Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 517.5

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УЛАМА

П. В. Черников

Аннотация: Доказана устойчивость решений одной задачи минимизации интегрального функционала.

Ключевые слова: интеграл, функционал, минимизация, устойчивость.

§ 1. Постановка задачи. Предварительные сведения: интегрирование векторных функций

1. Постановка задачи. В [1, с. 82–83] сформулирован следующий вопрос. Рассматривается задача минимизации интегрального функционала определенного вида с интегрантом f и рассматривается еще один интегральный функционал такого же вида с интегрантом g, близким в равномерной метрике к f. Ставится следующая проблема: при каких условиях регулярности интегранта g у второго функционала есть точка минимума, близкая к точке минимума первого функционала? Как указано в [1], положительные теоремы об устойчивости подобного рода были бы полезны при анализе корректности реальных систем по отношению к скрытым параметрам. В [1] отмечено также, что во многих формулировках физических задач к известным требованиям корректности [2, 3] было бы желательно добавить требование об устойчивости в описанном выше смысле.

В данной работе формулируется одна задача оптимального управления [4], для которой доказывается устойчивость в указанном смысле.

2. Предварительные сведения: интегрирование векторных функций. Далее приводятся некоторые утверждения, связанные с задачей интегрирования векторных функций. Используется способ интегрирования векторных функций, изложенный в [5].

Определение 1.1. Пусть Q — пространство с мерой μ, X — топологическое векторное пространство такое, что X^* разделяет точки в X, f — отображение, заданное на Q со значениями в X, такое, что для всякого функционала $\varphi \in X^*$ скалярная функция φf интегрируема по мере μ. Если существует такой вектор $y \in X$, что

$$\varphi(y) = \int\limits_Q \varphi f \, d\mu$$

для любого функционала $\varphi \in X^*$, то полагают

$$\int\limits_Q f \, d\mu = y$$

и называют вектор y *интегралом отображения* f по мере μ. Этот интеграл называют также *интегралом Петтиса.*

В [5] доказана следующая

Теорема 1.1. *Пусть X — топологическое векторное пространство такое, что X^* разделяет точки в X, и $\mu \geq 0$ — мера Радона на некотором компактном пространстве Q. Если отображение $f : Q \to X$ непрерывно и если замыкание $\overline{H}$ выпуклой оболочки H множества $f(Q)$ компактно в X, то интеграл в смысле определения* 1.1

$$Y = \int\limits_Q f\, d\mu$$

существует, $Y \in \mu(Q) \cdot \overline{H}$.

Определение 1.2 [6]. Пусть Q — локально компактное пространство и $\mu \geq 0$ — мера Радона на Q. Говорят, что отображение f пространства Q в топологическое пространство F *μ-измеримо*, если для любого компактного множества $K \subset Q$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $K_\varepsilon \subset K$, что $\mu(K \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$ и сужение f на K_ε непрерывно. Докажем следующую теорему.

Теорема 1.2. *Пусть X — топологическое векторное пространство такое, что X^* разделяет точки в X, $\mu \geq 0$ — конечная мера Радона на локально компактном счетном в бесконечности пространстве Q, $f : Q \to X$ — μ-измеримое отображение. Тогда если замыкание $\overline{H}$ выпуклой оболочки H множества $f(Q)$ компактно в X, то интеграл в смысле определения* 1.1 $y = \int\limits_Q f\, d\mu$ *существует и* $y \in \mu(Q) \cdot \overline{H}$.

Доказательство. (1i) Рассмотрим сначала случай, когда Q — компактное пространство. Отображение f μ-измеримо, поэтому существуют такие компактные подмножества A_n множества Q, что $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, отображение $f|A_n : A_n \to \overline{H}$ непрерывно и $\mu\left(Q \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$. Положим $f_n = f|A_n$. Можно считать, что $\mu(A_n) > 0$ при всех n. Рассмотрим меру

$$\nu_n = \frac{1}{\mu(A_n)} \cdot \mu$$

на множестве A_n. По теореме 1.1 существует интеграл

$$y_n = \int\limits_{A_n} f_n\, d\nu_n, \quad y_n \in \overline{H}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Множество $\overline{H}$ компактно, поэтому существует подсеть $\{y_\alpha\}$ последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к некоторому элементу $y' \in \overline{H}$. Покажем, что для $\varphi \in X^*$

$$\varphi(y) = \int\limits_Q \varphi f\, d\mu,$$

где $y = \mu(Q) \cdot y'$.

Для данного $\varphi \in X^*$ найдется такое число $C_\varphi \geq 0$, что $|\varphi f(q)| \leq C_\varphi$ для всех $q \in Q$. Имеем

$$\left| \int\limits_{A_n} \varphi f_n\, d\mu - \int\limits_Q \varphi f\, d\mu \right| \leq C_\varphi \mu(Q \setminus A_n) \to 0$$

при $n \to \infty$. Далее,

$$\int\limits_{A_n} \varphi f_n \, d\mu = \mu(A_n)\varphi(y_n) \quad \text{и} \quad \mu(A_\alpha)\varphi(y_\alpha) \to \varphi(y),$$

поэтому

$$\varphi(y) = \int\limits_Q \varphi f \, d\mu.$$

(2i) Рассмотрим теперь случай, когда Q — локально компактное счетное в бесконечности пространство. Пространство Q счетно в бесконечности, значит, существует такая последовательность $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ компактных подмножеств Q, что $K_n \subset K_{n+1}$ при всех n, $\bigcup\limits_{n=1}^\infty K_n = Q$. Можно считать, что $\mu(K_n) > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Рассмотрим меру

$$\nu_n = \frac{1}{\mu(K_n)} \cdot \mu$$

на K_n. Положим $f_n = f|K_n$. По доказанному выше существует интеграл

$$\bar{y}_n = \int\limits_{K_n} f_n \, d\nu_n, \quad \bar{y}_n \in \overline{H}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Существует подсеть $\{\bar{y}_\alpha\}$ последовательности $\{\bar{y}_n\}_{n=1}^\infty$, сходящаяся к некоторому элементу $\bar{y} \in \overline{H}$. Далее, как и выше, показывается, что для всякого функционала $\varphi \in X^*$ будет

$$\varphi(\tilde{y}) = \int\limits_Q \varphi f \, d\mu,$$

где $\tilde{y} = \mu(Q) \cdot \bar{y}$, т. е. существует интеграл $\tilde{y} = \int\limits_Q f \, d\mu$ в смысле определения 1.1 и $\tilde{y} \in \mu(Q) \cdot \overline{H}$.

Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Пусть в условиях теоремы* 1.2 X *— нормированное пространство,* Q *— компакт,* $\mu(Q) = 1$. *Тогда в обозначениях теоремы* 1.2

$$\|y - y_n\| \le 2\mu(Q \setminus A_n) \max_{x \in \overline{H}} \|x\|.$$

Доказательство. По теореме 3.3 [5, гл. 3] существует функционал $\varphi \in X^*$ такой, что

$$\varphi(y_n - y) = \|y_n - y\|, \quad |\varphi(x)| \le \|x\| \quad \text{для всех } x \in X.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\|y_n - y\| = \varphi(y_n - y) &= \int\limits_{A_n} \varphi f_n \, d\nu_n - \int\limits_Q \varphi f \, d\mu \\ &= \int\limits_{A_n} \varphi f \, d\mu \frac{1 - \mu(A_n)}{\mu(A_n)} - \int\limits_{Q \setminus A_n} \varphi f \, d\mu \le 2\mu(Q \setminus A_n) \max_{x \in \overline{H}} \|x\|.\end{aligned}$$

Следствие доказано.

Определение 1.3 [5]. *Разбиением топологического пространства* Q называется любое конечное семейство непустых попарно не пересекающихся борелевских множеств из Q, объединение которых есть Q.

Имеет место теорема из [5].

Теорема 1.3. *Пусть μ — вероятностная мера Радона на компактном пространстве Q, X — пространство Фреше, $f : Q \to X$ — непрерывное отображение. Тогда для всякой окрестности нуля V в X найдется такое разбиение $\{E_i\}_{i=1}^n$ пространства Q, что разность*

$$z = \int\limits_Q f\,d\mu - \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) f(s_i)$$

при любом выборе точек $s_i \in E_i$ принадлежит окрестности V. (Это дает представление интеграла в виде сильного предела «римановых сумм»).

Теорема 1.4. *Пусть μ — вероятностная мера Радона на локально компактном счетном в бесконечности пространстве Q, X — пространство Фреше, $f : Q \to X$ — μ-измеримое отображение такое, что замыкание $\overline{H}$ выпуклой оболочки H множества $f(Q)$ компактно в X. Тогда для любой окрестности V нуля в X существует такое разбиение $\{E_i\}_{i=1}^n$ множества Q, что разность*

$$z = \int\limits_Q f\,d\mu - \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) f(s_i)$$

при любом выборе точек $s_i \in E_i$ принадлежит V.

Доказательство. (1i) Рассмотрим сначала случай, когда Q — компактное пространство. Отображение f μ-измеримо, поэтому существуют такие компактные подмножества A_m множества Q, что $A_m \subset A_{m+1}$, отображение $f|A_m : A_m \to \overline{H}$ непрерывно и $\mu(Q \setminus A_m) \le 1/m$, $\quad m = 1, 2, \dots$. Множество $\overline{H}$ — компактный абсолютный ретракт, следовательно, $\overline{H}$ — заполненное пространство. Так как пространство Q нормально, существует непрерывное отображение $f_m : Q \to \overline{H}$ такое, что $f_m|A_m = f|A_m$, $m = 1, 2, \dots$. По теореме 1.1 существует интеграл

$$y_m = \int\limits_Q f_m\,d\mu, \quad y_m \in \overline{H}, \quad m = 1, 2, \dots.$$

Применяя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве теоремы 1.2, можно показать, что $y_m \to \bar{y}$ при $m \to \infty$, где

$$\bar{y} = \int\limits_Q f\,d\mu.$$

Пусть $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное разделяющее семейство полунорм на X; тогда метрика $\rho(x, y)$ на X может быть определена по формуле

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{P_i(x-y)}{1 + P_i(x-y)}, \quad (x, y) \in X \times X.$$

Пусть V — окрестность нуля в пространстве X. Найдется число $r > 0$ такое, что шар $B_r = \{x \in X : \rho(0, x) < r\}$ содержится в V. Выберем число $\bar{r}$ так, что $0 < \bar{r} < r$, и рассмотрим шар $B_{\bar{r}}$. По теореме 1.3 для отображения f_m найдется разбиение $\{E_i^m\}_{i=1}^{n-1}$ множества Q такое, что вектор

$$z_m = \int\limits_Q f_m\,d\mu - \sum_{i=1}^{n-1} \mu(E_i^m) f_m(s_i)$$

принадлежит шару $B_{\bar r}$ при любом выборе точек $s_i \in E_i^m$. Положим

$$E_i = E_i^m \cap A_m, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad E_n = Q \setminus A_m.$$

Пусть все E_i, $i = 1, \dots, n$, непусты. Выберем точки $\tilde s_i \in E_i$, $i = 1, \dots, n$, произвольным образом. Тогда вектор

$$\tilde z_m = \int\limits_Q f_m \, d\mu - \sum_{i=1}^{n-1} \mu\bigl(E_i^m\bigr) f_m(\tilde s_i)$$

принадлежит $B_{\bar r}$. Рассмотрим вектор

$$z = \int\limits_Q f \, d\mu - \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) f(\tilde s_i).$$

Используя вид метрики $\rho(x,y)$, нетрудно показать, что

$$\rho(z, \tilde z_m) \le \rho(\bar y, y_m) + \frac{2}{m}$$

(можно считать, что $\max\limits_{x \in \overline{H}} P_i(x) \le 1$, $i = 1, 2, \dots$). Отсюда следует, что при достаточно большом m будет $\rho(z, \tilde z_m) < r - \bar r$ и, значит, $\rho(z, 0) < r$, т. е. $z \in V$.

(2i) Рассмотрим теперь случай, когда Q — локально компактное счетное в бесконечности пространство. Рассуждения в этом случае во многом аналогичны уже разобранному выше случаю компактного пространства Q. Пространство Q счетно в бесконечности, поэтому существует последовательность $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ компактных подмножеств Q такая, что

$$K_m \subset K_{m+1}, \ m = 1, 2, \dots, \quad \bigcup_{m=1}^\infty K_m = Q, \quad \mu(Q \setminus K_m) < \frac{1}{m}, \ m = 1, 2, \dots.$$

Положим $f_m = f | K_m$. Рассмотрим меру

$$\nu_m = \frac{1}{\mu(K_m)} \mu$$

на K_m. По теореме 1.2 существует интеграл

$$\bar y_m = \int\limits_{K_m} f_m \, d\nu_m, \quad \bar y_m \in \overline{H}, \quad m = 1, 2, \dots.$$

Покажем, что $\bar y_m \to \bar y$ при $m \to \infty$, где $\bar y = \int\limits_Q f \, d\mu$. Предположим противное. Тогда существует подпоследовательность $\{\bar y_{m_k}\}_{k=1}^\infty$ последовательности $\{\bar y_m\}_{m=1}^\infty$, сходящаяся к некоторому элементу $v \in \overline{H}$, $v \ne \bar y$.

Для данного функционала $\varphi \in X^*$ существует число $C_\varphi \ge 0$ такое, что $|\varphi f(q)| \le C_\varphi$ для всех $q \in Q$. Имеем

$$\left| \int\limits_{K_m} \varphi f_m \, d\mu - \int\limits_Q \varphi f \, d\mu \right| \le C_\varphi \mu(Q \setminus K_m) \to 0$$

при $m \to \infty$. Далее,

$$\int\limits_{K_m} \varphi f_m \, d\mu = \mu(K_m) \varphi(\bar y_m), \quad \mu(K_{m_k}) \varphi(\bar y_{m_k}) \to \varphi(v),$$

следовательно,

$$\varphi(v) = \int\limits_Q \varphi f\, d\mu,$$

значит, $\bar{y} = v$; противоречие. Пусть V — окрестность нуля в X. Найдется число $r > 0$ такое, что шар B_r с центром в точке 0 радиуса r содержится в V. Пусть $0 < \bar{r} < r$. Рассмотрим шар $B_{\bar{r}}$. По выше доказанному для функции f_m найдется разбиение $\left\{E_i^m\right\}_{i=1}^{n-1}$ множества K_m такое, что вектор

$$z_m = \int\limits_{K_m} f_m\, d\nu_m - \sum_{i=1}^{n-1} \nu_m\bigl(E_i^m\bigr) f_m(s_i)$$

принадлежит шару $B_{\bar{r}}$ при любом выборе точек $s_i \in E_i^m$, $i = 1, \ldots, n-1$. Положим

$$E_i = E_i^m,\ i = 1, \ldots, n-1, \quad E_n = Q \setminus K_m.$$

Можно считать, что $E_n \neq \varnothing$. Выберем точки $\tilde{s}_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$, произвольным образом. Тогда вектор

$$\tilde{z}_m = \int\limits_{K_m} f_m\, d\nu_m - \sum_{i=1}^{n-1} \nu_m\bigl(E_i^m\bigr) f_m(\tilde{s}_i)$$

принадлежит $B_{\bar{r}}$. Рассмотрим вектор

$$z = \int\limits_Q f\, d\mu - \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) f(\tilde{s}_i).$$

Используя вид метрики $\rho(x, y)$, нетрудно показать, что

$$\rho(\tilde{z}_m, z) \leq \rho(\bar{y}_m, \bar{y}) + \frac{2}{m}$$

(можно, как и выше, считать, что $\max\limits_{x \in \overline{H}} P_i(x) \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots$). Отсюда следует, что $\rho(z, \tilde{z}_m) < r - \bar{r}$ при достаточно большом m и, значит, $\rho(z, 0) < r$, т. е. $z \in V$.

Теорема доказана.

Следующая теорема является некоторым вариантом теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Теорема 1.5. *Пусть $\mu \geq 0$ — мера Радона на компактном пространстве Q, X — топологическое векторное пространство такое, что X^* разделяет точки в X, $f : Q \to X$ — μ-измеримое отображение такое, что $f(Q)$ содержится в некотором выпуклом компактном множестве $K \subset X$. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n : Q \to K$, — последовательность μ-измеримых отображений, сходящаяся μ-почти всюду на Q к f. Тогда $y_n \to y$ при $n \to \infty$, где*

$$y_n = \int\limits_Q f_n\, d\mu, \quad y = \int\limits_Q f\, d\mu.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in X^*$. Положим $C_\varphi = \max\limits_{x \in K} |\varphi(x)|$. Тогда $|\varphi f_n(q)| \leq C_\varphi$ при всех $q \in Q$, $n = 1, 2, \ldots$. По теореме Лебега о предельном переходе

$$\int\limits_Q \varphi f_n\, d\mu \to \int\limits_Q \varphi f\, d\mu,$$

т. е. $\varphi(y_n) \to \varphi(y)$ при $n \to \infty$. Отсюда и из компактности K следует, что $y_n \to y$ при $n \to \infty$.

Теорема доказана.

Теорема 1.6. *Пусть $\mu \geq 0$ — мера Радона на компактном пространстве Q, X — пространство Фреше, $f : Q \to X$ — μ-измеримое отображение такое, что $f(Q)$ содержится в некотором выпуклом компактном множестве $K \subset X$. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n : Q \to K$, — последовательность μ-измеримых отображений, сходящаяся по мере μ к отображению f на Q. Тогда $y_n \to y$ при $n \to \infty$, где*

$$y_n = \int\limits_Q f_n \, d\mu, \quad y = \int\limits_Q f \, d\mu.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к некоторой точке $z \in \mu(Q)K$, $z \neq y$. По теореме Рисса найдется подпоследовательность $\{f_{n_{k_s}}\}_{s=1}^{\infty} \subset \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к f μ-почти всюду на Q. Тогда по теореме 1.5 $y_{n_{k_s}} \to y$ при $s \to \infty$, что невозможно.

Теорема доказана.

Лемма 1.1. *Пусть $\mu \geq 0$ — мера Радона на компактном пространстве Q, K — компактное выпуклое подмножество пространства Фреше X, $f : Q \to K$ — μ-измеримое отображение, $P(x)$ — непрерывная полунорма на X. Тогда*

$$P\biggl(\int\limits_Q f \, d\mu\biggr) \leq \int\limits_Q P(f(z)) \, d\mu(z). \tag{1.1}$$

Доказательство. Так как $K \in AR_{t^*}$, по теореме 1.3 из [7] существует последовательность непрерывных отображений $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n : Q \to K$, такая, что $f_n(x) \to f(x)$ μ-почти всюду на Q. По теореме 1.5 $y_n \to y$ при $n \to \infty$, где

$$y_n = \int\limits_Q f_n \, d\mu, \quad y = \int\limits_Q f \, d\mu.$$

По теореме Лебега о предельном переходе

$$\int\limits_Q P(f_n(z)) \, d\mu(z) \to \int\limits_Q P(f(z)) \, d\mu(z); \tag{1.2}$$

согласно предложению 6 [6, с. 64] имеем

$$P\biggl(\int\limits_Q f_n \, d\mu\biggr) \leq \int\limits_Q P(f_n(z)) \, d\mu(z), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.3}$$

Поскольку $P(y_n) \to P(y)$ и выполнены соотношения (1.2) и (1.3), имеет место и соотношение (1.1).

Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть $\mu \geq 0$ — мера Радона на компакте Q, K_i — компактное выпуклое подмножество топологического векторного пространства X такого, что X^* разделяет точки в X, $f_i : Q \to K_i$ — μ-измеримое отображение, $i = 1, 2$. Тогда*

$$\int\limits_Q (f_1 + f_2) \, d\mu = \int\limits_Q f_1 \, d\mu + \int\limits_Q f_2 \, d\mu.$$

Доказательство очевидно.

Лемма 1.3. *Пусть $\mu \geq 0$ — мера Радона на компактном пространстве Q, K — компактное выпуклое подмножество топологического векторного пространства X такого, что X^* разделяет точки в X, $f : Q \to K$ — μ-измеримое отображение, $\alpha \in \mathbb{R}$ — некоторое число. Тогда*

$$\int_Q \alpha f \, d\mu = \alpha \int_Q f \, d\mu.$$

Доказательство очевидно.

Лемма 1.4. *Пусть $\mu \geq 0$ — мера Радона на метрическом компакте Q, F — замкнутое подмножество Q, K — компактное выпуклое подмножество некоторого топологического векторного пространства X такого, что X^* разделяет точки в X, $f : Q \to K$ — μ-измеримое отображение. Тогда*

$$\int_Q f \, d\mu = \int_F f \, d\mu + \int_{Q \setminus F} f \, d\mu.$$

Доказательство. Пусть

$$y_1 = \int_F f \, d\mu, \quad y_2 = \int_{Q \setminus F} f \, d\mu, \quad y = \int_Q f \, d\mu.$$

Пусть $\varphi \in X^*$. Тогда

$$\int_Q \varphi f \, d\mu = \int_F \varphi f \, d\mu + \int_{Q \setminus F} \varphi f \, d\mu,$$

т. е. $\varphi(y) = \varphi(y_1 + y_2)$. Отсюда следует, что $y = y_1 + y_2$.

Лемма доказана.

§ 2. Основная теорема

Пусть Q — метризуемый компакт, $\mu \geq 0$ — мера Радона на Q, K — компактное выпуклое подмножество пространства Фреше X, $g : [a, b] \times Q \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, $\varphi : Q \to K$ — μ-измеримое отображение. Рассмотрим задачу: найти $\min\limits_{\bar{u} \in U} F_n(\bar{u})$, где

$$F_n(\bar{u}) = \rho_X(0, S_n(\bar{u})), \quad S_n(\bar{u}) = \int_Q G(\bar{u}, t)\varphi(t) \, d\mu(t),$$
$$U = \{\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n : a \leq u_1 \cdots \leq u_n \leq b\}, \quad G(\bar{u}, t) = \min_{1 \leq i \leq n} g(u_i, t). \tag{$*$}$$

Здесь через $\rho_X(x, y)$ обозначена метрика в пространстве Фреше X:

$$\rho_X(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{P_i(x - y)}{1 + P_i(x - y)}, \quad x, y \in X,$$

$\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное разделяющее семейство непрерывных полунорм на X. Можно считать, что $\max\limits_{x \in K} P_i(x) \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots$. Интеграл в задаче $(*)$ понимается в смысле определения 1.1 (он существует по теореме 1.2). Задача оптимального управления вида $(*)$ возникает при изучении однородных технических систем [4].

Лемма 2.1. *Функционал $F_n(\bar u)$ непрерывен на множестве U.*

Доказательство. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Существует такое $\delta > 0$, что если $\rho((\bar u', t), (\bar u'', t)) \le \delta$, где $(\bar u', t), (\bar u'', t) \in U \times Q$, то $|G(\bar u', t) - G(\bar u'', t)| \le \varepsilon$. Пусть $\bar u', \bar u'' \in U$ и $\|\bar u' - \bar u''\|_{\mathbb{R}^n} \le \delta$. Тогда

$$|F_n(\bar u') - F_n(\bar u'')| \le \rho_X(S_n(\bar u'), S_n(\bar u'')) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{P_i(S_n(\bar u') - S_n(\bar u''))}{1 + P_i(S_n(\bar u') - S_n(\bar u''))}.$$

Используя леммы 1.1–1.3, имеем

$$P_i(S_n(\bar u') - S_n(\bar u'')) \le \int\limits_Q P_i((G(\bar u', t) - G(\bar u'', t))\varphi(t))\, d\mu(t) \le \varepsilon\mu(Q), \quad i = 1, 2, \dots .$$

Следовательно,

$$|F_n(\bar u') - F_n(\bar u'')| \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\varepsilon\mu(Q)}{1 + \varepsilon\mu(Q)} \le \varepsilon\mu(Q),$$

т. е. $F_n(\bar u)$ непрерывен на U.

Лемма доказана.

Следствие. *Задача $(*)$ имеет решение.*

Теорема 2.1. *Пусть последовательность $\{g_m(u,t)\}_{m=1}^{\infty}$, $g_m : [a,b] \times Q \to \mathbb{R}$, непрерывных функций сходится в пространстве $C([a,b] \times Q)$ к функции $g(u,t)$, последовательность μ-измеримых функций $\{\varphi_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$, $\varphi_m : Q \to K$, сходится μ-почти всюду на Q к функции $\varphi(t)$. Пусть решение $\bar u_0$ задачи $(*)$ единственно. Тогда последовательность $\{\bar u_m\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к точке $\bar u_0$, где $\bar u_m$ — решение задачи: найти*

$$\min_{\bar u \in U} F_n^m(\bar u), \quad F_n^m(\bar u) = \rho_X\big(0, S_n^m(\bar u)\big),$$

$$S_n^m(\bar u) = \int\limits_Q G_m(\bar u, t)\varphi_m(t)\, d\mu(t), \quad G_m(\bar u, t) = \min_{1 \le i \le n} g_m(u_i, t).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдется номер i_0 такой, что

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.$$

Существует номер N, для которого $\|g - g_m\|_{C([a,b]\times Q)} \le \varepsilon$ при всех $m \ge N$. Тогда, очевидно, $|G(\bar u, t) - G_m(\bar u, t)| \le \varepsilon$ при всех $m \ge N$ и $(\bar u, t) \in U \times Q$. Оценим разность $F_n(\bar u) - F_n^m(\bar u)$, $\bar u \in U$. Имеем

$$\begin{aligned}\big|F_n(\bar u) - F_n^m(\bar u)\big| &\le \rho_X\big(S_n(\bar u), S_n^m(\bar u)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{P_i\big(S_n(\bar u) - S_n^m(\bar u)\big)}{1 + P_i\big(S_n(\bar u) - S_n^m(\bar u)\big)} \le \sum_{i=1}^{i_0} \frac{1}{2^i} \frac{P_i\big(S_n(\bar u) - S_n^m(\bar u)\big)}{1 + P_i\big(S_n(\bar u) - S_n^m(\bar u)\big)} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Используя леммы 1.1–1.3, получаем следующие неравенства:

$$P_i\big(S_n(\bar u) - S_n^m(\bar u)\big) \le \int\limits_Q P_i(G(\bar u, t)\varphi(t) - G_m(\bar u, t)\varphi_m(t))\, d\mu(t), \quad i = 1, 2, \dots .$$

Далее, при $m \geq N$ и $i = 1, 2, \ldots$ имеем

$$P_i(G(\bar{u},t)\varphi(t) - G_m(\bar{u},t)\varphi_m(t)) \leq P_i(G(\bar{u},t)\varphi(t) - G(\bar{u},t)\varphi_m(t)) + \varepsilon P_i(\varphi_m(t)) \\ \leq MP_i(\varphi(t) - \varphi_m(t)) + \varepsilon,$$

где $M = \max\limits_{(u,t)\in[a,b]\times Q} |g(u,t)$. По теореме Лебега найдется номер N_1 такой, что для всех $m \geq N_1$

$$\int\limits_Q P_i(\varphi(t) - \varphi_m(t))\, d\mu(t) \leq \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, i_0.$$

Тогда

$$P_i\big(S_n(\bar{u}) - S_n^m(\bar{u})\big) \leq \varepsilon(M + \mu(Q)), \quad i = 1, \ldots, i_0,\ m \geq N_2 = \max(N, N_1).$$

Если $m \geq N_2$, то

$$\big|F_n(\bar{u}) - F_n^m(\bar{u})\big| \leq \sum_{i=1}^{i_0} \frac{1}{2^i} \frac{\varepsilon(M + \mu(Q))}{1 + \varepsilon(M + \mu(Q))} + \varepsilon \leq \varepsilon(M + \mu(Q) + 1), \quad \bar{u} \in U,$$

т. е. последовательность $\big\{F_n^m(\bar{u})\big\}_{m=1}^\infty$ сходится равномерно на U к функционалу $F_n(\bar{u})$.

Если последовательность $\{\bar{u}_m\}_{m=1}^\infty$ не сходится к точке $\bar{u}_0$, то найдется ее подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке $\bar{v} \in U$, $\bar{v} \neq \bar{u}_0$. Пусть вся последовательность $\{\bar{u}_m\}_{m=1}^\infty$ сходится к $\bar{v}$. Из равномерной сходимости последовательности $\big\{F_n^m(\bar{u})\big\}_{m=1}^\infty$ к функционалу $F_n(\bar{u})$ и леммы 2.1 следует ее непрерывная сходимость, поэтому из условия $\bar{u}_m \to \bar{v}$ при $m \to \infty$ следует, что $F_n^m(\bar{u}_m) \to F_n(\bar{v})$. Из доказанных неравенств вытекает, что $F_n^m(\bar{u}_m) \to F_n(\bar{u}_0)$. Следовательно, $F_n(\bar{u}_0) = F_n(\bar{v})$, т. е. $\bar{u}_0 = \bar{v}$; противоречие.

Теорема доказана.

§ 3. Некоторые свойства задачи (∗)

Предложение 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда*

$$\operatorname{diam} A_m \to 0 \quad \text{при } m \to \infty,$$

где A_m — множество всех решений задачи (∗) *с функциями $g_m(u,t)$, $\varphi_m(t)$, $m = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Множества A_m содержатся в U и по лемме 2.1 они компактны. Пусть существуют $\delta > 0$ и подпоследовательность $\{A_{m_k}\}_{k=1}^\infty$ такие, что $\operatorname{diam} A_{m_k} \geq \delta$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда найдутся точки $\bar{u}_k, \bar{v}_k \in A_{m_k}$ такие, что $\rho(\bar{u}_k, \bar{v}_k) \geq \delta$, $k = 1, 2, \ldots$. Можно считать, что $\bar{u}_k \to \bar{u}$, $\bar{v}_k \to \bar{v}$, где $\bar{u}, \bar{v} \in U$ — некоторые точки. Как и в теореме 2.1, показывается, что $\bar{u}, \bar{v}$ — решения задачи (∗). Тогда $\bar{u} = \bar{v}$, но $\rho(\bar{u}, \bar{v}) \geq \delta$; противоречие.

Предложение доказано.

Теорема 3.1. *Пусть $\{e_m\}_{m=1}^\infty$ — последовательность замкнутых подмножеств Q такая, что*

$$e_m \subset e_{m+1},\ m = 1, 2, \ldots, \quad \mu\left(Q \setminus \bigcup_{m=1}^\infty e_m\right) = 0.$$

Пусть $\bar{u}_m$ — решение задачи: найти $\min\limits_{\bar{u}\in U} F_n^m(\bar{u})$, где

$$F_n^m(\bar{u}) = \rho_X\big(0, S_n^{e_m}(\bar{u})\big), \quad S_n^{e_m}(\bar{u}) = \int\limits_{e_m} G(\bar{u},t)\varphi(t)\,d\mu(t).$$

Тогда если решение $\bar{u}_0$ задачи $(*)$ единственно, то $\bar{u}_m \to \bar{u}_0$ при $m \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдется такой номер i_0, что

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.$$

По свойству абсолютной непрерывности интеграла существует такое $\delta > 0$, что если μ — измеримое множество $e \subset Q$ удовлетворяет условию $\mu(e) \le \delta$, то

$$\int\limits_e P_i(\varphi(t))\,d\mu(t) \le \varepsilon, \quad i = 1,\dots,i_0.$$

Найдется такой номер N, что $\mu(Q \setminus e_m) \le \delta$ при всех $m \ge N$. Пусть $\bar{u} \in U$. Имеем

$$\big|F_n(\bar{u}) - F_n^m(\bar{u})\big| \le \rho_X\big(S_n(\bar{u}), S_n^{e_m}(\bar{u})\big) \le \sum_{i=1}^{i_0} \frac{1}{2^i} \frac{P_i\big(S_n(\bar{u}) - S_n^{e_m}(\bar{u})\big)}{1 + P_i\big(S_n(\bar{u}) - S_n^{e_m}(\bar{u})\big)} + \varepsilon.$$

Пусть $i \in \{1,\dots,i_0\}$. Тогда при $m \ge N$

$$\begin{aligned} P_i\big(S_n(\bar{u}) - S_n^{e_m}(\bar{u})\big) &= P_i\bigg(\int\limits_Q G(\bar{u},t)\varphi(t)\,d\mu(t) - \int\limits_{e_m} G(\bar{u},t)\varphi(t)\,d\mu(t)\bigg) \\ &\le M \int\limits_{Q\setminus e_m} P_i(\varphi(t))\,d\mu(t) \le M\varepsilon, \end{aligned}$$

где $M = \max\limits_{(u,t)\in[a,b]\times Q} |g(u,t)|$. Отсюда следует, что при $m \ge N$

$$\big|F_n(\bar{u}) - F_n^m(\bar{u})\big| \le M \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\varepsilon}{1 + M\varepsilon} + \varepsilon \le (M+1)\varepsilon$$

для всех $\bar{u} \in U$. Таким образом, последовательность $\big\{F_n^m(\bar{u})\big\}_{m=1}^{\infty}$ сходится равномерно на компакте U к функционалу $F_n(\bar{u})$. Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 2.1, получим, что $\bar{u}_m \to \bar{u}_0$ при $m \to \infty$.

Теорема доказана.

Обозначим через $\bar{u}_n$ какое-либо решение задачи $(*)$ при данном n, $n = 1,2,\dots$. В следующей теореме устанавливается некоторая зависимость минимума функционала $F_n(\bar{u})$ от размерности n задачи $(*)$.

Теорема 3.2. *Пусть функция $g(u,t)$ удовлетворяет условию Липшица:*

$$|g(u^1,t) - g(u^2,t)| \le M|u^1 - u^2| \quad \text{для всех } (u^i,t) \in [a,b]\times Q,\ i = 1,2,$$

$M \ge 0$ — некоторое число. Тогда

$$F_n(\bar{u}_n) - F_{n+1}(\bar{u}_{n+1}) \le \frac{M(b-a)\mu(Q)}{2n}.$$

Доказательство. Пусть $\bar u_{n+1} = (u_1, \dots, u_{n+1})$. Так как

$$\sum_{i=1}^{n}(u_{i+1} - u_i) \le b - a,$$

найдется номер k, для которого

$$u_{k+1} - u_k \le \frac{b-a}{n}.$$

Рассмотрим вектор $\bar u' = \bigl(u'_1, \dots, u'_{n+1}\bigr)$,

$$u'_i = u_i, \quad i \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{k, k+1\}, \quad u'_k = u'_{k+1} = \frac{u_k + u_{k+1}}{2}.$$

Имеем

$$F_{n+1}(\bar u') - F_{n+1}(\bar u_{n+1}) \le \rho_X(S_{n+1}(\bar u'), S_{n+1}(\bar u_{n+1})) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{P_i(S_{n+1}(\bar u') - S_{n+1}(\bar u_{n+1}))}{1 + P_i(S_{n+1}(\bar u') - S_{n+1}(\bar u_{n+1}))}.$$

Далее,

$$P_i(S_{n+1}(\bar u') - S_{n+1}(\bar u_{n+1})) = P_i\Biggl(\int\limits_Q (G(\bar u', t) - G(\bar u_{n+1}, t))\varphi(t)\, d\mu(t)\Biggr) \le \frac{M(b-a)\mu(Q)}{2n}, \quad i = 1, 2, \dots.$$

Отсюда следует, что

$$F_{n+1}(\bar u') - F_{n+1}(\bar u_{n+1}) \le \frac{M(b-a)\mu(Q)}{2n}.$$

Очевидно, что

$$F_{n+1}(\bar u_{n+1}) \le F_n(\bar u_n) \le F_{n+1}(\bar u').$$

Из этого неравенства и неравенства, установленного выше, получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Предложение 3.2. *Пусть решение $\bar u_0$ задачи $(*)$ единственно. Тогда существует последовательность $\{\varphi_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$, $\varphi_m : Q \to K$, непрерывных отображений такая, что последовательность $\{\bar u_m\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к точке $\bar u_0$, где $\bar u_m$ — решение задачи: найти*

$$\min_{\bar u \in U} H_m(\bar u), \quad H_m(\bar u) = \rho_X\bigl(0, T_n^m(\bar u)\bigr), \quad T_n^m(\bar u) = \int\limits_Q G(\bar u, t)\varphi_m(t)\, d\mu(t).$$

Доказательство. Поскольку $K \in AR_{t^*}$, по теореме 1.3 из [7] существует последовательность непрерывных отображений $\{\varphi_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$, $\varphi_m : Q \to K$, такая, что $\varphi_m(t) \to \varphi(t)$ μ-почти всюду на Q. Тогда по теореме 2.1 $\bar u_m \to \bar u_0$ при $m \to \infty$.

Предложение доказано.

Предложение 3.2 показывает, что исходная задача $(*)$ может быть аппроксимирована задачами такого же вида с непрерывными исходными данными.

Пусть $\delta > 0$, S_δ — конечная δ-сеть на отрезке $[a, b]$. Положим $U_\delta = U \cap S_\delta^n$, U_δ — δ-сеть для U.

Теорема 3.3. *Пусть в задаче* $(*)$ *функция* $g(u,t)$ *удовлетворяет условию Липшица:*

$$|g(u^1,t)-g(u^2,t)| \le M|u^1-u^2|, \quad \text{где } (u^i,t)\in[a,b]\times Q,\ i=1,2,$$

$M \ge 0$ *— некоторое число. Пусть* $\bar u_\delta$ *— решение задачи* $(*)$ *на множестве* U_δ, $\bar u_0$ *— решение исходной задачи* $(*)$. *Тогда*

$$F_n(\bar u_\delta) - F_n(\bar u_0) \le \delta M \mu(Q).$$

Доказательство. Пусть $\bar u_0 = \big(u_1^0,\dots,u_n^0\big)$. Найдется такой вектор $\bar v = (v_1,\dots,v_n)\in U_\delta$, что $\big|u_i^0 - v_i\big| \le \delta$, $i=1,\dots,n$. Оценим разность $F_n(\bar v) - F_n(\bar u_0)$. Имеем

$$F_n(\bar v) - F_n(\bar u_0) \le \rho_X(S_n(\bar v), S_n(\bar u_0)) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{P_i(S_n(\bar v)-S_n(\bar u_0))}{1+P_i(S_n(\bar v)-S_n(\bar u_0))}.$$

Далее,

$$P_i(S_n(\bar v)-S_n(\bar u_0)) \le \delta M \int\limits_Q P_i(\varphi(t))\,d\mu(t) \le \delta M\mu(Q).$$

Отсюда следует, что

$$F_n(\bar v) - F_n(\bar u_0) \le \delta M\mu(Q).$$

Поскольку

$$F_n(\bar u_0) \le F_n(\bar u_\delta) \le F_n(\bar v),$$

из доказанного выше неравенства следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Пусть $c\in[a,b]$. Введем обозначение:

$$U_c = \{\bar u = (u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n : a\le u_1\le\dots\le u_n\le c\}.$$

Пусть в задаче $(*)$ вместо отрезка $[a,b]$ и компакта Q взят отрезок $[a,c]$, а X — банахово пространство, т. е. рассматривается задача: найти

$$\min_{\bar u\in U_c}\|T^c(\bar u)\|, \quad T^c(\bar u) = \int\limits_a^c G(\bar u,t)\varphi(t)\,d\mu_0(t), \quad G(\bar u,t) = \min_{1\le i\le n} g(u_i,t), \qquad (**)$$

$g\in C([a,b]^2)$, $\varphi:[a,b]\to K\subset X$ — μ_0-измеримое отображение, μ_0 — не атомическая мера Радона на отрезке $[a,b]$.

Теорема 3.4. *Пусть* $\bar u(c)$ *— решение задачи* $(**)$ *и оно единственно при любом* $c\in(a,b]$. *Тогда функция* $\bar u(c)$ *непрерывна на* $(a,b]$.

Доказательство состоит из двух частей.

1. Покажем, что функция $\bar u(c)$ на полуинтервале $(a,b]$ непрерывна слева, т. е. существует $\lim\limits_{c\to\bar c, c<\bar c}\bar u(c) = \bar u(\bar c)$ для всякой точки $\bar c\in(a,b]$.

Пусть числовая последовательность $\{c_k\}_{k=1}^\infty$, $c_k\in(a,\bar c)$, сходится к точке $\bar c$. Докажем, что $\bar u(c_k)\to\bar u(\bar c)$. Предположим противное. Тогда можно считать, что последовательность $\{\bar u(c_k)\}_{k=1}^\infty$ сходится к некоторой точке $\bar y\in U_{\bar c}$, $\bar y\ne\bar u(\bar c)$. Пусть $\bar u\in U_{c_k}$, $\varepsilon>0$. Найдется такой номер N, что $\mu_0((c_k,\bar c]) < \varepsilon$ при $k\ge N$. Имеем

$$\big|\,\|T^{\bar c}(\bar u)\| - \|T^{c_k}(\bar u)\|\,\big| \le \|T^{\bar c}(\bar u) - T^{c_k}(\bar u)\| \le \int\limits_{c_k}^{\bar c}|G(\bar u,t)|\,\|\varphi(t)\|\,d\mu_0(t) \le \varepsilon M$$

при всех $k \geq N$ и всех $\bar{u} \in U_{c_k}$, где $M \geq 0$ — некоторая постоянная величина. Так как

$$|\,\|T^{\bar{c}}(\bar{y})\| - \|T^{c_k}(\bar{u}(c_k))\|\,| \leq |\,\|T^{\bar{c}}(\bar{y})\| - \|T^{\bar{c}}(\bar{u}(c_k))\|\,| + |\,\|T^{\bar{c}}(\bar{u}(c_k))\| - \|T^{c_k}(\bar{u}(c_k))\|\,|,$$

последовательность $\{\|T^{c_k}(\bar{u}(c_k))\|\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке $\|T^{\bar{c}}(\bar{y})\|$. Покажем, что в точке $\bar{y}$ функция $\|T^{\bar{c}}(\bar{u})\|$ имеет минимум на $U_{\bar{c}}$. Пусть существует такая точка $\bar{v} \in U_s$, $a \leq s < \bar{c}$, что $\|T^{\bar{c}}(\bar{v})\| < \|T^{\bar{c}}(\bar{y})\|$. Найдется номер N_1 такой, что при $k \geq N_1$ $c_k \geq s$. Пусть $\delta = \|T^{\bar{c}}(\bar{y})\| - \|T^{\bar{c}}(\bar{v})\|$. Существует номер N_2 такой, что при $k \geq N_2$

$$|\,\|T^{\bar{c}}(\bar{y})\| - \|T^{c_k}(\bar{u}(c_k))\|\,| < \frac{\delta}{2}, \quad |\,\|T^{\bar{c}}(\bar{u})\| - \|T^{c_k}(\bar{u})\|\,| < \frac{\delta}{2}, \quad \bar{u} \in U_{c_k}.$$

Пусть $k_0 \geq \max(N_1, N_2)$. Тогда

$$\delta \leq \|T^{\bar{c}}(\bar{y})\| - \|T^{c_{k_0}}(\bar{u}(c_{k_0}))\| + \|T^{c_{k_0}}(\bar{v})\| - \|T^{\bar{c}}(\bar{v})\| < \delta;$$

противоречие.

Таким образом, $\|T^{\bar{c}}(\bar{y})\| \leq \|T^{\bar{c}}(\bar{z})\|$ при всех $\bar{z} \in U_s$ для всех $s \in [a, \bar{c})$. Отсюда следует, что $\|T^{\bar{c}}(\bar{y})\| \leq \|T^{\bar{c}}(\bar{w})\|$ при всех $\bar{w} \in U_{\bar{c}}$, т. е. $\bar{y} = \bar{u}(\bar{c})$, что невозможно. Значит, существует $\lim\limits_{c<\bar{c}, c\to\bar{c}} \bar{u}(c) = \bar{u}(\bar{c})$.

2. Покажем теперь, что функция $\bar{u}(c)$ непрерывна справа на полуинтервале $(a, b]$, т. е. существует $\lim\limits_{c\to\bar{c}, c>\bar{c}} \bar{u}(c) = \bar{u}(\bar{c})$ для всякой точки $\bar{c} \in (a, b)$. Пусть числовая последовательность $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, $c_k \in (\bar{c}, b]$, сходится к точке $\bar{c}$. Докажем, что $\bar{u}(c_k) \to \bar{u}(\bar{c})$. Предположим противное. Тогда можно считать, что последовательность $\{\bar{u}(c_k)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к некоторой точке $\bar{v} \in U$, $\bar{v} \neq \bar{u}(\bar{c})$. Покажем, что $\bar{v} \in U_{\bar{c}}$. Если $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$ и $v_n > \bar{c}$, то найдется номер N такой, что

$$u_n(c_m) \leq \frac{\bar{c} + v_n}{2}$$

при $m \geq N$, где $\bar{u}(c_m) = (u_1(c_m), \dots, u_n(c_m))$. Значит,

$$v_n - u_n(c_m) \geq \frac{v_n - \bar{c}}{2}$$

при всех $m \geq N$, что невозможно.

Покажем, что в точке $\bar{v}$ функционал $\|T^{\bar{c}}(\bar{u})\|$ имеет минимум на $U_{\bar{c}}$. Пусть $\bar{u} \in U_{c_k}$. Существует номер N_1 такой, что при $k \geq N_1$ будет $\mu_0([\bar{c}, c_k]) < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое число. Имеем

$$|\,\|T^{\bar{c}}(\bar{u})\| - \|T^{c_k}(\bar{u})\|\,| \leq \int\limits_{\bar{c}}^{c_k} |G(\bar{u}, t)|\,\|\varphi(t)\|\,d\mu_0(t) \leq \varepsilon M$$

при всех $k \geq N_1$, где $M \geq 0$ — некоторая постоянная величина.

Установим, что

$$\|T^{c_k}(\bar{u}(c_k))\| \to \|T^{\bar{c}}(\bar{v})\| \quad \text{при } k \to \infty.$$

Для данного $\varepsilon_1 > 0$ найдется номер N_2 такой, что

$$|\,\|T^{\bar{c}}(\bar{v})\| - \|T^{\bar{c}}(\bar{u}(c_m))\|\,| \leq \varepsilon_1$$

при всех $m \geq N_2$. Найдется номер N_3 такой, что при всех $m \geq N_3$ имеем

$$|\,\|T^{\bar{c}}(\bar{u})\| - \|T^{c_m}(\bar{u})\|\,| \leq \varepsilon_1$$

для всех $\bar{u} \in U_{c_m}$. Тогда при $m \geq \max(N_2, N_3)$ выполняется неравенство

$$| \, \|T^{\bar{c}}(\bar{v})\| - \|T^{c_m}(\bar{u}(c_m))\| \, | \leq 2\varepsilon_1.$$

Пусть существует вектор $\bar{w} \in U_{\bar{c}}$, для которого $\|T^{\bar{c}}(\bar{w})\| < \|T^{\bar{c}}(\bar{v})\|$. Положим

$$\delta = \|T^{\bar{c}}(\bar{v})\| - \|T^{\bar{c}}(w)\|.$$

Найдется номер N_4 такой, что

$$| \, \|T^{\bar{c}}(\bar{u})\| - \|T^{c_m}(\bar{u})\| \, | < \delta/2$$

при всех $m \geq N_4$ и всех $\bar{u} \in U_{c_m}$ и

$$| \, \|T^{\bar{c}}(\bar{v})\| - \|T^{c_m}(\bar{u}(c_m))\| \, | < \delta/2$$

при всех $m \geq N_4$. Пусть $m_0 \geq N_4$. Имеем

$$\delta \leq \|T^{\bar{c}}(\bar{v})\| - \|T^{c_{m_0}}(\bar{u}(c_{m_0}))\| + \|T^{c_{m_0}}(\bar{w})\| - \|T^{\bar{c}}(\bar{w})\| < \delta,$$

что невозможно. Таким образом, $\bar{v} = \bar{u}(\bar{c})$; противоречие.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.
2. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
4. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
5. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. М.: Наука, 1977.
7. *Черников П. В.* Метрические пространства и продолжение отображений // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 6. С. 210–215.

Статья поступила 25 марта 2003 г.

Черников Павел Васильевич