Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 517.983.34

ОПЕРАТОРЫ СВЕРТКИ НА РАСШИРЯЮЩИХСЯ МНОГОГРАННИКАХ: ПРЕДЕЛЫ НОРМ ОБРАТНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ПСЕВДОСПЕКТРОВ

Е. А. Максименко

Аннотация: Рассматриваются матричные операторы свертки с интегрируемыми ядрами на расширяющихся многогранниках. Изучается их связь с операторами свертки на конусах при вершинах многогранников. Доказано, что норма обратного к оператору на многограннике стремится к максимуму норм обратных к операторам на конусах, а псевдоспектр стремится к объединению соответствующих псевдоспектров. Исследование проводится с помощью локального метода, приспособленного к данному кругу задач.

Ключевые слова: операторы свертки, многогранники, нормы обратных операторов, псевдоспектры.

Введение

Зафиксируем до конца работы натуральные числа n, m и число $p \geq 1$.

Если X — измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$, то через $L_p^m(X)$ обозначим произведение m экземпляров пространства $L_p(X)$, т. е., что эквивалентно, пространство (классов) вектор-функций, определенных на X, со значениями в $\mathbb{C}^m$, абсолютно интегрируемых в p-й степени. Норма в $L_p^m(X)$ вводится по формуле

$$\|f\|_p = \|(f_1, \dots, f_m)\|_p = \left(\sum_{j=1}^{m} \int\limits_X |f_j(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Обозначим через $\mathbb{C}^{m\times m}$ пространство квадратных матриц порядка m.

Оператор A, действующий в пространстве $L_p^m(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$(Af)(y) = cf(y) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(y-x)f(x)\,dx, \quad y \in \mathbb{R}^n,\ f \in L_p^m(\mathbb{R}^n), \tag{0.1}$$

где $c \in \mathbb{C}^{m\times m}$, k — интегрируемая вектор-функция со значениями в $\mathbb{C}^{m\times m}$, называют *матричным оператором свертки* с интегрируемым ядром (или, что то же самое, с винеровским символом).

Если A — оператор в $L_p^m(\mathbb{R}^n)$, X — измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$, то через A_X будем обозначать оператор, действующий в пространстве $L_p^m(X)$ по формуле

$$A_X = Q_X A J_X,$$

где оператор $J_X : L_p^m(X) \to L_p^m(\mathbb{R}^n)$ доопределяет вектор-функцию нулем вне X, а оператор $Q_X : L_p^m(\mathbb{R}^n) \to L_p^m(X)$ сужает область определения вектор-функции.

Пусть M — многогранник в $\mathbb{R}^n$ (здесь и далее многогранники считаются выпуклыми), E — множество его вершин. Каждой точке $x \in E$ сопоставим конус K_x с вершиной 0, порожденный множеством $M - x$:

$$K_x = \{\alpha(y - x) : \alpha > 0,\ y \in M\}.$$

В работе рассматривается некоторая банахова алгебра $\mathscr{W}_M$, порожденная операторами свертки на семействе множеств $\{\tau M\}_{\tau>0}$. Для каждой точки $x \in M$ вводится отношение «локальной эквивалентности» $\overset{x}{\sim}$ и строится изоморфизм соответствующей фактор-алгебры $(\mathscr{W}_M)_x$ на алгебру $\mathscr{C}_{K_x}$, порожденную операторами свертки на конусе K_x, затем определяется морфизм алгебры $\mathscr{W}_M$ в произведение семейства алгебр $\{\mathscr{C}_{K_x}\}_{x\in E}$. Главный результат работы — теорема 6.1, которая утверждает, что этот «глобальный морфизм» изометричен и «согласован с обращением».

Сейчас приведем лишь два утверждения, следующие из теоремы 6.1: о пределах норм обратных операторов и о пределах псевдоспектров. Если $\mathscr{A}$ — банахова алгебра с единицей e и нормой $|\cdot|$, $a \in \mathscr{A}$ и $\varepsilon > 0$, то *ε-псевдоспектром* элемента a называют множество

$$\sigma_\varepsilon(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |(\lambda e - a)^{-1}| \geq 1/\varepsilon\}.$$

(Здесь и далее для необратимого элемента b полагаем $|b^{-1}| = +\infty$.)

Предложение 0.1. *Пусть A — матричный оператор свертки в $L_p^m(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$\lim_{\tau\to+\infty} \|A_{\tau M}^{-1}\| = \max_{x\in E} \|A_{K_x}^{-1}\|.$$

Предложение 0.2. *Пусть A — матричный оператор свертки в $L_p^m(\mathbb{R}^n)$, причем $p > 1$, и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$\lim_{\tau\to+\infty} \sigma_\varepsilon(A_{\tau M}) = \bigcup_{x\in E} \sigma_\varepsilon(A_{K_x}),$$

где сходимость множеств понимается в смысле метрики Хаусдорфа.

Изучение псевдоспектров тёплицевых матриц (для скалярного случая и гладких символов) начали Г. Ландау [1], Л. Райхел и Л. Н. Трефетен [2]. Результаты для блочных тёплицевых матриц и матричных операторов Винера — Хопфа получил А. Бётчер [3]. Используя технику C^*-алгебр, он рассматривал лишь случай L_2, но для очень широкого класса символов, содержащего все кусочно непрерывные функции. Впоследствии А. Бётчер и Г. Вольф [4] исследовали тёплицевы операторы на n-мерных кубах и установили для них аналоги предложений 0.1 и 0.2. С. М. Грудский и А. В. Козак [5] путем непосредственных вычислений доказали предложение 0.1 для скалярных тёплицевых операторов в пространстве L_1. А. Бётчер, С. М. Грудский и Б. Зильберманн [6] доказали предложения 0.1 и 0.2 для одномерных матричных сверток с интегрируемыми ядрами в пространствах L_p. Более полно история проблемы изложена в [6] и в книге А. Бётчера и Б. Зильберманна [7, гл. 3 и § 6.3].

В настоящей работе результаты [6] обобщены на многомерный случай. При этом из [6] взяты идея теоремы 6.1 и техника работы с псевдоспектрами. С другой стороны, доказательство теоремы 6.1 основано на локальном методе, первоначальную версию которого (называемую также теорией операторов локального типа) разработал И. Б. Симоненко [8–12] для исследования нётеровости сингулярных интегральных операторов. А. В. Козак [13–15] обобщил этот метод на абстрактные банаховы алгебры, снабженные локальной структурой, и применил его к исследованию обратимости операторов свертки на расширяющихся подмножествах $\mathbb{R}^n$ (см. также [16]). Мы следуем локальному методу в изложении А. В. Козака, усиливая его теоремой Н. Я. Крупника [17] о норме оператора локального типа.

§ 1. О наполненных подалгебрах

В этом параграфе приводятся элементарные сведения о наполненных подалгебрах и о морфизмах, согласованных с обращением.

Всюду далее под банаховой алгеброй понимается банахова алгебра с единицей (единица будет обозначаться через e); под морфизмом банаховых алгебр понимается морфизм банаховых алгебр с единицей; подалгебры не предполагаются замкнутыми. Символ $\operatorname{Inv}(\mathscr{A})$, где $\mathscr{A}$ — банахова алгебра, используется для обозначения множества обратимых элементов алгебры $\mathscr{A}$; $\sigma(a)$, где $a \in \mathscr{A}$, — спектр элемента a.

Подалгебра $\mathscr{B}$ алгебры $\mathscr{A}$ называется *наполненной*, если единица алгебры $\mathscr{A}$ принадлежит $\mathscr{B}$ и $\operatorname{Inv}(\mathscr{B}) = \mathscr{B} \cap \operatorname{Inv}(\mathscr{A})$. Если $X \subset \mathscr{A}$, то $[X]$ будет обозначать замкнутую наполненную подалгебру алгебры $\mathscr{A}$, порожденную множеством X. Так как замыкание наполненной подалгебры есть наполненная подалгебра, то $[X]$ — замыкание наполненной подалгебры, порожденной множеством X.

Пусть $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ — морфизм банаховых алгебр. Тогда из $a \in \operatorname{Inv}(\mathscr{A})$ следует, что $f(a) \in \operatorname{Inv}(\mathscr{B})$ и $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$. Будем говорить, что морфизм f *согласован с обращением*, если для любого $a \in \mathscr{A}$ условия $a \in \operatorname{Inv}(\mathscr{A})$ и $f(a) \in \operatorname{Inv}(\mathscr{B})$ равносильны.

Предложение 1.1. *Пусть $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ — изометрический морфизм банаховых алгебр, согласованный с обращением, $X \subset \mathscr{A}$. Тогда $f([X]) = [f(X)]$.*

Доказательство. Пусть Y_1 и Y_2 — наполненные подалгебры алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, порожденные множествами X и $f(X)$ соответственно. Поскольку f согласован с обращением, то $f(Y_1) = Y_2$. Так как f — изометрия полных пространств, то $f(\overline{Y}_1) = \overline{f(Y_1)} = \overline{Y}_2$, где надчеркивание обозначает замыкание. Но $f(\overline{Y}_1) = f([X])$, $\overline{Y}_2 = [f(X)]$. Таким образом, $f([X]) = [f(X)]$.

Для удобства ссылок приведем очевидное утверждение о единственности продолжения морфизма на наполненную подалгебру.

Если $f : X \to Y$ — отображение и $X_1 \subset X$, то сужение (ограничение) f на X_1 будем обозначать через $f|X_1$.

Предложение 1.2. *Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — банаховы алгебры, $X \subset \mathscr{A}$, $f : [X] \to \mathscr{B}$ и $g : [X] \to \mathscr{B}$ — морфизмы банаховых алгебр, причем $f|X = g|X$. Тогда $f = g$.*

§ 2. Локальный метод

В этом параграфе приводится одна из версий локального метода (или «локального принципа»), а именно локальный метод в формулировке А. В. Козака [13, 15]. Условие (LS4′) из работ А. В. Козака заменим более сильным условием (LS4), введенным Н. Я. Крупником [17] для доказательства теоремы 2.3.

Прежде всего согласуем топологические термины и обозначения. Если $\mathscr{X}$ — топологическое пространство, то $\Sigma_{\mathscr{X}}$ — кольцо борелевских подмножеств $\mathscr{X}$;

окрестность точки x ($x \in \mathscr{X}$) — открытое подмножество $\mathscr{X}$, содержащее x; $\mathfrak{U}_x$ ($x \in \mathscr{X}$) — множество окрестностей точки x; $\bar{u}$ ($u \subset \mathscr{X}$) — замыкание множества u.

Будем говорить, что $(\mathscr{A}, \mathscr{X}, p)$ — *алгебра с локальной структурой*, если $\mathscr{A}$ — банахова алгебра (с нормой $|\cdot|$ и единицей e), $\mathscr{X}$ — компакт, $p : \Sigma_{\mathscr{X}} \to \mathscr{A}$, и выполняются следующие свойства:

(LS1) $p(\mathscr{X}) = e$;

(LS2) $p(u \cap v) = p(u)p(v)$ для любых $u, v \in \Sigma_{\mathscr{X}}$;

(LS3) $p(u \cup v) = p(u) + p(v)$ для любых $u, v \in \Sigma_{\mathscr{X}}$ таких, что $\bar{u} \cap \bar{v} = \varnothing$;

(LS4) $|p(u)ap(u) + p(v)bp(v)| \leq \max(|a|, |b|)$ для любых $a, b \in \mathscr{A}$, $u, v \in \Sigma_{\mathscr{X}}$ таких, что $u \cap v = \varnothing$.

Далее в этом параграфе будем считать, что $(\mathscr{A}, \mathscr{X}, p)$ — некоторая алгебра с локальной структурой.

Из (LS2) следует, что элементы вида $p(u)$ являются идемпотентами: $p(u)^2 = p(u)$. Учитывая (LS4), получаем, что $|p(u)| = 1$ при $p(u) \neq 0$. В частности,

(LS4′) $\sup\limits_{u \in \Sigma_{\mathscr{X}}} |p(u)| < +\infty$.

Пусть 1_u, где $u \in \Sigma_{\mathscr{X}}$, — характеристическая функция множества u; $B(\mathscr{X})$ — банахова алгебра ограниченных функций на $\mathscr{X}$, с равномерной нормой; $S(\mathscr{X})$ — замкнутая подалгебра алгебры $B(\mathscr{X})$, порожденная элементами вида 1_u ($u \in \Sigma_{\mathscr{X}}$); $C(\mathscr{X})$ — банахова алгебра непрерывных функций на $\mathscr{X}$. Легко видеть, что $C(\mathscr{X}) \subset S(\mathscr{X})$.

Элемент $a \in \mathscr{A}$ называется *элементом локального типа*, если $p(u)ap(v) = 0$ для любых $u, v \in \Sigma_{\mathscr{X}}$ таких, что $\bar{u} \cap \bar{v} = \varnothing$. Множество элементов локального типа будет обозначаться через $\mathscr{A}'$.

Предложение 2.1. *Отображение $1_u \mapsto p(u)$ ($u \in \Sigma_{\mathscr{X}}$) можно единственным образом продолжить до морфизма банаховых алгебр $\mu : S(\mathscr{X}) \to \mathscr{A}$. Этот морфизм не увеличивает норму: $|\mu(\varphi)| \leq \|\varphi\|$ для всех $\varphi \in S(\mathscr{X})$.*

Теорема 2.1. *$\mathscr{A}'$ состоит из тех и только тех элементов, которые коммутируют с множеством $\mu(C(\mathscr{X}))$. Тем самым $\mathscr{A}'$ — замкнутая наполненная подалгебра алгебры $\mathscr{A}$.*

Доказательства предложения 2.1 и теоремы 2.1 см. в [13, 15].

Следуя [12], для каждой точки $x \in \mathscr{X}$ определим следующие преднормы:

$$q_L(a, x) = \inf_{u \in \mathfrak{U}_x} |p(u)a|, \quad q_R(a, x) = \inf_{u \in \mathfrak{U}_x} |ap(u)|,$$

$$q(a, x) = \max(q_L(a, x), q_R(a, x)).$$

Ясно, что $q(a, x) \leq |a|$ для любого $a \in \mathscr{A}$.

Если $a \in \mathscr{A}'$, $x \in \mathscr{X}$, то

$$q(a, x) = \inf_{u \in \mathfrak{U}_x} |p(u)a| = \inf_{u \in \mathfrak{U}_x} |ap(u)| = \inf_{u \in \mathfrak{U}_x} |p(u)ap(u)|.$$

Для каждой точки $x \in \mathscr{X}$ преднорма $q(\cdot, x)$ порождает отношение эквивалентности $\overset{x}{\sim}$:

$$a \overset{x}{\sim} b \Leftrightarrow q(a - b, x) = 0.$$

Легко проверяются следующие свойства:

(a) если $a \overset{x}{\sim} b$, то $q(a, x) = q(b, x)$;

(b) если $a_1 \overset{x}{\sim} b_1$, $a_2 \overset{x}{\sim} b_2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, то $\lambda a_1 + \mu a_2 \overset{x}{\sim} \lambda b_1 + \mu b_2$;

(c) если $a_n \to a$, $b_n \to b$, $a_n \overset{x}{\sim} b_n$, то $a \overset{x}{\sim} b$;

(d) если $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathscr{A}'$, $a_1 \overset{x}{\sim} b_1$, $a_2 \overset{x}{\sim} b_2$, то $a_1 a_2 \overset{x}{\sim} b_1 b_2$;

(e) если $a, b \in \operatorname{Inv}(\mathscr{A}')$ и $a \overset{x}{\sim} b$, то $a^{-1} \overset{x}{\sim} b^{-1}$.

Рассмотрим $\overset{x}{\sim}$ как отношение эквивалентности на $\mathscr{A}'$. Пусть $\mathscr{A}'_x$ — соответствующее фактор-множество, $\pi_x : \mathscr{A}' \to \mathscr{A}'_x$ — соответствующее фактор-отображение. Свойства (a), (b), (d) показывают, что $\mathscr{A}'_x$ естественным образом превращается в банахову алгебру с единицей $\pi_x(e)$ и нормой $|\pi_x(\cdot)| = q(\cdot, x)$.

Теорема 2.2 (см. [9, 11–13, 15]). *Пусть $a \in \mathscr{A}'$ и для любой точки $x \in \mathscr{X}$ элемент $\pi_x(a)$ обратим слева (соответственно справа) в фактор-алгебре $\mathscr{A}'_x$. Тогда a обратим слева (соответственно справа).*

Теорема 2.3. *Если $a \in \mathscr{A}'$, то $|a| = \sup\limits_{x \in \mathscr{X}} q(a, x)$.*

Эта теорема доказана в работе Н. Я. Крупника [17] для некоторого частного случая, но тривиально обобщается на случай алгебр с локальной структурой.

§ 3. Основные объекты: алгебры $\mathscr{A}_X$, $\mathscr{W}_X$ и $\mathscr{C}_X$

Определим основные объекты работы и покажем, как они связаны с объектами из § 2.

Как было указано во введении, числа $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty)$ фиксированы на протяжении всей работы.

Для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $\mathfrak{U}_x$ множество окрестностей точки x (окрестности считаются открытыми).

Для любого измеримого подмножества X пространства $\mathbb{R}^n$ определим оператор $P_X : L_p^m(\mathbb{R}^n) \to L_p^m(\mathbb{R}^n)$ следующим правилом:

$$(P_X f)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus X. \end{cases}$$

Ясно, что $P_X = J_X Q_X$.

Далее для сокращения записи вместо $L_p^m(\mathbb{R}^n)$ будем писать L_p^m.

Если $\mathscr{B}$ — банахово пространство, то через $\operatorname{End}(\mathscr{B})$ будем обозначать банахову алгебру ограниченных линейных операторов в $\mathscr{B}$.

Выберем и зафиксируем до конца параграфа некоторое измеримое подмножество X пространства $\mathbb{R}^n$ (в следующих параграфах роль множества X будет играть конус или многогранник).

Заметим, что $P_X\big(\operatorname{End}\big(L_p^m\big)\big)P_X$ — банахова алгебра с единицей P_X. Для краткости будем обозначать ее через $\operatorname{End}\big(P_X L_p^m\big)$. Будем отождествлять $P_X L_p^m$ с $L_p^m(X)$, а $\operatorname{End}\big(P_X L_p^m\big)$ — с $\operatorname{End}\big(L_p^m(X)\big)$. Если $A \in \operatorname{End}\big(L_p^m\big)$, то оператор $A_X = Q_X A J_X$ будем отождествлять с элементом $P_X A P_X$ алгебры $\operatorname{End}\big(P_X L_p^m\big)$. Если $A \in \operatorname{End}\big(L_p^m\big)$ и элемент $P_X A P_X$ обратим в алгебре $\operatorname{End}\big(P_X L_p^m\big)$ (это равносильно тому, что оператор $Q_X A J_X \in \operatorname{End}\big(L_p^m(X)\big)$ обратим), то соответствующий обратный элемент отождествляется с оператором $(Q_X A J_X)^{-1}$ и также обозначается через A_X^{-1}.

Пусть $\mathscr{U}_X$ — произведение семейства банаховых алгебр $\big\{\operatorname{End}\big(P_{\tau X} L_p^m\big)\big\}_{\tau > 0}$, т. е. множество семейств операторов вида $\{A_\tau\}_{\tau > 0}$, где $A_\tau \in \operatorname{End}\big(P_{\tau X} L_p^m\big)$ и $\sup\limits_{\tau > 0} \|A_\tau\| < +\infty$, снабженное покоординатными операциями и нормой

$$|\{A_\tau\}_{\tau > 0}|_{\mathscr{U}_X} = \sup_{\tau > 0} \|A_\tau\|.$$

Рассмотрим в $\mathscr{U}_X$ замкнутый идеал $\mathscr{J}_X$:

$$\mathscr{J}_X = \{\{A_\tau\}_{\tau>0} \in \mathscr{U}_X \mid \lim_{\tau\to+\infty} \|A_\tau\| = 0\}.$$

Обозначим через $\mathscr{A}_X$ фактор-алгебру $\mathscr{U}_X / \mathscr{J}_X$. Элементы этой фактор-алгебры имеют вид $a = \{A_\tau\}_{\tau>0} + \mathscr{J}_X$, где $A_\tau \in \operatorname{End}(P_X L_p^m)$ и $\sup\limits_{\tau>0} \|A_\tau\| < +\infty$. Норма в $\mathscr{A}_X$ вычисляется по формуле

$$|\{A_\tau\}_{\tau>0} + \mathscr{J}_X| = \limsup_{\tau\to+\infty} \|A_\tau\|.$$

Определим отображение $j_X : \operatorname{End}(L_p^m) \to \mathscr{A}_X$:

$$j_X(A) = \{P_{\tau X} A P_{\tau X}\}_{\tau>0} + \mathscr{J}_X, \quad A \in \operatorname{End}\bigl(L_p^m\bigr).$$

Пусть $\dot{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ — компакт, полученный при расширении пространства $\mathbb{R}^n$ одной бесконечно удаленной точкой, $\overline{X}$ — замыкание X в $\dot{\mathbb{R}}^n$, Σ_X — множество измеримых подмножеств $\overline{X}$. Для любого множества $u \in \Sigma_X$ положим

$$p(u) = \{P_{\tau(u\cap X)}\}_{\tau>0} + \mathscr{J}_X.$$

Лемма 3.1 (см. [11, 17]). *Пусть $A, B \in \operatorname{End}\bigl(L_p^m\bigr)$, Y, Z — непересекающиеся измеримые подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда $\|P_Y A P_Y + P_Z B P_Z\| \le \max(\|A\|, \|B\|)$.*

Предложение 3.1 (см. [13, 15]). *$(\mathscr{A}_X, \overline{X}, p)$ — алгебра с локальной структурой. Если $\varphi \in S(\overline{X})$, то $\mu(\varphi) = \{M(\varphi_\tau)\}_{\tau>0} + \mathscr{J}_X$, где $M(\varphi_\tau)$ — оператор умножения на функцию φ_τ, которая определена формулой*

$$\varphi_\tau(x) = \varphi(x/\tau), \quad x \in \mu X,\ \tau > 0.$$

Формально новым в предложении 3.1 является лишь то, что для $(\mathscr{A}_X, \overline{X}, p)$ выполняется условие (LS4), а это следует из леммы 3.1.

Обозначим через W_p замыкание в $\operatorname{End}\bigl(L_p^m\bigr)$ множества матричных операторов свертки, т. е. операторов вида (0.1), где $c \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $k \in L_1^{m\times m}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\mathscr{C}_X = [P_X W_p P_X]$, $\mathscr{W}_X = [j_X(W_p)]$. Более подробно: $\mathscr{C}_X$ — замкнутая наполненная подалгебра банаховой алгебры $\operatorname{End}(P_X L_p^m)$, порожденная множеством $\{P_X A P_X \mid A \in W_p\}$; $\mathscr{W}_X$ — замкнутая наполненная подалгебра банаховой алгебры $\mathscr{A}_X$, порожденная множеством $\{j_X(A) \mid A \in W_p\}$.

Предложение 3.2. *$\mathscr{W}_X \subset \mathscr{A}'_X$.*

Доказательство (см. [10, 14, 16]). Пусть A — матричный оператор свертки с финитным ядром, т. е. A имеет вид (0.1), где $c \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $k \in L_1^{m\times m}$, причем $k(x) = 0$ при $|x| \ge d$, $d > 0$. Тогда $P_Y A P_Z = 0$ при $\operatorname{dist}(Y, Z) > d$, где

$$\operatorname{dist}(Y, Z) = \inf_{y\in Y} \inf_{z\in Z} |y - z|.$$

Если $u, v \subset X$ и $\bar{u} \cap \bar{v} = \varnothing$, то $r = \operatorname{dist}(u, v) > 0$, и при $\tau > d/r$ имеем $\operatorname{dist}(\tau u, \tau v) > d$, $P_{\tau u} A P_{\tau v} = 0$. Отсюда $p(u) j_X(A) p(v) = 0$.

Итак, $j_X(A) \in \mathscr{A}'_X$, если A имеет указанный вид. Но операторы такого вида образуют плотное подмножество в W_p, поэтому $j_X(W_p) \subset \mathscr{A}'_X$. По теореме 2.1 $\mathscr{A}'_X$ — замкнутая наполненная подалгебра $\mathscr{A}_X$. Отсюда следует, что $\mathscr{W}_X = [j_X(W_p)] \subset \mathscr{A}'_X$, и предложение доказано.

Предложения 3.1 и 3.2 позволяют использовать для алгебры $\mathscr{A}_X$ обозначения § 2 (в частности, $q(\cdot, x)$ и $\overset{x}{\sim}$, где $x \in \overline{X}$), а к элементам из $\mathscr{W}_X$ применять все утверждения об элементах локального типа. Для каждой точки $x \in \overline{X}$ будем обозначать через $(\mathscr{W}_X)_x$ алгебру $\pi_x(\mathscr{W}_X) = \mathscr{W}_X / \overset{x}{\sim}$.

§ 4. Случай конусов

Для любых $X \subset \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\mathrm{con}_y(X) = \{\lambda(x-y) : \lambda > 0,\ x \in X\}.$$

Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *конусом с вершиной* y, если $K = \mathrm{con}_y(K)$.

Пусть K — некоторый измеримый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной 0, фиксированный до конца параграфа.

Лемма 4.1. *Пусть* $A \in \mathrm{End}(P_K L_p)$,

$$a = j_K(A) = \{A\}_{\tau>0} + \mathscr{J}_K. \tag{4.1}$$

Тогда $|a| = q(a,0) = \|A\|$. *Если* u *— некоторая окрестность точки* 0 *и* $a = j_K(A) = \{B_\tau\}_{\tau>0} + \mathscr{J}_K$, *то*

$$A = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\tau\to+\infty} P_{\tau(u\cap K)} B_\tau P_{\tau(u\cap K)} = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\tau\to+\infty} P_{\tau(u\cap K)} B_\tau = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\tau\to+\infty} B_\tau P_{\tau(u\cap K)}. \tag{4.2}$$

(*Здесь и далее* s-lim *обозначает поточечный предел.*)

Доказательство. Формула (4.2) следует из соотношений

$$\lim_{\tau\to+\infty} B_\tau = A, \quad \operatorname*{s\text{-}lim}_{\tau\to+\infty} P_{\tau(u\cap K)} = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\tau\to+\infty} P_{\tau(u\cap \overline{K})} = P_K.$$

Из (4.2) и свойств поточечной сходимости операторов получаем

$$\|A\| \le \liminf_{\tau\to+\infty} \|P_{\tau(u\cap K)} B_\tau\| \le |p(u\cap K)a|,$$

откуда $\|A\| \le q_L(a,0)$. Аналогично $\|A\| \le q_R(a,0)$. Таким образом, $\|A\| \le q(a,0)$. Неравенства $q(a,0) \le |a| \le \|A\|$ очевидны.

Лемма 4.2. *Пусть* $A \in \mathrm{End}(P_K L_p)$, $a = j_K(A)$, *причем* $a \in \mathscr{A}'_K$. *Тогда следующие условия равносильны:*

(a) *оператор* A *обратим на* K*;*

(b) *элемент* a *алгебры* $\mathscr{A}_K$ *обратим;*

(c) *элемент* $\pi_0(a)$ *фактор-алгебры* $(\mathscr{A}'_K)_0$ *обратим.*

Если эти условия выполнены, то $a^{-1} = \{A_K^{-1}\}_{\tau>0} + \mathscr{J}_K$.

Это утверждение в несколько другой формулировке доказано в [13, 15].

Напомним, что $(\mathscr{W}_K)_0 = (\mathscr{W}_K/\overset{0}{\sim}) = \pi_0(\mathscr{W}_K)$.

Предложение 4.1. *Отображения* $(j_K|\mathscr{C}_K) : \mathscr{C}_K \to \mathscr{W}_K$ *и* $(\pi_0|\mathscr{W}_K) : \mathscr{W}_K \to (\mathscr{W}_K)_0$ *являются изометрическими морфизмами банаховых алгебр, и тем самым отображение* $\mathrm{isocon}_K = (j_K|\mathscr{C}_K)^{-1} \circ (\pi_0|\mathscr{W}_K)^{-1}$ *— изометрический изоморфизм* $(\mathscr{W}_K)_0$ *на* $\mathscr{C}_K$.

Доказательство. Легко видеть, что $j_K(\mathscr{C}_K) \subset \mathscr{W}_K$. Из леммы 4.1 следует, что отображение $j_K : \mathrm{End}(P_K L_p) \to \mathscr{A}_K$ — изометрический морфизм банаховых алгебр. Лемма 4.2 и предложение 3.2 показывают, что морфизм $j_K|\mathscr{C}_K$ согласован с обращением. По предложению 1.1 $j_K|\mathscr{C}_K$ есть изометрический изоморфизм $\mathscr{C}_K$ на $\mathscr{W}_K$. Утверждение о морфизме $\pi_0|\mathscr{W}_K$ вытекает из лемм 4.1 и 4.2.

Предложение 4.2. *Пусть* $b \in \mathscr{W}_K$, $b = \{B_\tau\}_{\tau>0} + \mathscr{J}_K$. *Тогда*

$$\mathrm{isocon}_K(\pi_0(b)) = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\tau\to+\infty} B_\tau.$$

Доказательство. Пусть $A = \mathrm{isocon}_K(\pi_0(b))$, $f \in P_K L_p$. Мы должны показать, что $\lim_\tau \|(B_\tau - A)f\| = 0$. Положим $a = \{A\}_{\tau>0} + \mathscr{J}_K$. Тогда $\pi_0(a) = \pi_0(b)$. Выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и найдем такую окрестность нуля u, что $|(a-b)p(u)| < \varepsilon$, т. е.

$$\limsup_{\tau\to+\infty} \|(B_\tau - A)P_{\tau u}\| < \varepsilon.$$

Учитывая, что $\lim_\tau \|B_\tau P_{\tau u} f - B_\tau f\| = 0$, $\lim_\tau \|AP_{\tau u} f - Af\| = 0$, получим

$$\limsup_{\tau\to+\infty} \|(B_\tau - A)f\| = \limsup_{\tau\to+\infty} \|(B_\tau - A)P_{\tau u} f\| < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то $\lim\limits_{\tau\to+\infty} \|(B_\tau - A)f\| = 0$.

§ 5. Локальный изоморфизм

Этот параграф построен на идеях работы [14] (см. также [10]).

Пусть T_h, где $h \in \mathbb{R}^n$, — оператор сдвига (переноса) на h в пространстве L_p^m:

$$(T_h f)(y) = f(y-h), \quad y \in \mathbb{R}^n, \ f \in L_p^m,$$

Σ — множество измеримых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Заметим, что если $X \in \Sigma$, $h \in \mathbb{R}^n$, то $T_h P_X = P_{X+h} T_h$.

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \overline{X}$, $y \in \overline{Y}$. Будем говорить, что *множество* X *в точке* x *эквивалентно множеству* Y *в точке* y, если существуют такие $u \in \mathfrak{U}_x$ и $v \in \mathfrak{U}_y$, что $(X \cap u) - x = (Y \cap v) - y$.

Пусть $X, Y \in \Sigma$. Для алгебры $\mathscr{A}_Y$ будем писать p' вместо p и q' вместо q. Если x, y, u, v такие, как в данном выше определении, то рассмотрим отображения $\varphi : u \cap \overline{X} \to v \cap \overline{Y}$ и $\Phi_{uv} : p(u)\mathscr{A}_X p(u) \to p'(v)\mathscr{A}_Y p'(v)$:

$$\varphi(z) = z + y - x, \quad z \in u \cap \overline{X};$$

$$\Phi_{uv}(a) = \{T_{\tau(y-x)} P_{\tau u} A_\tau P_{\tau u} T_{\tau(x-y)}\}_{\tau>0} + \mathscr{J}_Y,$$

где $a = \{\mathscr{A}_\tau\}_{\tau>0} + \mathscr{J}_X \in p(u)\mathscr{A}_X p(u)$. Ясно, что определение $\Phi_{uv}(a)$ не зависит от выбора $\{A_\tau\}_{\tau>0}$. Очевидно, Φ_{uv} есть изометрический изоморфизм $p(u)\mathscr{A}_X p(u)$ на $p'(v)\mathscr{A}_Y p'(v)$, причем $\Phi_{uv}(p(w)) = p'(\varphi(w))$ для всех $w \in \mathfrak{U}_x$.

Пусть $X, Y \in \Sigma$, причем множество X в точке x локально эквивалентно множеству Y в точке y.

Определим отношение $R_{xy} \subset \mathscr{A}'_X \times \mathscr{A}'_Y$, полагая $aR_{xy}b$, если существуют такие $u \in \mathfrak{U}_x$, $v \in \mathfrak{U}_y$, что $(X \cap u) - x = (Y \cap v) - y$ и $\Phi_{uv}(p(u)ap(u)) \overset{y}{\sim} p'(v)bp'(v)$.

Отметим очевидные свойства отношения R_{xy}:

(a) если $a \in \mathscr{A}'_X$, $b \in \mathscr{A}'_Y$ и $aR_{xy}b$, то $q(a,x) = q'(b,y)$;

(b) если $a_1, a_2 \in \mathscr{A}'_X$, $b_1, b_2 \in \mathscr{A}'_Y$, $a_1 R_{xy} a_2$, $b_1 R_{xy} b_2$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, то

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) R_{xy} (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2), \quad a_1 a_2 R_{xy} b_1 b_2.$$

Предложение 5.1. *Пусть $X, Y \in \Sigma$, $x \in \overline{X}$, $y \in \overline{Y}$ и множество X в точке x эквивалентно множеству Y в точке y. Тогда существует единственный изоморфизм $\mathrm{loc}_{xy} : (\mathscr{A}'_X)_x \to (\mathscr{A}'_Y)_y$ такой, что соотношение $\mathrm{loc}_{xy}(\pi_x(a)) = \pi_y(b)$ равносильно соотношению $aR_{xy}b$ для любых $a \in \mathscr{A}'_X$, $b \in \mathscr{A}'_Y$.*

Доказательство. 1. Пусть $\widetilde{R}_{xy} \subset (\mathscr{A}'_X)_x \times (\mathscr{A}'_Y)_y$ — отношение, определенное правилом

$$\pi_x(a)\widetilde{R}_{xy}\pi_y(b) \Leftrightarrow aR_{xy}b, \quad a \in \mathscr{A}'_X,\ b \in \mathscr{A}'_Y.$$

2. Для каждого $a \in \mathscr{A}'_X$ существует такой элемент $b \in \mathscr{A}'_Y$, что $aR_{xy}b$, т. е. $\pi_x(a)\widetilde{R}_{xy}\pi_y(b)$. Действительно, пусть $u \in \mathfrak{U}_x$, $v \in \mathfrak{U}_y$ таковы, что $(u \cap X) - x = (v \cap Y) - y$. Тогда элемент $b = \Phi_{uv}(p(u)ab(u))$ является искомым.

3. Аналогично доказывается, что для любого $b \in \mathscr{A}'_Y$ существует такой элемент $a \in \mathscr{A}'_X$, что $\pi_x(a)\widetilde{R}_{xy}\pi_y(b)$.

4. Из свойств (a), (b) отношения R_{xy} и пп. 2, 3 следует, что $\widetilde{R}_{xy}$ — график некоторого изометрического изоморфизма, который мы обозначим через loc_{xy}. Существование доказано.

5. Если морфизм loc_{xy} удовлетворяет условиям предложения, то его график, очевидно, совпадает с $\widetilde{R}_{xy}$. Единственность доказана.

Предложение 5.2. *Пусть $X, Y \in \Sigma$, $x \in \overline{X}$, $y \in \overline{Y}$, множество X в точке x эквивалентно множеству Y в точке y и $A \in W_p$. Тогда $j_X(A)R_{xy}j_Y(A)$, т. е.*

$$\mathrm{loc}_{xy}(\pi_x(j_X(A))) = \pi_y(j_Y(A)).$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathfrak{U}_x$, $v \in \mathfrak{U}_y$, $(X \cap u) - x = (Y \cap v) - y$. Используя инвариантность оператора A относительно сдвига, для любого $\tau > 0$ получаем

$$T_{\tau(y-x)}P_{\tau u}P_{\tau X}AP_{\tau X}P_{\tau u}T_{\tau(x-y)} = P_{\tau(v\cap Y)}AP_{\tau(v\cap Y)}.$$

Отсюда $\Phi_{uv}(j_X(A)) = p(v)j_Y(A)p(v) \overset{y}{\sim} j_Y(A)$ и $j_X(A)R_{xy}j_Y(A)$.

Предложение 5.3. *Пусть $M \in \Sigma$, $x \in \overline{M}$, K — конус с вершиной 0 и множество M в точке x локально эквивалентно конусу K в точке 0. Тогда существует единственный морфизм банаховых алгебр $\theta_x : \mathscr{W}_M \to \mathrm{End}(P_{K_x}L_p)$ такой, что $\theta_x(j_M(A)) = P_K A P_K$ для любого $A \in W_p$. При этом $\theta_x(\mathscr{W}_M) \subset \mathscr{C}_K$ для любого $a \in \mathscr{W}_M$ имеют место соотношения*

$$\|\theta_x(a)\| = q(a, x) \le |a|$$

и обратимость $\theta_x(a)$ в $\mathrm{End}(P_K L_p)$ равносильна обратимости элемента $\pi_x(a)$ в фактор-алгебре $(\mathscr{W}_M)_x$.

Доказательство. Определим морфизм θ_x формулой

$$\theta_x(a) = \mathrm{isocon}(\mathrm{loc}_{x0}(\pi_x(a))), \quad a \in \mathscr{W}_K. \tag{5.1}$$

Из предложений 4.1 и 5.2 следует, что θ_x обладает перечисленными свойствами. Единственность вытекает из предложения 1.2.

Из формулы (5.1) и предложения 4.2 получаем явное описание морфизма θ_x с помощью операции поточечного предела операторов.

Предложение 5.4. *Пусть $M \in \Sigma$, $x \in \overline{M}$, K — конус с вершиной 0, $u \in \mathfrak{U}_0$, $(M - x) \cap u = K \cap u$; $a = \{A_\tau\}_{\tau > 0} + \mathscr{J}_M$. Тогда*

$$\theta_x(a) = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\tau \to +\infty} P_{\tau u} T_{-\tau x} A_\tau T_{\tau x} P_{\tau u} = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\tau \to +\infty} T_{-\tau x} A_\tau T_{\tau x}$$

и, следовательно,

$$\|\theta_x(a)\| \le \liminf_{\tau \to +\infty} \|A_\tau\|. \tag{5.2}$$

Далее нам понадобится утверждение о «доминировании» одной точки над другой.

Предложение 5.5. *Пусть $M \in \Sigma$, $x, y \in \overline{M}$, $u \in \mathfrak{U}_x$, $v \in \mathfrak{U}_0$, K — конус с вершиной 0, $(M \cap u) - x = K \cap v$ и $y \in u$.*

Тогда для любого $a \in \mathscr{A}'_M$ имеет место неравенство $q(a, x) \ge q(a, y)$ и из обратимости $\pi_x(a)$ в $(\mathscr{A}'_M)_x$ следует обратимость $\pi_y(a)$ в $(\mathscr{A}'_M)_y$.

Доказательство. Определим отображение $\varphi : u \to v$ формулой $\varphi(z) = z - x$. Тогда соответствующее отображение Φ_{uv} осуществляет изоморфизм алгебры $p(u)\mathscr{A}'_X p(u)$ на алгебру $p(v)\mathscr{A}'_K p(v)$. Выберем произвольно $a \in \mathscr{A}'_X$. Из предложения 5.1 и лемм 4.2, 4.1 вытекает, что обратимость элемента $p(u)ap(u)$ в алгебре $p(u)\mathscr{A}'_X p(u)$ равносильна обратимости $\pi_x(a)$ в $(\mathscr{A}'_X)_x$, и $q(a, x) = |p(u)ap(u)|$. С другой стороны, так как u — окрестность y, то из обратимости $p(u)ap(u)$ в $p(u)\mathscr{A}'_X p(u)$ следует обратимость $\pi_y(a)$, при этом $q(a, y) \le |p(u)ap(u)|$.

§ 6. Основная теорема

В этом параграфе будем считать, что M — многогранник в $\mathbb{R}^n$, E — множество его вершин.

Лемма 6.1. *Пусть $a \in \mathscr{A}'_M$. Тогда обратимость элемента a равносильна тому, что для любой точки $x \in E$ элемент $\pi_x(a)$ обратим в $(\mathscr{A}'_M)_x$. Кроме того, $|a| = \max\limits_{x \in E} q(a, x)$.*

Доказательство. Аналогичное утверждение, но с заменой E на M, вытекает из предложения 3.1 и общих теорем локального метода 2.2 и 2.3. Переход от M к E следует из предложения 5.5, так как для любой точки $y \in M$, очевидно, можно найти такую вершину $x \in E$, которая «доминирует» над y в смысле предложения 5.5. Лемма доказана.

В произведении $\prod\limits_{x \in E} \operatorname{End}\bigl(P_{K_x} L_p^m\bigr)$ рассмотрим замкнутую наполненную подалгебру $\widetilde{\mathscr{C}}$, порожденную семействами вида $\{P_{K_x} A P_{K_x}\}_{x \in E}$, где $A \in W_p$. Ясно, что

$$\widetilde{\mathscr{C}} \subset \prod_{x \in E} \mathscr{C}_{K_x}.$$

Теорема 6.1. *Существует единственный морфизм банаховых алгебр*

$$\Theta : \mathscr{W}_M \to \prod_{x \in E} \operatorname{End}(P_{K_x} L_p)$$

такой, что $\Theta(j_M(A)) = \{P_{K_x} A P_{K_x}\}_{x \in E}$ для всех $A \in W_p$. Этот морфизм Θ изометричен, согласован с обращением, имеет образ $\widetilde{\mathscr{C}}$ и является произведением семейства морфизмов $\{\theta_x\}_{x \in E}$.

Доказательство. Положим $\Theta = \prod\limits_{x\in E} \theta_x$. Тогда из предложения 5.3 и леммы 6.1 следует, что Θ изометричен и согласован с обращением. По предложению 1.1 $\Theta(\mathscr{W}_M) = \widetilde{\mathscr{C}}_M$. Единственность морфизма Θ вытекает из соотношения $\mathscr{W}_M = [j_M(W_p)]$ и предложения 1.2.

Замечание. Для одномерного случая ($n = 1$, $M = [0,1]$) утверждение, аналогичное теореме 6.1, доказано в [6] с помощью конструктивного описания алгебр $\mathscr{W}_M$ и $\mathscr{C}_K$.

Следствие 6.1. *Пусть элемент $a \in \mathscr{W}_M$ имеет представление $a = \{A_\tau\}_{\tau>0} + \mathscr{J}_M$. Тогда*

$$\lim_{\tau\to+\infty} \|A_\tau\| = |a| = \max_{x\in E} \|\theta_x(a)\|.$$

Доказательство получается из теоремы 6.1 и формулы (5.2).

Следствие 6.2. *Пусть $a \in \mathscr{W}_M$, $a = \{A_\tau\}_{\tau>0} + \mathscr{J}_M$. Тогда следующие условия равносильны:*

(a) *элемент a обратим в $\mathscr{A}_M$;*

(b) $\limsup\limits_{\tau\to+\infty} \|(A_\tau)^{-1}_{\tau M}\| < +\infty$, *т. е. существует такое $\tau_0 > 0$, что операторы A_τ обратимы на τM при $\tau > \tau_0$, и $\sup\limits_{\tau>\tau_0} \|(A_\tau)^{-1}_{\tau M}\| < +\infty$;*

(c) *для каждой точки $x \in E$ оператор $\theta_x(a)$ обратим на K_x.*

Если эти условия выполняются, то для любой точки $x \in E$

$$\theta_x(a)^{-1}_{K_x} = \operatorname*{s-lim}_{\tau\to+\infty} T_{-\tau x}(A_\tau)^{-1}_{\tau M} T_{\tau x}.$$

Кроме того,

$$\lim_{\tau\to+\infty} \big\|(A_\tau)^{-1}_{\tau M}\big\| = |a^{-1}| = \max_{x\in E} \big\|\theta_x(a)^{-1}_{K_x}\big\|.$$

В частности, при $a = j_M(A)$, $A \in W_p$, получаем

Следствие 6.3. *Пусть $A \in W_p$. Тогда следующие условия равносильны:*

(a) *элемент $j_M(A)$ обратим в $\mathscr{A}_M$;*

(b) $\limsup\limits_{\tau\to+\infty} \|A^{-1}_{\tau M}\| < +\infty$;

(c) *оператор A обратим на K_x для каждой точки $x \in E$.*

Если эти условия выполняются, то для любой точки $x \in E$

$$A^{-1}_{K_x} = \operatorname*{s-lim}_{\tau\to+\infty} T_{-\tau x} A^{-1}_{\tau M} T_{\tau x}.$$

Кроме того,

$$\lim_{\tau\to+\infty} \big\|A^{-1}_{\tau M}\big\| = \max_{x\in E} \big\|A^{-1}_{K_x}\big\|. \tag{6.1}$$

Соотношение (6.1) было отмечено во введении как предложение 0.1. Остальные утверждения следствия 6.3 доказал А. В. Козак в работах [13–15]. Аналогичные результаты он доказал также для обобщенных и составных сверток и для множеств M более общей формы, чем многогранники.

§ 7. Пределы псевдоспектров

В этом параграфе из следствия 6.2 выводится теорема о пределе псевдоспектров. Идея доказательства взята из [6].

Сначала приведем необходимые сведения о норме резольвенты, псевдоспектре и метрике Хаусдорфа.

Пусть $\mathscr{A}$ — банахова алгебра (с единицей e и нормой $|\cdot|$), $\dot{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость. Определим функцию $\mathrm{nr} : \mathscr{A} \times \dot{\mathbb{C}} \to [0, +\infty]$ («норму резольвенты») формулой

$$\mathrm{nr}(a, \lambda) = \begin{cases} |(\lambda e - a)^{-1}|, & \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a), \\ +\infty, & \lambda \in \sigma(a), \\ 0, & \lambda = \infty. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция $\mathrm{nr}(a, \cdot)$ непрерывна на $\dot{\mathbb{C}}$. В частности,

$$|\,\mathrm{nr}(a, \mu) - \mathrm{nr}(a, \lambda)| < \frac{|\mu - \lambda|\,\mathrm{nr}(a, \lambda)^2}{1 - |\mu - \lambda|\,\mathrm{nr}(a, \lambda)}. \tag{7.1}$$

Теорема 7.1. *Пусть (Ω, μ) — пространство с мерой, $p \in (1, +\infty)$, $\mathscr{A} = \mathrm{End}(L_p(\Omega, \mu))$, $a \in \mathscr{A}$. Тогда для резольвенты элемента a выполняется принцип максимума нормы, т. е. функция $\mathrm{nr}(a, \cdot)$ не имеет локальных максимумов на $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$.*

Эта теорема доказана в [6]. Понятно, что в теореме 7.1 можно заменить $\mathrm{End}(L_p(\Omega, \mu))$ на $\mathrm{End}\big(L_p^m(\Omega, \mu)\big)$. Для произвольных операторнозначных аналитических функций принцип максимума нормы может не выполняться (см. контрпример в [6]).

Если $a \in \mathscr{A}$ и $\varepsilon > 0$, то ε-псевдоспектр элемента a определяется равенством

$$\sigma_\varepsilon(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{nr}(a, \lambda) \geq 1/\varepsilon\}.$$

Ясно, что $\sigma_\varepsilon(a)$ — компакт в $\mathbb{C}$, причем $\sigma(a) \subset \sigma_\varepsilon(a)$.

Напомним определение метрики Хаусдорфа d_H. Пусть $\mathscr{K}$ — множество непустых компактов в $\mathbb{C}$. Для любых $X, Y \in \mathscr{K}$

$$d_H(X, Y) = \max(\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} |x - y|, \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} |x - y|).$$

Таким образом, неравенство $d_H(X, Y) < \delta$ означает, что $X \subset U(Y, \delta)$ и $Y \subset U(X, \delta)$, где $U(X, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid \inf_{x \in X} |z - x| < \delta\}$.

Хорошо известно, что $(\mathscr{K}, d_H)$ — полное метрическое пространство. Если $\{X_\tau\}_{\tau > 0}$ — направленное семейство в $\mathscr{K}$ и $Y \in \mathscr{K}$, то записи $X_\tau \to Y$ и $\lim_\tau X_\tau = Y$ будут означать, что $d_H(X_\tau, Y) \to 0$, а это равносильно следующему: для любого $\delta > 0$ существует такое $\tau_0 > 0$, что $X_\tau \subset U(Y, \delta)$ и $Y \subset U(X_\tau, \delta)$ при $\tau > \tau_0$.

Пусть, как и в § 6, M — многогранник в $\mathbb{R}^n$, E — множество его вершин. Существенную роль в доказательстве следующей теоремы будет играть тот факт, что множество E конечно. Будем дополнительно предполагать, что $p \in (1, +\infty)$. Это ограничение необходимо, чтобы воспользоваться теоремой 7.1.

Теорема 7.2. *Пусть $a \in \mathscr{W}_M$, $a = \{A_\tau\}_{\tau > 0} + \mathscr{J}_M$, $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$\lim_{\tau \to +\infty} \sigma_\varepsilon(A_\tau) = \sigma_\varepsilon(a) = \sigma_\varepsilon(\Theta(a)) = \bigcup_{x \in E} \sigma_\varepsilon(\theta_x(a)).$$

Доказательство. 1. Из следствия 6.2 теоремы 6.1 получаем, что

$$\sigma_\varepsilon(a) = \sigma_\varepsilon(\Theta(a)) = \bigcup_{x \in E} \sigma_\varepsilon(\theta_x(a)).$$

Осталось доказать, что $\sigma_\varepsilon(A_\tau) \to \sigma_\varepsilon(a)$ при $\tau \to +\infty$.

2. Докажем, что для любого $\delta > 0$ существует такое $\tau_0 > 0$, что $\sigma_\varepsilon(A_\tau) \subset U(\sigma_\varepsilon(a), \delta)$ при $\tau > \tau_0$. Для каждой точки λ компакта $Q = \dot{\mathbb{C}} \setminus U(\sigma_\varepsilon(a), \delta)$ имеем

$$\lim_{\tau \to +\infty} \mathrm{nr}(A_\tau, \lambda) = \mathrm{nr}(a, \lambda) = 1/\varepsilon - \xi_\lambda,$$

где $\xi_\lambda > 0$. Отсюда найдем такое $\tau_\lambda > 0$, что $\mathrm{nr}(A_\tau, \lambda) < 1/\varepsilon - \xi_\lambda/2$ при $\tau > \tau_\lambda$. С помощью неравенства (7.1) находим такую окрестность U_λ точки λ, что $\mathrm{nr}(A_\tau, \mu) < 1/\varepsilon - \xi_\lambda/3$ для всех $\mu \in U_\lambda$ и $\tau > \tau_\lambda$. Семейство $\{U_\lambda\}_{\lambda \in S}$ образует открытое покрытие компакта Q. Выделим конечное множество $\Lambda \subset Q$ такое, что семейство $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ также покрывает Q, и положим $\tau_0 = \max\{\tau_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, $\xi = \min\{\xi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Тогда при $\tau > \tau_0$ и $\mu \in Q$

$$\mathrm{nr}(A_\tau, \mu) < 1/\varepsilon - \xi/3 < 1/\varepsilon.$$

Этим доказано, что $\sigma_\varepsilon(A_\tau) \subset \mathbb{C} \setminus Q = U(\sigma_\varepsilon(a), \delta)$ при $\tau > \tau_0$.

3. Выберем произвольно $\delta > 0$, $x \in E$, положим $B_x = \theta_x(a)$ и докажем существование такого $\tau'_x > 0$, что $\sigma_\varepsilon(B_x) \subset U(\sigma_\varepsilon(A_\tau), \delta)$ при $\tau > \tau'_x$. Для каждой точки $\lambda \in \sigma_\varepsilon(B_x)$ рассмотрим ее $\delta/2$-окрестность $U(\lambda, \delta/2)$. С помощью теоремы 7.1 (о норме резольвенты) найдем такое $\mu \in U(\lambda, \delta/2)$, что $\mathrm{nr}(B_x, \mu) > 1/\varepsilon$. Далее, пользуясь соотношением

$$\lim_{\tau \to +\infty} \mathrm{nr}(A_\tau, \mu) = \mathrm{nr}(a, \mu) \geq \mathrm{nr}(B_x, \mu),$$

возьмем такое $\tau'_\lambda > 0$, что $\mathrm{nr}(A_\tau, \mu) > 1/\varepsilon$ при $\tau > \tau'_\lambda$. Тогда при $\tau > \tau'_\lambda$ имеем $\mu \in \sigma_\varepsilon(A_\tau)$, $\lambda \in U(\sigma_\varepsilon(A_\tau), \delta/2)$, $U(\lambda, \delta/2) \subset U(\sigma_\varepsilon(A_\tau), \delta)$. Выбирая из покрытия $\{U(\lambda, \delta/2) : \lambda \in \sigma_\varepsilon(B_x)\}$ компакта $\sigma_\varepsilon(B_x)$ конечное подпокрытие, находим такое $\tau'_x > 0$, что $\sigma_\varepsilon(B_x) \subset U(\sigma_\varepsilon(A_\tau), \delta)$ при $\tau > \tau'_x$.

4. Теперь выберем произвольно $\delta > 0$, для каждой точки $x \in E$ построим такое τ'_x, как в п. 3, и положим $\tau' = \max\limits_{x \in E} \tau'_x$. Тогда при $\tau > \tau'$ получим

$$\sigma_\varepsilon(a) = \bigcup_{x \in E} \sigma_\varepsilon(B_x) \subset U(\sigma_\varepsilon(A_\tau), \delta).$$

Вместе с п. 2 это значит, что $\lim\limits_{\tau} \sigma_\varepsilon(A_\tau) = \sigma_\varepsilon(a)$. Теорема доказана.

Предложение 0.2 получается из теоремы 7.2 при $a = j_M(A)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Landau H.* The notion of approximate eigenvalues applied to an integral equation of laser theory // Quart. Appl. Math. April 1977. V. 35. P. 165–171.
2. *Reichel L., Trefethen L. N.* Eigenvalues and pseudo-eigenvalues of Toeplitz matrices // Linear Algebra Appl. 1992. V. 162. P. 153–185.
3. *Böttcher A.* Pseudospectra and singular values of large convolution operators // J. Integral Equations Appl. 1994. V. 6. P. 267–301.
4. *Böttcher A., Wolf H.* Spectral approximation for Segal–Bargmann space Toeplitz operators // Linear Operators, Banach Center Publ (Warsaw). 1997. V. 387. P. 25–48.
5. *Грудский С. М., Козак А. В.* О скорости сходимости норм операторов, обратных к усеченным операторам Тёплица // Интегродифференциальные уравнения и их приложения. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 1995. С. 45–55.
6. *Böttcher A., Grudsky S. M., Silbermann B.* Norms of inverses, spectra, and pseudospectra of large truncated Wiener–Hopf operators and Toeplitz matrices // New York J. Math. 1997. V. 3. P. 1–31.

7. *Böttcher A., Silbermann B.* Introduction to large truncated Toeplitz matrices. New York: Springer, 1999.

8. *Симоненко И. Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН СССР. 1964. Т. 158. С. 790–793.

9. *Симоненко И. Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. 1 // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29. С. 567–586.

10. *Симоненко И. Б.* Операторы типа свертки в конусах // Мат. сб. 1967. Т. 74. С. 298–313.

11. *Симоненко И. Б., Чинь Нгок Минь.* Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нетеровость. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. гос. ун-та, 1986.

12. *Симоненко И. Б.* Теория операторов локального типа и ее приложения / Ростовский гос. университет. Ростов-на-Дону, 1996. 74 С. Деп. в ВИНИТИ 23.01.96, № 275-В96.

13. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212. С. 1287–1289.

14. *Козак А. В.* О методе редукции для дискретных многомерных сверток // Мат. иссл. (Кишинев). 1973. Т. 8. С. 157–160.

15. *Козак А. В.* Проекционные методы решения многомерных уравнений типа свертки: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 1974.

16. *Козак А. В., Симоненко И. Б.* Проекционные методы решения многомерных дискретных уравнений в свертках // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21. С. 119–127.

17. *Крупник Н. Я.* Точная константа в теореме И. Б. Симоненко об огибающей семейства операторов локального типа // Функцион. анализ и его приложения. 1986. Т. 20. С. 70–71.

Статья поступила 14 мая 2003 г.

Максименко Егор Анатольевич
Ростовский гос. университет, механико-математический факультет,
кафедра алгебры и дискретной математики, ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону 344090
emaximen@rnd.runnet.ru