Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 514.763.47

О ГАМИЛЬТОНОВО–МИНИМАЛЬНЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ ТОРАХ В $\mathbb{C}P^2$

А. Е. Миронов

Аннотация: Получены уравнения для гамильтоново-минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$ и указаны их частные решения в случае торов.

Ключевые слова: лагранжево подмногообразие, гамильтоново-минимальное подмногообразие.

1. Введение

В данной статье мы получим уравнения для гамильтоново-минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$ (лемма 1) и укажем их частные решения в случае торов.

Погружение $\psi : \Omega \to \mathbb{C}P^2$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ называется *лагранжевым*, если $\psi^*(S) = 0$, где S — форма Фубини — Штуди на $\mathbb{C}P^2$. Погружение называется H-*минимальным*, если вариации площади вдоль всех гамильтоновых полей равны нулю. Поле W вдоль $\psi(\Omega)$ гамильтоново, если 1-форма $S(W, .)$ точна на $\psi(\Omega)$. Основным результатом является

Теорема 1. *Отображение $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^2$, заданное формулой*

$$\psi(x, y) = (F_1(x)e^{i(G_1(x)+\alpha_1 y)} : F_2(x)e^{i(G_2(x)+\alpha_2 y)} : F_3(x)e^{i(G_3(x)+\alpha_3 y)}),$$

является конформным лагранжевым H-минимальным погружением плоскости, где

$$F_i = \sqrt{\frac{e^{2v(x)} + \alpha_{i+1}\alpha_{i+2}}{(\alpha_i - \alpha_{i+1})(\alpha_i - \alpha_{i+2})}}, \quad G_i = \frac{\alpha_i}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{2c_2 - ae^{2v(z)}}{\alpha_i e^{2v(z)} - c_1} dz,$$

$$e^{2v(x)} = a_1 \left(1 - \frac{a_1 - a_2}{a_1}\,\mathrm{sn}^2\left(x\sqrt{a_1 + a_3}, \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_3}\right)\right) \tag{1}$$

(индекс i рассматривается по модулю 3), $a_1 > a_2 > 0, \alpha_i$ — вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам (15), (16), *константы c_1, c_2, a, a_3 выражаются через a_i, α_i по формулам* (10), (12) *и из уравнения* (13), sn — *эллиптическая функция Якоби.*

Если при этом $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}$ и $\lambda_1 = G_1(T) - G_3(T) + (\alpha_1 - \alpha_3)\tau$, $\lambda_2 = G_2(T) - G_3(T) + (\alpha_2 - \alpha_3)\tau \in 2\pi\mathbb{Q}$, где T — период функции $e^{2v(x)}$ (см. (14)),

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 03–01–00403 и 03–01–06482).

$\tau \in \mathbb{R}$, то ψ — двоякопериодическое отображение с периодами $e_1 = (0,1)$ и $e_2 = N(T,\tau)$, N — некоторое натуральное число.

Отметим, что λ_1 и λ_2 зависят от свободных параметров a_1, a_2, τ и поэтому $\lambda_1, \lambda_2 \in 2\pi\mathbb{Q}$ для плотного множества троек (a_1, a_2, τ) из некоторой области.

Понятие H-минимальности введено в [1], там же доказано, что торы Клиффорда в $\mathbb{C}^n$ являются лагранжевыми H-минимальными. Другие примеры таких торов в $\mathbb{C}^2$ построены в [2, 3]. В [4] построены минимальные лагранжевы торы в $\mathbb{C}P^2$, которые являются частными случаями торов из теоремы 1 при $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ и $(a_1 + a_2)\bigl(c_1^2 + c_2^2\bigr) - a_1^2 a_2^2 = 0$.

Автор благодарит М. В. Нещадима, придавшего системе (3)–(5) наглядный вид, что позволило вывести из уравнений (3)–(5) уравнение Цицейка на метрику минимального лагранжевого тора в $\mathbb{C}P^2$.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть S^5 — единичная сфера в $\mathbb{C}^3$, $\mathscr{H} : S^5 \to \mathbb{C}P^2$ — расслоение Хопфа. Обозначим через ω симплектическую форму на $\mathbb{C}^3$:

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + dx_3 \wedge dy_3,$$

$z_j = x_j + iy_j$ — координаты в $\mathbb{C}^3$, $j = 1, 2, 3$. Пусть L — поверхность в $\mathbb{C}P^2$, $\mathscr{U}$ — достаточно малая окрестность точки $p \in L$. Обозначим через $\widetilde{\mathscr{U}}$ некоторое горизонтальное поднятие $\mathscr{U}$ на S^5.

Критерий лагранжевости L состоит в следующем (см. 5]): *поверхность L является лагранжевой тогда и только тогда, когда линейная оболочка радиус-вектора $\tilde{p}$ ($\tilde{p}$ — прообраз p) и касательной плоскости к $\widetilde{\mathscr{U}}$ в точке $\tilde{p}$ является лагранжевым трехмерным подпространством в $\mathbb{C}^3$ для всех $p \in L$.*

Мы также воспользуемся критерием H-минимальности в терминах лагранжевого угла — функции на L, которую определим ниже: *поверхность L H-минимальна тогда и только тогда, когда лагранжев угол является гармонической функцией на L в индуцированной метрике.*

Лагранжев угол (локально) строится следующим образом. Выберем ориентацию на $\widetilde{\mathscr{U}}$. Положим

$$e^{-i\beta} = z_1 \wedge z_2 \wedge z_3(\xi_1, \xi_2, p),$$

где ξ_1, ξ_2 — касательный ортонормированный базис к $\widetilde{\mathscr{U}}$, согласованный с ориентацией. Функция $\beta(p)$ называется *лагранжевым углом.* В общем случае $\beta(p)$ — многозначная функция на L. При обходе по циклу она может изменить свое значение на $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Будем задавать конформное лагранжево погружение ψ области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с координатами x, y в $\mathbb{C}P^2$ как композицию $r : \Omega \to S^5$ и $\mathscr{H}$. Пусть $e^{2v(x,y)}(dx^2 + dy^2)$ — индуцированная метрика на $\psi(\Omega)$. Заметим, что так как ψ конформное и лагранжево, то

$$\langle r, r_x \rangle = \langle r, r_y \rangle = \langle r_x, r_y \rangle = 0, \quad |r_x| = |r_y| = e^v,$$

где $\langle ., . \rangle$ — эрмитово произведение. Следовательно,

$$R = \begin{pmatrix} e^{i\beta} r^1 & e^{i\beta} r^2 & e^{i\beta} r^3 \\ e^{-v} r_x^1 & e^{-v} r_x^2 & e^{-v} r_x^3 \\ e^{-v} r_y^1 & e^{-v} r_y^2 & e^{-v} r_y^3 \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(3),$$

где r^1, r^2 и r^3 — компоненты r. Таким образом, для матриц A и B из алгебры Ли su(3) вида

$$A = \begin{pmatrix} i\beta_x & e^{v+i\beta} & 0 \\ -e^{v-i\beta} & -if - i\beta_x & ig - v_y \\ 0 & ig + v_y & if \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} i\beta_y & 0 & e^{v+i\beta} \\ 0 & ig & if + v_x \\ -e^{v-i\beta} & if - v_x & -ig - i\beta_y \end{pmatrix},$$

где $if = \langle \partial_x(e^{-v}r_y), e^{-v}r_y\rangle$, $ig = \langle \partial_y(e^{-v}r_x), e^{-v}r_x\rangle$, справедливы равенства

$$R_x = AR, \quad R_y = BR. \tag{2}$$

Матрицы A и B удовлетворяют уравнению нулевой кривизны

$$A_y - B_x + [A, B] = 0.$$

Ненулевые компоненты этого уравнения имеют вид

$$f_y + 2fv_y + g_x + 2gv_x + \beta_{xy} = 0,$$

$$-e^{2v} + 2f^2 + 2g^2 + ig_y + iv_y\beta_y + g(2iv_y + \beta_y) - v_{yy} - if_x - iv_x\beta_x \\ + f(-2iv_x + \beta_x) - v_{xx} = 0,$$

$$e^{2v} - 2f^2 - 2g^2 + ig_y + iv_y\beta_y + g(2iv_y - \beta_y) + v_{yy} - if_x - iv_x\beta_x \\ + f(-2iv_x - \beta_x) + v_{xx} = 0.$$

Отсюда вытекает

Лемма 1. *Имеют место уравнения*

$$U_y + V_x + e^{2v}\beta_{xy} = 0, \tag{3}$$

$$V_y + v_y e^{2v}\beta_y = U_x + v_x e^{2v}\beta_x, \tag{4}$$

$$\Delta v + e^{2v} - 2(U^2 + V^2)e^{-4v} - (\beta_x U + \beta_y V)e^{-2v} = 0, \tag{5}$$

где $U = fe^{2v}, V = ge^{2v}$.

Так как при конформном изменении метрики гармонические функции остаются гармоническими и на торе гармонические функции являются константами, можно считать, что для торов лагранжев угол имеет вид $\beta = ax + by$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Далее мы будем рассматривать случай, когда функции v, f и g зависят только от x. Тогда из (3)–(5) получаем

$$g = c_1 e^{-2v(x)}, \quad f = c_2 e^{-2v(x)} - \frac{a}{2},$$

$$(v')^2 = -\frac{a}{4} - \left(c_1^2 + c_2^2\right)e^{-4v} + (ac_2 - bc_1)e^{-2v} - e^{2v} - c, \tag{6}$$

c, c_1, c_2 — некоторые константы. Будем искать r^i в виде

$$r^i = C_i(x)e^{i\alpha_i y},$$

где $C_i(x)$ — комплекснозначная функция, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Из уравнений (2) следуют равенства

$$2(e^{4v(x)} + c_1\alpha_i)C_i(x) + iC_i'(x)(2c_2 + ae^{2v(x)} + 2ie^{2v(x)}v'(x)) + 2e^{2v}C_i''(x) = 0, \tag{7}$$

$$2i(c_1 - e^{2v(x)}\alpha_i)C'(x) + \alpha_i C(x)((a + 2iv'(x))e^{2v(x)} - 2c_2) = 0, \tag{8}$$

$$2\bigl(e^{2v(x)}\bigl(e^{2v(x)} - b\alpha_i - \alpha_i^2\bigr) - c_1\alpha_i\bigr)C_i(x) + C'(x)((ia + 2v'(x))e^{2v(x)} - 2ic_2) = 0. \tag{9}$$

Заметим, что если α_i удовлетворяет уравнению

$$\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + c_1 = 0,$$

то уравнения (7) и (9) вытекают из уравнений (8) и (6). Далее, из условия $R \in \mathrm{SU}(3)$ и из (8) находим

$$C_i(x) = F_i(x)e^{iG_i(x)},$$

где

$$c_1 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad c = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3, \quad b = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3. \tag{10}$$

Осталось получить решения уравнения (6). Сделаем замену $h = e^{2v}$, тогда уравнение (6) примет вид

$$\begin{aligned}(h')^2 &+ 4(h - a_1)(h - a_2)(h + a_3) \\ &= (h')^2 + 4h^3 + (4c + a^2)h^2 + 4(bc_1 - ac_2)h + 4\bigl(c_1^2 + c_2^2\bigr) = 0,\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$a_3 = \frac{c_1^2 + c_2^2}{a_1a_2}, \quad a = \frac{bc_1 + a_1a_3 + a_2a_3 - a_1a_2}{c_2}, \tag{12}$$

а c_2 является корнем уравнения

$$\begin{aligned}c_2^4(a_1 - a_2)^2 + 2c_2^2\bigl(a_1^3a_2^2 + a_1^2a_2^3 + \bigl(a_1a_2^2 + a_1^2a_2\bigr)bc_1 + \bigl(a_1^2 + a_2^2\bigr)c_1^2 + 2a_1^2a_2^2c\bigr) \\ + \bigl((a_1 + a_2)c_1^2 - a_1^2a_2^2 + a_1a_2c_1b\bigr)^2 = 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Из тождества

$$(\mathrm{sn}(x)')^2 = (1 - \mathrm{sn}^2(x))(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(x))$$

(см. [6]) легко вывести, что уравнение (11) имеет решение вида (1), где

$$\mathrm{sn}(x, k) = \sin\varphi,$$

φ — обратная функция к

$$w(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}}, \quad 0 < k < 1.$$

Функция $e^{2v(x)}$ имеет период

$$T = \frac{2w(\frac{\pi}{2})}{\sqrt{a_1 + a_3}}. \tag{14}$$

Ограничением на выбор параметров a_i, α_i является условие $c_2 \in \mathbb{R}$:

$$P = a_1^3a_2^2 + a_1^2a_2^3 + \bigl(a_1a_2^2 + a_1^2a_2\bigr)bc_1 + \bigl(a_1^2 + a_2^2\bigr)c_1^2 + 2a_1^2a_2^2c \le 0, \tag{15}$$

$$P^2 - (a_1 - a_2)^2\bigl((a_1 + a_2)c_1^2 - a_1^2a_2^2 + a_1a_2c_1b\bigr)^2 \ge 0. \tag{16}$$

Теорема 1 доказана.

Неравенства (15) и (16) выполнены, например, при $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Oh Y.* Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations // Math. Z. 1993. Bd 212. S. 175–192.
2. *Castro I., Urbano F.* Examples of unstable Hamiltonian-minimal Lagrangian tori in $\mathbb{C}^2$ // Compositio Math. 1998. V. 111. P. 1–14.
3. *Helein F., Romon P.* Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in $\mathbb{C}^2$ // Comm. Anal. Geom. 2002. V. 10. P. 79–126.
4. *Castro I., Urbano F.* New examples of minimal Lagrangian tori in the complex projective plane // Manuscripta Math. 1994. V. 85. P. 265–281.
5. *Helein F., Romon P.* Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in Hermitian symmetric spaces // Differential geometry and Integrable Systems. Providence: Amer. Math. Soc., 2002. P. 161–178. (Contemp. Math.; v. 308).
6. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

Статья поступила 27 августа 2003 г.

Миронов Андрей Евгеньевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
mironov@ngs.ru