Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 517.51

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ОПЕРАТОРОВ РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ

Д. В. Прохоров

Аннотация: Даны критерии ограниченности операторов дробного интегрирования типа Римана — Лиувилля с переменными пределами между пространствами Лебега на оси.

Ключевые слова: оператор Римана — Лиувилля, ограниченность.

Введение

В работе рассматривается задача о нахождении необходимых и достаточных условий (L^p, L^q)-ограниченности операторов дробного интегрирования типа Римана — Лиувилля:

$$(\mathcal{T}_{a,b}f)(x) := v(x)\chi_{(a,b)}(x)\int\limits_{\psi(x)}^{\phi(x)} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$, u, v — неотрицательные измеримые весовые функции, а граничные функции ψ, ϕ предполагаются абсолютно непрерывными строго возрастающими на $[a,b]$ и удовлетворяющими условию $0 \le \psi(x) < \phi(x) \le x$, $x \in (a,b)$.

Данная задача тесно связана с характеризацией весовых неравенств

$$\|vI_\alpha(uf)\|_q \le C\|f\|_p \tag{2}$$

с оператором Римана — Лиувилля

$$(I_\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{f(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}},$$

где $\|f\|_p$ обозначает норму функции f в пространстве Лебега L^p на полуоси $(0,\infty)$:

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В работе автора [1] неравенство (2) было охарактеризовано в одновесовом случае, когда $u \equiv 1$, при $\alpha > 1/p$, $p > 1$, $0 < q < \infty$. На этой основе в [2] был

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 03–01–00017, 03–01–06360).

© 2003 Прохоров Д. В.

изучен оператор (1) также в одновесовом случае и при тех же ограничениях на параметры α, p и q. К сожалению, эти ограничения таковы, что из рассмотрения выпадал даже классический оператор Абеля $f \mapsto v(I_{1/2}f)$ в пространстве L^2. Этот недостаток удалось устранить в недавней работе В. Д. Степанова и автора [3], где неравенство (2) охарактеризовано в случае $1 < p \leq q < \infty$ при более слабых ограничениях на параметр α и весовые функции u, v. При аналогичных ограничениях в настоящей работе изучаются операторы вида (1).

Следует отметить, что случай $\alpha \geq 1$ отличается от нашего рассмотрения. Всю информацию о нем читатель найдет в работах [4–6].

Всюду в работе произведения вида $0 \cdot \infty$ полагаются равными 0. Соотношение $A \ll B$ означает $A \leq cB$ с константой c, зависящей только от α, p и q, $A \approx B$ равносильно $A \ll B \ll A$. Символ $\mathbb{R}$ обозначает множество всех действительных чисел, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, χ_E — характеристическую функцию (индикатор) множества $E \subset \mathbb{R}$, $p' = p/(p-1)$, $q' = q/(q-1)$. Мы используем значки := и =: для определения новых величин. Кроме того, используем сокращение $\|S\| := \|S\|_{L^p \to L^q}$ для произвольного оператора $S : L^p \to L^q$.

Данная работа была завершена во время визита автора в Корейский высший институт науки и технологий (KAIST) в г. Тэджоне. Автор выражает глубокую благодарность Отделению математики этого университета за финансовую поддержку и гостеприимство.

Основные результаты

Сначала мы находим критерии (L^p, L^q)-ограниченности операторов

$$(\mathcal{R}_{a,b}f)(x) := v(x)\chi_{(a,b)}(x) \int\limits_{\phi(a)}^{\phi(x)} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}, \tag{3}$$

$$(\mathcal{W}_{a,b}f)(x) := v(x)\chi_{(a,b)}(x) \int\limits_{\psi(x)}^{\psi(b)} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}, \quad \psi(b) \leq a, \tag{4}$$

а затем на их основе характеризуем ограниченность оператора $\mathcal{T}_{a,b}$.

Леммы 1, 2 дают критерии (L^p, L^q)-ограниченности, $1 < p \leq q < \infty$, оператора (3) при различных ограничениях на параметр α и функции ϕ, u, v.

Лемма 1. *Пусть* $0 \leq a < b < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$, $1 - q'/p' < \alpha \leq 1$, $1 - \beta := (1-\alpha)p'/q'$; ϕ — *абсолютно непрерывная строго возрастающая на* $[a, b]$ *функция такая, что* $0 \leq \phi(t) \leq t$, $t \in (a, b)$ *и*

$$\phi^{-1}(x) - x \leq 2(\phi^{-1}(y) - y), \quad \phi(a) \leq \frac{\phi(a) + x}{2} \leq y \leq x \leq \phi(b); \tag{5}$$

функция v *неотрицательная и измеримая на* (a, b), *а* u *положительная, конечная и неубывающая на* $(\phi(a), \phi(b))$. *Тогда для ограниченности оператора* $\mathcal{R}_{a,b}$ *из* L^p *в* L^q *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{\phi^{-1}(s)}^{b} \frac{v(x)^q\,dx}{(x-s)^{1-\alpha}} < \infty \quad \text{для почти всех } s \in (\phi(a), \phi(b))$$

и $\mathcal{A}_{\mathcal{R}_{a,b}} < \infty$, *где*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{R}_{a,b}} := \operatorname*{ess\,sup}_{\phi(a)<s<\phi(b)} \left(\left[\int\limits_s^{\phi(b)} \frac{u(y)^{p'}\,dy}{(\phi^{-1}(y)-s)^{1-\beta}} \left[\int\limits_{\phi^{-1}(y)}^{b} \frac{v(x)^q\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right]^{p'} \right]^{\frac{1}{p'}} \times \left[\int\limits_{\phi^{-1}(s)}^{b} \frac{v(x)^q\,dx}{(x-s)^{1-\alpha}} \right]^{-\frac{1}{q'}} \right).$$

Более того, $\|\mathcal{R}_{a,b}\|_{L^p\to L^q} \approx \mathcal{A}_{\mathcal{R}_{a,b}}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть оператор $\mathcal{R}_{a,b}$ ограничен из L^p в L^q, т. е. выполнено неравенство

$$\left(\int\limits_a^b v(x)^q \left| \int\limits_{\phi(a)}^{\phi(x)} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \le \|\mathcal{R}_{a,b}\|\,\|f\|_p \tag{6}$$

для любой функции $f \in L^p(\phi(a),\phi(b))$. Фиксируем произвольное $s \in (\phi(a),\phi(b))$. Полагая в этом неравенстве $f = \chi_{(\phi(a),\phi(b))}$, имеем

$$u\left(\frac{\phi(a)+s}{2}\right) b^{\alpha-1} \left(\frac{s-\phi(a)}{2}\right) \left(\int\limits_{\phi^{-1}(s)}^{b} v(x)^q\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \le \|\mathcal{R}_{a,b}\|(\phi(b)-\phi(a))^{\frac{1}{p}}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\phi^{-1}(s)}^{b} v(x)^q\,dx < \infty.$$

Ввиду двойственности (6) выполнено тогда и только тогда, когда для любой функции $g \in L^{q'}(a,b)$ справедливо

$$\left(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(b)} u(y)^{p'} \left| \int\limits_{\phi^{-1}(y)}^{b} \frac{v(x)g(x)\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right|^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \le \|\mathcal{R}_{a,b}\|\,\|g\|_{q'}. \tag{7}$$

Отсюда при $g(x) = v(x)^{q-1}\chi_{(\phi^{-1}(s),b)}(x)$ вытекает, что

$$u(s)\left(\int\limits_s^{\phi(b)} \left(\int\limits_{\phi^{-1}(y)}^{b} \frac{v(x)^q\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right)^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \le \|\mathcal{R}_{a,b}\| \left(\int\limits_{\phi^{-1}(s)}^{b} v(x)^q\,dx \right)^{\frac{1}{q'}},$$

и мы получаем первое условие леммы.

Далее, для $s \in (\phi(a),\phi(b))$ положим

$$J_0(u,v) := \left[\int\limits_s^{\phi(b)} \frac{u(y)^{p'}\,dy}{(\phi^{-1}(y)-s)^{1-\beta}} \left[\int\limits_{\phi^{-1}(y)}^{b} \frac{v(x)^q\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right]^{p'} \right]^{\frac{1}{p'}}$$

и рассмотрим срезки весовых функций $v_n := \min\{v, n\}$, $u_n := \min\{u, n\}$, где $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $J_0(u_n, v_n) < \infty$. Применяя неравенство треугольника, получим $J_0(u_n, v_n) \le J_1 + J_2$, где

$$J_1 := \left[\int\limits_s^{\phi(b)} \frac{u_n(y)^{p'}\,dy}{(\phi^{-1}(y)-s)^{1-\beta}} \left[\int\limits_{\phi^{-1}(y)}^{\min\{2\phi^{-1}(y)-s,b\}} \frac{v_n(x)^q\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}}\right]^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}},$$

$$J_2 := \left[\int\limits_s^{\phi(b)} \frac{u_n(y)^{p'}\,dy}{(\phi^{-1}(y)-s)^{1-\beta}} \left[\int\limits_{\min\{2\phi^{-1}(y)-s,b\}}^{b} \frac{v_n(x)^q\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}}\right]^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

При $g_s(x) = v_n(x)^{q-1}(x-s)^{(\alpha-1)\frac{1}{q'}}\chi_{(\phi^{-1}(s),b)}(x)$ имеем

$$\|g_s\|_{q'} = \left(\int\limits_{\phi^{-1}(s)}^{b} \frac{v_n(x)^q\,dx}{(x-s)^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{q'}} < \infty.$$

Поэтому, подставляя g_s в неравенство (7), получим оценку

$$\left(\int\limits_{\phi^{-1}(s)}^{b} \frac{v_n(x)^q\,dx}{(x-s)^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{q'}} \|\mathcal{R}_{a,b}\|$$
$$\ge \left[\int\limits_s^{\phi(b)} u_n(y)^{p'}\,dy \left[\int\limits_{\phi^{-1}(y)}^{\min\{2\phi^{-1}(y)-s,b\}} \frac{v_n(x)^q\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}(x-s)^{(1-\alpha)\frac{1}{q'}}}\right]^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}} \gg J_1,$$

ибо $x - s \le 2(\phi^{-1}(y) - s)$.

Для оценки J_2 заметим, что для любых двух чисел z, y, удовлетворяющих соотношению

$$\phi(a) \le z \le y \le \frac{\phi(b)+z}{2} \le \phi(b),$$

условие (5) при $x = 2y - z$ влечет неравенство

$$\phi^{-1}(2y-z) \le 2\phi^{-1}(y) - z. \tag{8}$$

Отсюда, в частности, при $y = \frac{\phi(b)+z}{2}$ следует, что для любого $z \in (\phi(a), \phi(b))$ выполнено $\phi\left(\frac{b+z}{2}\right) \le \frac{\phi(b)+z}{2}$. Применяя (8) при $z = s$, находим

$$J_2 = \left[\int\limits_s^{\phi(\frac{b+s}{2})} \frac{u_n(y)^{p'}\,dy}{(\phi^{-1}(y)-s)^{1-\beta}} \left[\int\limits_{2\phi^{-1}(y)-s}^{b} \frac{v_n(x)^q\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}}\right]^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}}$$
$$\le \left[\int\limits_s^{\frac{\phi(b)+s}{2}} \frac{u_n(y)^{p'}\,dy}{(\phi^{-1}(y)-s)^{1-\beta}} \left[\int\limits_{\phi^{-1}(2y-s)}^{b} \frac{v_n(x)^q\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}}\right]^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

Делая замену $2y - s = \tau$, продолжим оценку:

$$J_2 \le \left[\frac{1}{2}\int\limits_s^{\phi(b)} \frac{u_n(\frac{\tau+s}{2})^{p'}\,d\tau}{(\phi^{-1}(\frac{\tau+s}{2})-s)^{1-\beta}} \left[\int\limits_{\phi^{-1}(\tau)}^{b} \frac{v_n(x)^q\,dx}{(x-\frac{\tau+s}{2})^{1-\alpha}}\right]^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}} \le 2^{-\frac{\beta}{p'}} J_0(u_n, v_n),$$

в силу $s \le \frac{s+\tau}{2} \le \tau$, монотонности u и соотношения (8) при $y = \frac{s+\tau}{2}$, $z = s$.

Объединяя обе оценки, находим

$$J_0(u_n, v_n) \le C\|\mathcal{R}_{a,b}\| \left(\int\limits_{\phi^{-1}(s)}^{b} \frac{v_n(x)^q\,dx}{(x-s)^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{q'}} + 2^{-\frac{\beta}{p'}} J_0(u_n, v_n),$$

где константа C зависит только от p, q и α. Следовательно,

$$J_0(u_n, v_n) \ll \|\mathcal{R}_{a,b}\| \left(\int\limits_{\phi^{-1}(s)}^{b} \frac{v(x)^q\,dx}{(x-s)^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, по теореме Фату о монотонной сходимости получим

$$J_0(u, v) \ll \|\mathcal{R}_{a,b}\| \left(\int\limits_{\phi^{-1}(s)}^{b} \frac{v(x)^q\,dx}{(x-s)^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Последнее неравенство вместе с доказанным выше первым условием леммы влекут конечность константы $\mathcal{A}_{\mathcal{R}_{a,b}}$ и оценку $\|\mathcal{R}_{a,b}\| \gg \mathcal{A}_{\mathcal{R}_{a,b}}$.

Достаточность. Пусть f — неотрицательная ограниченная на $[\phi(a), \phi(b)]$ функция с носителем $\operatorname{supp} f \subset (\phi(a), \phi(b))$. Тогда

$$\|\mathcal{R}_{a,b} f\|_q^q \le q \int\limits_a^b v(x)^q\,dx \int\limits_{\phi(a)}^{\phi(x)} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \left(\int\limits_{\phi(a)}^{y} \frac{f(s)u(s)\,ds}{(\phi^{-1}(y)-s)^{1-\alpha}} \right)^{q-1}$$

$$= q \int\limits_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)u(y) \left(\int\limits_{\phi(a)}^{y} \frac{f(s)u(s)\,ds}{(\phi^{-1}(y)-s)^{1-\alpha}} \right)^{q-1} \left(\int\limits_{\phi^{-1}(y)}^{b} \frac{v(x)^q\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right) dy =: qJ.$$

Оценим J, применяя неравенства Гёльдера с показателями p и p' и Минковского с показателем $\frac{p'}{q'} \ge 1$:

$$J \le \|f\|_p \left[\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(b)} u(y)^{p'} \left[\left(\int\limits_{\phi(a)}^{y} \frac{f(s)u(s)\,ds}{(\phi^{-1}(y)-s)^{1-\alpha}} \right)^{q} \right]^{\frac{p'}{q'}} \left[\int\limits_{\phi^{-1}(y)}^{b} \frac{v(x)^q\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right]^{p'} dy \right]^{\frac{1}{p'}}$$

$$\le \|f\|_p \left(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(b)} u(y)^{p'} \left[q \int\limits_{\phi(a)}^{y} \frac{f(s)u(s)\,ds}{(\phi^{-1}(y)-s)^{1-\alpha}} \left[\int\limits_{\phi(a)}^{s} \frac{f(t)u(t)\,dt}{(\phi^{-1}(s)-t)^{1-\alpha}} \right]^{q-1} \right]^{\frac{p'}{q'}} \right.$$

$$\left. \times \left[\int\limits_{\phi^{-1}(y)}^{b} \frac{v(x)^q\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right]^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \le q^{\frac{1}{q'}} \|f\|_p \left(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(s)u(s) \left[\int\limits_{\phi(a)}^{s} \frac{f(t)u(t)\,dt}{(\phi^{-1}(s)-t)^{1-\alpha}} \right]^{q-1} \right.$$

$$\left. \times \left[\int\limits_{s}^{\phi(b)} \frac{u(y)^{p'}\,dy}{(\phi^{-1}(y)-s)^{1-\beta}} \left[\int\limits_{\phi^{-1}(y)}^{b} \frac{v(x)^q\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right]^{p'} \right]^{\frac{q'}{p'}} ds \right)^{\frac{1}{q'}} \le q^{\frac{1}{q'}} \mathcal{A}_{\mathcal{R}_{a,b}} \|f\|_p J^{\frac{1}{q'}}.$$

Заметим, что величина J конечна, ибо на отрезке $[a_1, b_1]$, где $a_1 := \inf\{\operatorname{supp} f\}$ и $b_1 := \sup\{\operatorname{supp} f\}$, функция u ограничена и

$$\int\limits_{\phi^{-1}(s)}^{b} \frac{v(x)^q\,dx}{(x-s)^{1-\alpha}} \in L^{p'}[a_1, b_1]$$

в силу условий леммы. Следовательно, $\|\mathcal{R}_{a,b} f\|_q \ll \mathcal{A}_{\mathcal{R}_{a,b}} \|f\|_p$ для любой функции с аналогичными свойствами. А так как каждую неотрицательную функцию можно приблизить поточечно снизу функциями рассмотренного класса, то теорема Фату о монотонной сходимости приводит к оценке $\|\mathcal{R}_{a,b}\| \ll \mathcal{A}_{\mathcal{R}_{a,b}}$. $\square$

Лемма 2. *Пусть $0 \le a < b < \infty$, $1 < p \le q < \infty$, $1 - p/q < \alpha \le 1$, $1 - \gamma := (1-\alpha)q/p$; ϕ — абсолютно непрерывная строго возрастающая на $[a, b]$ функция такая, что $0 \le \phi(t) \le t$, $t \in (a, b)$ и*

$$y - \phi(y) \le 2(x - \phi(x)), \quad a \le y \le x \le \frac{y+b}{2} \le b; \tag{9}$$

функция u неотрицательная и измеримая на $(\phi(a), \phi(b))$, а v положительная, конечная и невозрастающая на (a, b). Тогда для ограниченности оператора $\mathcal{R}_{a,b}$ из L^p в L^q необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(s)} \frac{u(y)^{p'}\,dy}{(s-y)^{1-\alpha}} < \infty \quad \textit{для почти всех } s \in (a, b)$$

и $\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}_{a,b}} < \infty$, где

$$\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}_{a,b}} := \operatorname*{ess\,sup}_{a<s<b} \left[\int\limits_a^s \frac{v(x)^q\,dx}{(s-\phi(x))^{1-\gamma}} \left[\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(x)} \frac{u(y)^{p'}\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right]^q \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(s)} \frac{u(y)^{p'}\,dy}{(s-y)^{1-\alpha}} \right]^{-\frac{1}{p}}.$$

Более того, $\|\mathcal{R}_{a,b}\|_{L^p \to L^q} \approx \bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}_{a,b}}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть оператор $\mathcal{R}_{a,b}$ ограничен из L^p в L^q, т. е. выполнены неравенства (6) и (7). Фиксируем произвольное $s \in (a, b)$. Полагая в неравенстве (7) $g = \chi_{(a,b)}$, имеем

$$v\left(\frac{b+s}{2}\right) b^{\alpha-1} \left(\frac{b-s}{2}\right) \left(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(s)} u(y)^{p'}\,dy \right)^{\frac{1}{p'}} \le \|\mathcal{R}_{a,b}\| (b-a)^{\frac{1}{q'}}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(s)} u(y)^{p'}\,dy < \infty,$$

откуда подстановкой $f(y) = u(y)^{p'-1} \chi_{(\phi(a), \phi(s))}(y)$ в (6) извлекаем первое условие леммы.

Для $s \in (a, b)$ положим

$$J_0'(u, v) := \left[\int\limits_a^s \frac{v(x)^q\,dx}{(s-\phi(x))^{1-\gamma}} \left[\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(x)} \frac{u(y)^{p'}\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right]^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

и $v_n := \min\{v,n\}$, $u_n := \min\{u,n\}$, где $n \in \mathbb{N}$. При этом $J_0'(u_n,v_n) < \infty$. Применяя неравенство треугольника, получим $J_0'(u_n,v_n) \le J_1' + J_2'$, где

$$J_1' := \left[\int\limits_a^s \frac{v_n(x)^q\,dx}{(s-\phi(x))^{1-\gamma}}\left[\int\limits_{\max\{\phi(a),2\phi(x)-s\}}^{\phi(x)} \frac{u_n(y)^{p'}\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}\right]^q\right]^{\frac{1}{q}},$$

$$J_2' := \left[\int\limits_a^s \frac{v_n(x)^q\,dx}{(s-\phi(x))^{1-\gamma}}\left[\int\limits_{\phi(a)}^{\max\{\phi(a),2\phi(x)-s\}} \frac{u_n(y)^{p'}\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}\right]^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Заметим, что функция $y \mapsto f_s(y) = u_n(y)^{p'-1}(s-y)^{(\alpha-1)\frac{1}{p}}\chi_{(\phi(a),\phi(s))}(y)$ принадлежит пространству L^p и

$$\|f_s\|_p = \left(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(s)} \frac{u_n(y)^{p'}\,dy}{(s-y)^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Подставляя f_s в неравенство (6), получим оценку

$$\left(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(s)} \frac{u_n(y)^{p'}\,dy}{(s-y)^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}} \|\mathcal{R}_{a,b}\|$$

$$\ge \left[\int\limits_a^s v_n(x)^q\,dx\left[\int\limits_{\max\{\phi(a),2\phi(x)-s\}}^{\phi(x)} \frac{u_n(y)^{p'}\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}(s-y)^{(1-\alpha)\frac{1}{p}}}\right]^q\right]^{\frac{1}{q}} \gg J_1',$$

ибо $s-y \le 2(s-\phi(x))$.

Для оценки J_2' заметим, что для любых двух чисел z, x, удовлетворяющих соотношению

$$a \le \frac{a+z}{2} \le x \le z \le b,$$

условие (9) при $y = 2x - z$ влечет

$$2\phi(x) - z \le \phi(2x - z). \tag{10}$$

Отсюда, в частности, при $x = \frac{a+z}{2}$ следует, что для любого $z \in (a,b)$ выполнено неравенство $\frac{a+z}{2} \le \phi^{-1}\big(\frac{\phi(a)+z}{2}\big)$. Применяя (10) при $z = s$, находим

$$J_2' = \left[\int\limits_{\phi^{-1}\left(\frac{\phi(a)+s}{2}\right)}^{s} \frac{v_n(x)^q\,dx}{(s-\phi(x))^{1-\gamma}}\left[\int\limits_{\phi(a)}^{2\phi(x)-s} \frac{u_n(y)^{p'}\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}\right]^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \left[\int\limits_{\frac{a+s}{2}}^{s} \frac{v_n(x)^q\,dx}{(s-\phi(x))^{1-\gamma}}\left[\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(2x-s)} \frac{u_n(y)^{p'}\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}\right]^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Делая замену $2x - s = \tau$, продолжим оценку:

$$J_2' \le \left[\frac{1}{2}\int\limits_a^s \frac{v_n\big(\frac{s+\tau}{2}\big)^q\,d\tau}{\big(s-\phi\big(\frac{s+\tau}{2}\big)\big)^{1-\gamma}}\left[\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(\tau)} \frac{u_n(y)^{p'}\,dy}{\big(\frac{s+\tau}{2}-y\big)^{1-\alpha}}\right]^q\right]^{\frac{1}{q}} \le 2^{-\frac{\gamma}{q}} J_0'(u_n,v_n),$$

в силу неравенства $\tau \le \frac{s+\tau}{2} \le s$, монотонности v и соотношения (10) при $x = \frac{s+\tau}{2}$, $z = s$.

Объединяя обе оценки, находим

$$J_0'(u_n, v_n) \le C\|\mathcal{R}_{a,b}\| \left(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(s)} \frac{u_n(y)^{p'}\,dy}{(s-y)^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{p}} + 2^{-\frac{\gamma}{q}} J_0'(u_n, v_n),$$

где константа C зависит только от p, q и α. Следовательно,

$$J_0'(u_n, v_n) \ll \|\mathcal{R}_{a,b}\| \left(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(s)} \frac{u(y)^{p'}\,dy}{(s-y)^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, по теореме Фату о монотонной сходимости получим

$$J_0'(u, v) \ll \|\mathcal{R}_{a,b}\| \left(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(s)} \frac{u(y)^{p'}\,dy}{(s-y)^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Последнее неравенство вместе с доказанным выше первым условием леммы влекут конечность константы $\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}_{a,b}}$ и оценку $\|\mathcal{R}_{a,b}\| \gg \overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}_{a,b}}$.

Достаточность. Пусть g — неотрицательная ограниченная на $[a, b]$ функция с носителем $\mathrm{supp} g \subset (a, b)$. Тогда

$$\left\|\mathcal{R}_{a,b}^* g\right\|_{p'}^{p'} \le p' \int\limits_{\phi(a)}^{\phi(b)} u(y)^{p'}\,dy \int\limits_{\phi^{-1}(y)}^{b} \frac{v(x)g(x)\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \left(\int\limits_{x}^{b} \frac{v(s)g(s)\,ds}{(s-\phi(x))^{1-\alpha}} \right)^{p'-1}$$

$$= p' \int\limits_{a}^{b} v(x)g(x)\,dx \left(\int\limits_{x}^{b} \frac{v(s)g(s)\,ds}{(s-\phi(x))^{1-\alpha}} \right)^{p'-1} \left(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(x)} \frac{u(y)^{p'}\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right) =: p'J'.$$

Применяя сначала неравенство Гёльдера с показателями q' и q, а затем неравенство Минковского с показателем $\frac{q}{p} \ge 1$, аналогично доказательству леммы 1 оценим J':

$$J' \le \|g\|_{q'} \left[\int\limits_{a}^{b} v(x)^q\,dx \left[\left(\int\limits_{x}^{b} \frac{v(s)g(s)\,ds}{(s-\phi(x))^{1-\alpha}} \right)^{p'} \right]^{\frac{q}{p}} \left[\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(x)} \frac{u(y)^{p'}\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right]^{q} \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \|g\|_{q'} \left(\int\limits_{a}^{b} v(x)^q \left[p' \int\limits_{x}^{b} \frac{v(s)g(s)\,ds}{(s-\phi(x))^{1-\alpha}} \left[\int\limits_{s}^{b} \frac{v(t)g(t)\,dt}{(t-\phi(s))^{1-\alpha}} \right]^{p'-1} \right]^{\frac{q}{p}} \right.$$

$$\left. \times \left[\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(x)} \frac{u(y)^{p'}\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right]^{q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \le (p')^{\frac{1}{p}} \|g\|_{q'} \left(\int\limits_{a}^{b} v(s)g(s) \left[\int\limits_{s}^{b} \frac{v(t)g(t)\,dt}{(t-\phi(s))^{1-\alpha}} \right]^{p'-1} \right.$$

$$\left. \times \left[\int\limits_{a}^{s} \frac{v(x)^q\,dx}{(s-\phi(x))^{1-\gamma}} \left[\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(x)} \frac{u(y)^{p'}\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right]^{q} \right]^{\frac{p}{q}} ds \right)^{\frac{1}{p}} \le (p')^{\frac{1}{p}} \bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}_{a,b}} \|g\|_{q'} (J')^{\frac{1}{p}}.$$

При этом величина J' конечна, ибо на отрезке $[a_1, b_1]$, где $a_1 := \inf\{\operatorname{supp} g\}$ и $b_1 := \sup\{\operatorname{supp} g\}$, функция v ограничена и

$$\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(s)} \frac{u(y)^{p'}\,dy}{(s-y)^{1-\alpha}} \in L^q[a_1, b_1]$$

в силу условий леммы. Следовательно, $\|\mathcal{R}^*_{a,b} g\|_{p'} \ll \bar{A}_{\mathcal{R}_{a,b}} \|g\|_{q'}$, что эквивалентно оценке $\|\mathcal{R}_{a,b}\| \ll \bar{A}_{\mathcal{R}_{a,b}}$. $\square$

Следующая лемма дает критерий ограниченности оператора (4) с переменным нижним пределом.

Лемма 3. *Пусть $\alpha > 0$, $0 < a < b \le \infty$ и $1 < p \le q < \infty$; ψ — неотрицательная абсолютно непрерывная строго возрастающая на $[a, b]$ функция такая, что $\psi(b) \le a$; v и u — измеримые неотрицательные функции соответственно на (a, b) и $(\psi(a), \psi(b))$; кроме того, определим $\lambda \in [a, b]$ и функцию l соотношениями $\lambda + \psi(\lambda) = 2a$, $l(x) = 2a - x$. Тогда $\|\mathcal{W}_{a,b}\|_{L^p \to L^q} \approx \mathcal{A}_{\mathcal{W}_{a,b}}$, где*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{W}_{a,b}} = \begin{cases} \mathbb{A}_0, & \text{если } 2a - \psi(b) \ge b, \\ \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_4 & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$\mathbb{A}_0 = \sup_{a<t<b} \mathbb{A}_0(t) = \sup_{a<t<b} \left(\int\limits_a^t v(x)^q\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\psi(t)}^{\psi(b)} u(y)^{p'} (a-y)^{(\alpha-1)p'}\,dy \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$\mathbb{A}_1 = \sup_{a<t\le 2a-\psi(b)} \mathbb{A}_0(t),$$

$$\mathbb{A}_2 = \sup_{2a-\psi(b)<t<\lambda} \left(\int\limits_{2a-\psi(b)}^t v(x)^q\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\psi(t)}^{l(t)} u(y)^{p'} (a-y)^{(\alpha-1)p'}\,dy \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$\mathbb{A}_3 = \sup_{2a-\psi(b)<t<\lambda} \left(\int\limits_t^\lambda v(x)^q (x-a)^{(\alpha-1)q}\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{l(t)}^{\psi(b)} u(y)^{p'}\,dy \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$\mathbb{A}_4 = \sup_{\lambda<t<b} \left(\int\limits_\lambda^t v(x)^q (x-a)^{(\alpha-1)q}\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\psi(t)}^{\psi(b)} u(y)^{p'}\,dy \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем проводить рассуждения для неотрицательных функций f. Предварительно заметим, что для $0 \le y \le a \le x$ справедливо соотношение

$$(x-y)^{\alpha-1} \approx \begin{cases} (x-a)^{\alpha-1}, & x + y \ge 2a, \\ (a-y)^{\alpha-1}, & x + y \le 2a. \end{cases} \tag{11}$$

Начнем со случая $2a - \psi(b) < b$. Запишем $(\mathcal{W}_{a,b} f)(x)$ в виде суммы

$$(\mathcal{W}_{a,b} f)(x) = (S_1 f + S_{21} f + S_{22} f + S_3 f + S_4 f)(x),$$

где

$$(S_1 f)(x) := v(x) \chi_{(a, 2a-\psi(b))}(x) \int\limits_{\psi(x)}^{\psi(b)} \frac{f(y) u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}},$$

$$(S_{21}f)(x) := v(x)\chi_{(2a-\psi(b),\lambda)}(x)\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(\lambda)}\frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}},$$

$$(S_{22}f)(x) := v(x)\chi_{(2a-\psi(b),\lambda)}(x)\int\limits_{\psi(\lambda)}^{l(x)}\frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}},$$

$$(S_{3}f)(x) := v(x)\chi_{(2a-\psi(b),\lambda)}(x)\int\limits_{l(x)}^{\psi(b)}\frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}},$$

$$(S_{4}f)(x) := v(x)\chi_{(\lambda,b)}(x)\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(b)}\frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}.$$

Рассмотрим каждый оператор суммы по отдельности.

1. Если $x\in[a,2a-\psi(b)]$ и $y\in(\psi(x),\psi(b))$, то $x+y\le 2a-\psi(b)+\psi(b)=2a$ и (11) влечет $\|S_1f\|_q\approx\|H_1f\|_q$, где

$$(H_1f)(x)=w(x)\chi_{(a,b)}(x)\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(b)}f(y)u(y)(a-y)^{\alpha-1}\,dy,$$

а $w(x):=v(x)\chi_{(a,2a-\psi(b))}(x)$. Но H_1 — оператор Харди, значит (см. [7]), его норма оценивается константой:

$$\sup_{a<t<b}\left[\int\limits_a^t w(x)^q\,dx\right]^{\frac1q}\left[\int\limits_{\psi(t)}^{\psi(b)}u(y)^{p'}(a-y)^{(\alpha-1)p'}\,dy\right]^{\frac{1}{p'}}=\sup_{a<t\le 2a-\psi(b)}\mathbb{A}_0(t)=\mathbb{A}_1.$$

2. Если $x\in[2a-\psi(b),\lambda]$ и $y\in(\psi(x),l(x))$, то $x+y\le x+2a-x=2a$ и из (11) следует, что $\|S_{21}f\|_q\approx\|H_{21}f\|_q$, где

$$(H_{21}f)(x)=v(x)\chi_{(2a-\psi(b),\lambda)}(x)\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(\lambda)}f(y)u(y)(a-y)^{\alpha-1}\,dy.$$

Поэтому норма оператора S_{21} оценивается константой

$$\mathbb{A}_{21}=\sup_{2a-\psi(b)<t<\lambda}\left(\int\limits_{2a-\psi(b)}^{t}v(x)^q\,dx\right)^{\frac1q}\left(\int\limits_{\psi(t)}^{\psi(\lambda)}u(y)^{p'}(a-y)^{(\alpha-1)p'}\,dy\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Для оценки $\|S_{22}\|$ запишем

$$\|S_{22}f\|_q\approx\left(\int\limits_{2a-\psi(b)}^{\lambda}v(x)^q\left(\int\limits_{\psi(\lambda)}^{2a-x}f(y)u(y)(a-y)^{\alpha-1}\,dy\right)^q dx\right)^{\frac1q}.$$

Делая замену переменных $2a-x=t$, ввиду $2a-\lambda=\psi(\lambda)$ получим

$$\|S_{22}f\|_q \approx \left(\int\limits_{\psi(\lambda)}^{\psi(b)} v(2a-t)^q \left(\int\limits_{\psi(\lambda)}^{t} f(y)u(y)(a-y)^{\alpha-1}\,dy\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом, норма оператора S_{22} характеризуется константой

$$\mathbb{A}_{22} = \sup_{2a-\psi(b)<t<\lambda} \left(\int\limits_{2a-\psi(b)}^{t} v(x)^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\psi(\lambda)}^{l(t)} u(y)^{p'}(a-y)^{(\alpha-1)p'}\,dy\right)^{\frac{1}{p'}},$$

а сумма $S_{21}+S_{22}$ — константой $\mathbb{A}_2$.

3. Если $x\in[2a-\psi(b),\lambda]$ и $y\in(l(x),\psi(b))$, то $x+y\geq x+2a-x=2a$ и согласно (11) имеем

$$\|S_3f\|_q \approx \left(\int\limits_{2a-\psi(b)}^{\lambda} v(x)^q(x-a)^{(\alpha-1)q} \left(\int\limits_{2a-x}^{\psi(b)} f(y)u(y)\,dy\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Делая замену переменных $2a-x=t$, получим

$$\|S_3f\|_q \approx \left(\int\limits_{\psi(\lambda)}^{\psi(b)} v(2a-t)^q(a-t)^{(\alpha-1)q} \left(\int\limits_{t}^{\psi(b)} f(y)u(y)\,dy\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Следовательно, норма S_3 определяется константой $\mathbb{A}_3$.

4. Если $x\in[\lambda,b]$ и $y\in(\psi(x),\psi(b))$, то $x+y\geq x+\psi(x)\geq x+2a-x=2a$ и $\|S_4f\|_q\approx\|H_4f\|_q$, где

$$(H_4f)(x) = v(x)(x-a)^{\alpha-1}\chi_{(\lambda,b)}(x)\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(b)} f(y)u(y)\,dy.$$

Поэтому $\|S_4\|\approx\mathbb{A}_4$.

В случае $2a-\psi(b)\geq b$ норма оператора $\mathcal{W}_{a,b}$ оценивается константой $\mathbb{A}_0$, так как $\|\mathcal{W}_{a,b}f\|_q\approx\|H_1f\|_q$ с $w(x):=v(x)$. $\square$

Применяя блок-диагональное разложения, охарактеризуем оператор (1).

Теорема 1. *Пусть* $0\leq a<b\leq\infty$, $1<p\leq q<\infty$, $1-q'/p'<\alpha\leq 1$; ψ *и* ϕ — *абсолютно непрерывные строго возрастающие на* $[a,b]$ *функции, удовлетворяющие условиям* $\psi(a)=\phi(a)$, $\psi(b)=\phi(b)$, $0\leq\psi(t)<\phi(t)\leq t$, $t\in(a,b)$, *и на каждом отрезке* $[c,d]\subset(a,b)$

$$\phi^{-1}(x)-x\leq 2(\phi^{-1}(y)-y),\quad \phi(c)\leq\frac{\phi(c)+x}{2}\leq y\leq x\leq\phi(d); \tag{12}$$

функция v *неотрицательная и измеримая на* (a,b), *а* u *положительная, конечная и неубывающая на* $(\phi(a),\phi(b))$. *Тогда для ограниченности оператора* $\mathcal{T}_{a,b}$ *из* L^p *в* L^q *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $t\in(a,b)$

$$\int\limits_{\phi^{-1}(s)}^{t} \frac{v(x)^q\,dx}{(x-s)^{1-\alpha}}<\infty \quad \text{для почти всех } s\in(\psi(t),\phi(t))$$

и $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_{a,b}} < \infty$, *где*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{T}_{a,b}} := \sup_{a<t<b} [\mathcal{A}_{\mathcal{R}_{\phi^{-1}(\psi(t)),t}} + \mathcal{A}_{\mathcal{W}_{t,\psi^{-1}(\phi(t))}}].$$

Доказательство. Необходимость. Фиксируем произвольное $t \in (a,b)$. Из ограниченности оператора $\mathcal{T}_{a,b} : L^p \to L^q$ следует ограниченность операторов $\mathcal{R}_{\phi^{-1}(\psi(t)),t}$ и $\mathcal{W}_{t,\psi^{-1}(\phi(t))}$. Поэтому, применяя леммы 1 и 3, получим требуемое.

Достаточность. Разобьем интервал (a,b) точками $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ следующим образом:

$$\xi_0 := \min\{a+1, (a+b)/2\}, \quad \xi_k := \begin{cases} \psi^{-1}(\phi(\xi_{k-1})) & \text{при } k > 0, \\ \phi^{-1}(\psi(\xi_{k+1})) & \text{при } k < 0, \end{cases}$$

и запишем оператор $\mathcal{T}_{a,b}$ в виде суммы двух блок-диагональных операторов:

$$\mathcal{T}_{a,b} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{R}_{\xi_{k-1},\xi_k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{W}_{\xi_k,\xi_{k+1}}.$$

Охарактеризуем (L^p, L^q)-ограниченность оператора $\mathcal{T}_{a,b}$ через критерии для $\mathcal{R}_{\xi_{k-1},\xi_k}$ и $\mathcal{W}_{\xi_k,\xi_{k+1}}$. В силу блок-диагональности для произвольной неотрицательной $f \in L^p$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{a,b} f\|_q^q &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\mathcal{R}_{\xi_{k-1},\xi_k} f\|_q^q + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\mathcal{W}_{\xi_k,\xi_{k+1}} f\|_q^q \\ &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\mathcal{R}_{\xi_{k-1},\xi_k}\|^q \|f\chi_{(\phi(\xi_{k-1}),\phi(\xi_k))}\|_p^q + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\mathcal{W}_{\xi_k,\xi_{k+1}}\|^q \|f\chi_{(\psi(\xi_k),\psi(\xi_{k+1}))}\|_p^q. \end{aligned}$$

Применяя к суммам неравенство Йенсена, получим

$$\|\mathcal{T}_{a,b}\| \ll \sup_{k\in\mathbb{Z}} (\|\mathcal{R}_{\xi_{k-1},\xi_k}\| + \|\mathcal{W}_{\xi_k,\xi_{k+1}}\|),$$

что вместе с утверждениями лемм 1 и 3 влечет соотношение $\|\mathcal{T}_{a,b}\| \ll \mathcal{A}_{\mathcal{T}_{a,b}}$. $\square$

При помощи лемм 2 и 3 аналогично доказывается

Теорема 2. *Пусть* $0 \le a < b \le \infty$, $1 < p \le q < \infty$, $1 - p/q < \alpha \le 1$; ψ *и* ϕ — *абсолютно непрерывные строго возрастающие на* $[a,b]$ *функции, удовлетворяющие условиям* $\psi(a) = \phi(a)$, $\psi(b) = \phi(b)$, $0 \le \psi(t) < \phi(t) \le t$, $t \in (a,b)$, *и на каждом отрезке* $[c,d] \subset (a,b)$

$$y - \phi(y) \le 2(x - \phi(x)), \quad c \le y \le x \le \frac{y+d}{2} \le d; \tag{13}$$

функция u *неотрицательная и измеримая на* $(\phi(a), \phi(b))$, *а* v *положительная, конечная и невозрастающая на* (a,b). *Тогда для ограниченности оператора* $\mathcal{T}_{a,b}$ *из* L^p *в* L^q *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $t \in (a,b)$

$$\int_{\psi(t)}^{\phi(s)} \frac{u(y)^{p'}\,dy}{(s-y)^{1-\alpha}} < \infty \quad \text{для почти всех } s \in (\phi^{-1}(\psi(t)), t)$$

и $\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{T}_{a,b}} < \infty$, *где*

$$\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{T}_{a,b}} := \sup_{a<t<b} [\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}_{\phi^{-1}(\psi(t)),t}} + \mathcal{A}_{\mathcal{W}_{t,\psi^{-1}(\phi(t))}}].$$

Замечания. Условию (5) удовлетворяет любая непрерывная строго возрастающая функция $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $0 \le a < b < \infty$, такая, что функция $x \mapsto \phi^{-1}(x) - x$ неотрицательна и не возрастает, а условию (9) удовлетворяет ϕ, при которой неотрицательна и не убывает функция $x \mapsto x - \phi(x)$. Отметим также, что если функция ϕ в некоторой точке $\xi \in (a,b)$ принимает значение $\phi(\xi) = \xi$, то выполнено $\phi(x) = x$ в случае условия (5) для всех $x \in [\xi, b]$, а в случае условия (9) для всех $x \in [a, \xi]$.

Пусть теперь $a = 0$, $b = \infty$. Условию (12) (или (13)) удовлетворяют не только линейные функции $x \mapsto kx$ при $k \in (0,1]$. Например, функция $x \mapsto \phi_1(x) := x^2\chi_{[0,1]}(x) + x\chi_{(1,\infty)}(x)$ удовлетворяет условию (12), а функция $x \mapsto \phi_2(x) := x\chi_{[0,1]}(x) + \sqrt{x}\chi_{(1,\infty)}(x)$ — условию (13).

Результаты данной работы также характеризуют ограниченность из L^p в L^q одновесового оператора вида

$$(Hf)(x) := v(x)\chi_{(a,b)}(x) \int\limits_{\psi(x)}^{\phi(x)} \frac{f(y)\,dy}{|x-y|^{1-\alpha}}, \quad 0 \le a < b \le \infty, \tag{14}$$

где v — неотрицательная измеримая на (a,b) функция; ψ, ϕ — абсолютно непрерывные строго возрастающие на (a,b) функции такие, что $0 \le \psi(x) < x < \phi(x)$ при $x \in (a,b)$, $\psi(a) = \phi(a)$, $\psi(b) = \phi(b)$ и ϕ^{-1} абсолютно непрерывна на $(\phi(a), \phi(b))$. Действительно, оператор (14) представим в виде суммы операторов $H = H_1 + H_2$:

$$(H_1 f)(x) := v(x)\chi_{(a,b)}(x) \int\limits_{\psi(x)}^{x} \frac{f(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}},$$

$$(H_2 f)(x) := v(x)\chi_{(a,b)}(x) \int\limits_{x}^{\phi(x)} \frac{f(y)\,dy}{(y-x)^{1-\alpha}},$$

первый из которых удовлетворяет условиям теоремы 1, а сопряженный к второму — условиям теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prokhorov D.* On the boundedness and compactness of a class of integral operators // J. London Math. Soc. 2000. V. 61. P. 617–628.
2. *Прохоров Д. В.* Об операторах Римана — Лиувилля с переменными пределами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 1. С. 156–175.
3. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* Об операторах Римана — Лиувилля // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 4. С. 452–455.
4. *Heinig H. P., Sinnamon G.* Mapping properties of integral averaging operators // Studia Math. 1998. V. 129. P. 157–177.
5. *Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 298–317.
6. *Gogatishvili A., Lang J.* The generalized Hardy operators with kernel and variable integral limits in Banach function spaces // J. Ineq. Appl. 1999. V. 4. P. 1–16.
7. *Bradley J. S.* Hardy inequalities with mixed norms // Canad. Math. Bull. 1978. V. 21, N 1. P. 405–408.

Статья поступила 25 ноября 2002 г.

Прохоров Дмитрий Владимирович
Вычислительный центр ДВО РАН, ул. Тихоокеанская, 153, Хабаровск 680042
prohorov@as.khb.ru