, \quad E\xi_i^2 < \infty, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}E(\xi_1 + \dots + \xi_n)^2 = \sigma < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\varphi^{1/2}(2^k) < \infty.$$

Тогда

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{a_n} = \sigma.$$

Лемма 9 есть частный случай результата, доказанного в [5] (см. теорему 3.1). При этом теорема 3.1 из [5] доказана при условии, что $\int\limits_H \|x\|^2\, d\mu(x) < \infty$ (очевидно, это условие сильнее, чем сформулированное в лемме). Это условие нужно было только для того, чтобы обеспечить множеству K компактность. Но из леммы 1 следует, что условие (1.8) обеспечивает компактность множества K.

Поэтому доказательство теоремы 3.1 из [5] сохраняется и для леммы 9. Этот факт был замечен в [1]. В [5] (теорема 3.1) п. 1 леммы 9 был доказан при предположении, что H_μ бесконечномерно. Но утверждение п. 1 можно доказать (с учетом леммы 10 вместо соотношения (2.2) из [13]) и без этого предположения, как это сделано в [13, предложение 1, с. 703] для случая m-зависимых с.в.

Лемма 10 является следствием теоремы 3.1 из [16]. Хотя на самом деле в [16] предполагается, что $\sigma > 0$. Но рассуждения, обосновывающие замечание о достаточности доказательства соотношения (2.3) при условии $\Gamma > 0$, применимы и по отношению к лемме 10. Следовательно, утверждение леммы остается верным и при $\sigma = 0$.

По лемме 10 имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(S_n)}{a_n} = \left(\int\limits_H f^2(y)\, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{п. н.}$$

Из леммы 1 следует

$$\sup_{x\in K} f(x) = \left(\int\limits_H f^2(y)\, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, условие леммы 9 выполнено, и если иметь в виду ранее доказанное (2.22), то по лемме 9 получим (2.21). Теорема 2 доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за полезные замечания и предложения, которые способствовали существенному улучшению первоначального варианта статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goodman V., Kuelbs J., Zinn J.* Some results on the LIL in Banach space with applications to weighted empirical processes // Ann. Probab. 1981. V. 9, N 5. P. 713–752.

2. *Acosta A., Kuelbs J.* Some results on the cluster sets $C(\{S_n/a_n\})$ and the LIL // Ann. Probab. 1983. V. 11, N 1. P. 102–105.

3. *Ledoux M., Talagrand M.* Probability in Banach spaces. Berlin: Springer-Verl., 1991.

4. *Ledoux M., Talagrand M.* Characterization of the law of the iterated logarithm in Banach spaces // Ann. Probab. 1988. V. 16, N 3. P. 1241–1264.

5. *Kuelbs J.* A strong convergence theorem for Banach space valued random variables // Ann. Probab. 1976. V. 4, N 5. P. 744–771.

6. *Chen X.* On the law of the iterated logarithm for independent Banach space valued random variables // Ann. Probab. 1993. V. 21, N 4. P. 1991–2011.

7. *Chen X.* On Strassen's law of the iterated logarithm in Banach space // Ann. Probab. 1994. V. 22, N 2. P. 1026–1043.

8. *Einmahl U.* On the cluster set problem for the generalized law of the iterated logarithm in Euclidean space // Ann. Probab. 1995. V. 23, N 2. P. 817–851.

9. *Kuelbs J., Philipp W.* Almost sure invariance principles for partial sums of mixing B-valued random variables // Ann. Probab. 1980. V. 8, N 6. P. 1003–1036.

10. *Dehling H., Philipp W.* Almost sure invariance principles for weakly dependent vector-valued random variables // Ann. Probab. 1982. V. 10, N 3. P. 689–701.

11. *Philipp W.* Invariance principles for independent and weakly dependent random variables // Dependence in Probability and Statistics (Proc. Conf. Oberwolfach. 1985). Boston; Basel; Stuttgart: Birkhauser, 1986. P. 225–268.

12. *Шарипов О. Ш.* Законы повторного логарифма и почти наверное принцип инвариантности для слабозависимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве. Деп. ВИНИТИ. 1991. Деп № 3493–В91. 29 с.

13. *Chen X.* The law of the iterated logarithm for m-dependent Banach space valued random variables // J. Theor. Probab. 1997. V. 10, N 3. P. 695–732.

14. *Beck A., Warren P.* Weak orthogonality // Pacific J. Math. 1972. V. 41, N 1. P. 1–11.
15. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985.
16. *Утев С. А.* Суммы случайных величин с ϕ-перемешиванием // Тр. Ин-та Математики СО АН СССР. 1989. Т. 13. С. 78–100.
17. *Iosifescu M., Theodorescu R.* Random processes and learning. Berlin: Springer, 1969.
18. *Berkes I., Philipp W.* Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors // Ann. Probab. 1979. V. 7, N 1. P. 29–54.
19. *Круглов В. М.* Сходимость числовых характеристик сумм независимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве // Теория вероятностей и ее применения. 1973. Т. 18, № 4. С. 734–752.
20. *Cohn H.* On a class of dependent random variables // Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 1965. V. 10. P. 1593–1606.

Статья поступила 4 января 2003 г.

Шарипов Олимжон Шукурович
Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз,
ул. Ф. Ходжаева, 29, Ташкент 700143, Узбекистан
root@im.tashkent.su