Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 514.13

РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ОБЩЕГО ВИДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

А. С. Леонов

Аннотация: Изучаются достаточные условия, гарантирующие для интегральных функционалов общего вида в пространствах Лебега выполнение регуляризующих свойств, которые требуются для решения нелинейных некорректных задач. Выделяются специальные классы таких функционалов — (обобщенно) равномерно выпуклые и (обобщенно) квазиравномерно выпуклые. Приводится ряд конкретных примеров и в том числе функционал, который можно использовать в обобщенном варианте метода максимальной энтропии в пространствах Лебега.

Ключевые слова: регуляризация, некорректные задачи, пространства Лебега, равномерно (квазиравномерно) выпуклые функционалы, H-свойство, метод максимальной энтропии.

§ 1. Введение

Рассмотрим постановку, часто встречающуюся в теории и приложениях некорректных задач. Предположим, что $Z(T)$ — пространство функций $z(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, определенных в замкнутой ограниченной области $T \subset \mathbb{R}^N$. Пусть оно наделено некоторой топологией секвенциальной сходимости τ. Введем оператор A (в общем случае нелинейный), действующий из $Z(T)$ в нормированное пространство U. Фиксируем элемент $u \in U$ и зададим некоторое непустое множество $D \subset Z(T)$. Рассмотрим на нем операторное уравнение

$$Az = u, \quad z = z(x) \in D. \tag{1.1}$$

Будем считать, что для этого u множество $Z^* = \arg\inf\{\|Az - u\|_U : z \in D\}$ квазирешений уравнения (1.1) непусто. Для многих уравнений вида (1.1) оно может содержать более одного элемента. В этом случае для нахождения (отбора) специальных квазирешений уравнения (1.1) будем использовать некоторый вспомогательный функционал $\Omega(z)$, определенный на D. Будем отбирать с его помощью так называемые Ω-оптимальные квазирешения уравнения (1.1), т. е. такие функции $\bar{z}(x) \in Z^*$, для которых

$$\Omega(\bar{z}) = \inf\{\Omega(z) : z \in Z^*\} \equiv \overline{\Omega}. \tag{1.2}$$

Их множество обозначим через $\overline{Z}$. Тогда $\overline{\Omega} = \Omega(\overline{Z})$. Далее, будем предполагать, что вместо точных данных $\{A, u\}$ уравнения (1.1) известны некоторые их приближения $\{A_h, u_\delta\}$ с точностями $\eta = (h, \delta)$. Требуется по набору величин

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00044).

$\{A_h, u_\delta, h, \delta\}$ построить τ-устойчивое приближенное решение задачи (1.1), (1.2), т. е. такую функцию $z_\eta(x) \in D$, что $z_\eta(x) \xrightarrow{\tau} \overline{Z}$ при $\eta \to 0$.

Решение этой задачи можно провести с помощью вариационных регуляризующих алгоритмов (соответствующие основные результаты и литературные обзоры можно найти, например, в [1–5]). Рассмотрим, как решается такая задача, на примере вариационной тихоновской схемы регуляризации. В ней в качестве приближения $z_\eta(x)$ берется функция $z^{\alpha_\eta}(x) \in D$, на которой достигается глобальный минимум сглаживающего функционала

$$M^{\alpha_\eta}(z) = \alpha_\eta \Omega(z) + \|A_h z - u_\delta\|_U^2, \quad z \in D. \tag{1.3}$$

Здесь α_η — параметр регуляризации, выбранный специальным образом по данным $\{A_h, u_\delta, h, \delta\}$. Способы выбора этого параметра подробно описаны в литературе (см., например, [1–4]). Выбор проводится так, чтобы обеспечить выполнение так называемых условий регулярности

$$\lim_{\eta \to 0} \sup \Omega(z^{\alpha_\eta}) \le \Omega(\overline{Z}), \tag{1.4}$$

$$\lim_{\eta \to 0} \|Az^{\alpha_\eta} - u\|_U = \|A\bar{z} - u\|_U. \tag{1.5}$$

Известно [1–5], что при определенных предположениях получаемое таким образом приближение $z_\eta(x) = z^{\alpha_\eta}(x)$ τ-сходится к $\overline{Z}$ при $\eta \to 0$. Предположения такого рода относительно функционала $\Omega(z)$ и будут изучаться ниже.

Функционал $\Omega(z)$ в постановке задачи и схеме ее решения играет двоякую роль. С одной стороны, он вводится для отбора специальных квазирешений задачи (1.1). Поэтому часто, будучи заданным «пользователем», он несет в себе некоторый «физический смысл». С другой стороны, он должен обладать математическими **регуляризующими** свойствами, которые гарантируют существование Ω-оптимальных квазирешений (т. е. разрешимость задачи (1.2)), разрешимость задачи минимизации функционала (1.3) и τ-устойчивость получаемых приближенных решений $z^{\alpha_\eta}(x)$. Как ясно из простых примеров, не любой наперед заданный функционал $\Omega(z)$ такими свойствами обладает. В общей форме эти регуляризующие свойства исследованы с разных позиций рядом авторов (см., например, [1–5]). Так, в [3] указаны достаточные условия на функционал $\Omega(z)$ для регуляризации по вариационной тихоновской схеме в топологических пространствах.

(A1) $\Omega(z)$ τ-секвенциально полунепрерывен снизу на D;

(A2) непустые множества $\Omega_C = \{z \in D : \Omega(z) \le C\}$ τ-секвенциально компактны.

Как показано в [3], эти условия и условия регулярности (1.4), (1.5) в предположении τ-секвенциальной непрерывности операторов A, A_h обеспечивают следующие сходимости приближений, полученных в тихоновской схеме: сходимость по функционалу Ω: $\Omega(z^{\alpha_\eta}) \to \overline{\Omega}$, и сходимость по топологии: $z^{\alpha_\eta} \xrightarrow{\tau} \overline{Z}$ при $\eta \to 0$. Однако во многих прикладных задачах проверка условий (A1), (A2) для конкретных функционалов Ω в конкретных пространствах $Z(T)$ затруднена и остается неясным, могут ли такие Ω гарантировать регуляризацию.

В приложениях в качестве $Z(T)$ часто используются пространства Лебега $L_p(T)$, $p \ge 1$, с нормой $\|\cdot\|_p$: $\|z\|_p^p = \int_T |z(x)|^p \, dx$. В этих пространствах представляют интерес регуляризующие функционалы $\Omega(z)$, имеющие вид

$$\Omega(z) = \Omega[z(x)] = \int_T f(x, |z(x)|) \, dx, \quad z(x) \in D, \tag{1.6}$$

где $f(x, y)$ — некоторая заданная функция. Типичным и хорошо исследованным примером такого функционала для $Z(T) = D = L_2(T)$ является $\Omega(z) = \|z\|_2^2$. Для него, считая, что топология τ определяет слабую сходимость в $L_2(T)$, можно убедиться в выполнении условий (A1), (A2). Применяя далее тихоновскую вариационную схему решения задачи (1.1), (1.2) с $\Omega(z) = \|z\|_2^2$ и используя теорию [1–4] этой схемы так, как это указано выше, получим сходимость норм: $\|z^{\alpha_\eta}\|_2 \to \|\bar{z}\|_2$ и слабую сходимость приближений $z^{\alpha_\eta} \rightharpoonup \overline{Z}$ при $\eta \to 0$. Отсюда следует сильная сходимость приближенных решений в $L_2(T)$ к $\overline{Z}$. Аналогичные рассуждения справедливы для функционалов $\Omega(z) = \|z\|_p^p$ при $p > 1$. Пытаясь применить такой же подход к исследованию функционалов общего вида (1.6), мы сталкиваемся с двумя основными проблемами.

(А) Каковы достаточные условия на производящую функцию $f(x, y)$ функционала (1.6), которые обеспечивают выполнение требований (A1), (A2) в $L_p(T)$ для слабой сходимости?

(Б) При каких условиях на эту функцию из сходимости приближений по функционалу Ω и слабой сходимости приближений следует их сильная сходимость к множеству Ω-оптимальных квазирешений?

В работе [6] для случая пространства $L_1(T)$ и для функционалов (1.6) с $f(x, y) = f(y)$ изучены достаточные условия на вид функции $f(y)$, которые обеспечивают выполнение требований (A1), (A2) и сильную сходимость приближений в $L_1(T)$. В пространствах $L_p(T)$ с $p > 1$ условия такого рода для функционалов вида (1.6) в общем случае ранее не рассматривались. Этому вопросу посвящена данная работа.

§ 2. Основные предположения и их следствия

Везде далее считаем, что $z(x) \in L_p(T)$, $p > 1$, а $D_0 \subset L_p(T)$ есть заданное выпуклое и замкнутое множество. Предположим, что функция $f(x, y)$ определена при $x \in T$, $y \geq 0$ и удовлетворяет следующим условиям:

(а) $f(x, y)$ непрерывна в области определения;

(б) $f(x, y)$ при каждом допустимом x не убывает и выпукла по y;

(в) $f(x, y) \geq ky^p$ при $y > M$ для любых $x \in T$, где $k, M > 0$ — не зависящие от x, y константы.

Заметим, что свойство (в) выполнено, например, если $f(x, y)/y^p \to +\infty$ равномерно по x при $y \to +\infty$. Из (а)–(в) следует ограниченность функции $f(x, y)$ снизу: $f(x, y) \geq f_0 = \mathrm{const}\ \forall x, y$. В дальнейшем для удобства будем считать, что $f_0 = 0$, т. е. $f(x, y) \geq 0$.

Обозначим через $D_\Omega = \{z(x) \in L_p(T) : \Omega(z) < \infty\}$ область определения неотрицательного функционала (1.6) и будем далее в качестве множества D, указанного в постановке задачи, использовать непустое по предположению множество $D = D_0 \cap D_\Omega$.

Теорема 2.1. *Функционал* (1.6) *с функцией* $f(x, y)$, *удовлетворяющей условиям* (а), (б), *является выпуклым и слабо полунепрерывным снизу на выпуклом множестве* D.

Доказательство. Из условия (б) следует выпуклость функции $f(x, |y|)$ по y, $y \in \mathbb{R}$, при каждом $x \in T$. Это и (1.6) обеспечивают выпуклость функционала $\Omega(z)$ и множества D_Ω. Поэтому выпуклым будет и множество D. Слабая полунепрерывность снизу доказывается по схеме, использованной в [6] при доказательстве п. 2 теоремы 2.1 из [6].

Теорема 2.2. *Если производящая функция $f(x,y)$ функционала* (1.6) *имеет свойства* (а)–(в), *то непустые множества $\Omega_C = \{z \in D : \Omega(z) \le C\} = \{z \in D_0 : \Omega(z) \le C\}$ слабо замкнуты и слабо компактны в $L_p(T)$.*

Доказательство. Докажем слабую замкнутость множества Ω_C. Возьмем произвольную последовательность $\{z_n\} \subset \Omega_C \subset D_0$, слабо сходящуюся к некоторому элементу $z_0 \in L_p(T)$. Тогда из слабой замкнутости выпуклого и замкнутого в L_p множества D_0 следует, что $z_0 \in D_0$. Кроме того, из доказанной в теореме 2.1 слабой полунепрерывности снизу функционала (1.6) придем к соотношению

$$\Omega(z_0) \le \liminf_{n\to\infty} \Omega(z_n) \le C.$$

Поэтому $z_0 \in \Omega_C$. Докажем теперь слабую компактность. Введем множества $T_1 = \{x \in T : |z(x)| \le M\}$, $T_2 = \{x \in T : |z(x)| > M\}$, где M — константа из (в). Тогда для функций $z(x) \in \Omega_C$ с учетом условия (в) и неотрицательности функции $f(x,y)$ получается оценка

$$\begin{aligned} k\int\limits_T |z(x)|^p\,dx &= \int\limits_{T_1} k|z(x)|^p\,dx + \int\limits_{T_2} k|z(x)|^p\,dx \\ &\le kM^p\mu(T_1) + \int\limits_{T_2} f(x,|z(x)|)\,dx \le kM^p\mu(T) + \int\limits_T f(x,|z(x)|)\,dx \\ &= kM^p\mu(T) + \Omega(z) \le kM^p\mu(T) + C \equiv C_1, \end{aligned}$$

где $\mu(\cdot)$ — мера соответствующего множества. Поэтому $\|z\|_p \le (C_1/k)^{1/p} = \mathrm{const}$, т. е. все элементы множества Ω_C лежат в шаре пространства $L_p(T)$. Таким образом, в силу слабой компактности шара в $L_p(T)$ при $p > 1$ множества Ω_C также оказываются слабо компактными. □

Теоремы 2.1 и 2.2 дают достаточные условия для решения проблемы (А): свойства (А1), (А2) функционала (1.6) выполнены для слабой сходимости в $L_p(T)$, если удовлетворяются условия (а)–(в) на функцию $f(x,y)$.

В дальнейшем будем ссылаться на свойства (А1), (А2) для слабой сходимости в $L_p(T)$, как на ($\mathrm{A1}_w$) и ($\mathrm{A2}_w$).

§ 3. Функционалы с *H*-свойством

Обратимся к проблеме (Б). Пусть последовательность $\{z_n(x)\} \subset D \subset L_p(T)$

(Б1) слабо сходится в $L_p(T)$ к функции $z_0 = z_0(x) \in D$, т. е. $z_n \rightharpoonup z_0$;

(Б2) сходится к z_0 по функционалу, т. е. $\Omega(z_n) \to \Omega(z_0)$.

Нас интересует, при каких условиях на функционал общего вида $\Omega(z)$ из свойств (Б1) и (Б2) следует сильная сходимость $z_n \to z_0$ в $L_p(T)$. В дальнейшем эти условия будут использованы для исследования функционалов вида (1.6).

Определение 3.1. Будем говорить, что функционал $\Omega(z)$ *обладает H-свойством на множестве D*, если всякая последовательность $\{z_n\}$, удовлетворяющая условиям слабой сходимости (Б1) и сходимости по функционалу (Б2), оказывается сильно сходящейся в $L_p(T)$ к z_0.

Рассмотрим сначала один известный класс функционалов, которые имеют H-свойство.

Определение 3.2. Функционал $\Omega(z)$ называется *равномерно выпуклым* на выпуклом множестве D, если существует такая непрерывная и монотонно возрастающая при $t \geq 0$ функция $\xi(t)$, $\xi(0) = 0$, что

$$\frac{\Omega(z_1) + \Omega(z_2)}{2} \geq \Omega\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + \xi(\|z_1 - z_2\|_p) \quad \forall z_1, z_2 \in D. \tag{3.1}$$

Равномерно выпуклые функционалы изучались ранее рядом авторов (см., например, [7]).

Теорема 3.3. *Предположим, что равномерно выпуклый на выпуклом множестве D функционал Ω слабо полунепрерывен снизу. Тогда он обладает H-свойством.*

Действительно, пусть для произвольной последовательности $\{z_n\} \subset D$ выполнены условия (Б1), (Б2). Тогда из слабой полунепрерывности снизу функционала $\Omega(z)$ и из (Б1) следует предельное соотношение

$$\liminf_{n\to\infty} \Omega\left(\frac{z_n + z_0}{2}\right) \geq \Omega(z_0).$$

Применяя его вместе с (Б2) в неравенстве (3.1), написанном для $z_1 = z_n$, $z_2 = z_0$, получим

$$\Omega(z_0) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\Omega(z_n) + \Omega(z_0)}{2}\right] \geq \lim_{n\to\infty}\left[\Omega\left(\frac{z_n + z_0}{2}\right) + \xi(\|z_n - z_0\|_p)\right]$$
$$\geq \liminf_{n\to\infty} \Omega\left(\frac{z_n + z_0}{2}\right) + \lim_{n\to\infty} \xi(\|z_n - z_0\|_p) \geq \Omega(z_0) + \lim_{n\to\infty} \xi(\|z_n - z_0\|_p).$$

Отсюда и из неравенства $\xi(t) \geq 0$ вытекает сходимость $\xi(\|z_n - z_0\|_p) \to 0$. Из нее, а также из непрерывности и возрастания функции $\xi(t)$ получается доказываемая сходимость $\|z_n - z_0\|_p \to 0$. $\square$

Типичным примером равномерно выпуклого функционала в $L_p(T)$ при $p \geq 2$ является $\Omega(z) = \|z\|_p^p$. Для него соотношение (3.1) следует из числового неравенства [7]

$$\frac{|z_1|^p + |z_2|^p}{2} \geq \left|\frac{z_1 + z_2}{2}\right|^p + \kappa|z_1 - z_2|^p \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}; \quad \kappa = \min\{1, 2^{3-p}\}/8. \tag{3.2}$$

Но свойство равномерной выпуклости часто не выполняется даже для простейших функционалов $\Omega(z)$. Например, при $1 < p < 2$ функционал $\Omega(z) = \|z\|_p^p$ уже не будет равномерно выпуклым во всем пространстве $L_p(T)$ (см., например, [7, гл. 4, § 7]). Тем не менее для такого $\Omega(z)$ по-прежнему из сходимостей $z_n \rightharpoonup z_0$, $\Omega(z_n) = \|z_n\|_p^p \to \|z_0\|_p^p = \Omega(z_0)$ следует сильная сходимость [8, гл. 8, § 3], т. е. он все же обладает H-свойством. Поэтому для более подробного исследования случая $1 < p < 2$ введем новый класс функционалов Ω в $L_p(T)$. При этом используется величина

$$\Delta_p(z_1, z_2) = \int_T (|z_1(x)|^{2-p} + |z_2(x)|^{2-p})(|z_2(x)|^{p-1} - |z_1(x)|^{p-1})^2\,dx.$$

Изучим ее.

Лемма 3.4. *Функционал $\Delta_p(z_1(x), z_2(x))$ определен для любых функций $z_1(x), z_2(x) \in L_p(T)$, $1 < p < 2$.*

Доказательство. Достаточно доказать конечность $\Delta_p(z_1(x), z_2(x))$ в пространстве $L_p(T)$. При исследовании на минимум функции

$$\zeta(t) = \frac{|t|^p + 1}{2} - \left|\frac{t+1}{2}\right|^p - \kappa(|t|^{2-p} + 1)(|t|^{p-1} - 1)^2, \quad \kappa = \frac{p(p-1)}{16},$$

оказывается, что $\zeta(t) \geq \zeta_{\min} = \zeta(1) = 0$. Приняв здесь $t = z_1/z_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, получим числовое неравенство

$$\frac{|z_1|^p + |z_2|^p}{2} \geq \left|\frac{z_1 + z_2}{2}\right|^p + \kappa(|z_1|^{2-p} + |z_2|^{2-p})(|z_2|^{p-1} - |z_1|^{p-1})^2. \tag{3.3}$$

Используя его для функций $z_1(x), z_2(x) \in L_p(T)$, $1 < p < 2$, и интегрируя по x, по свойствам интеграла Лебега получим

$$\frac{\|z_1\|_p^p + \|z_2\|_p^p}{2} \geq \left\|\frac{z_1 + z_2}{2}\right\|_p^p$$
$$+\kappa \int\limits_T (|z_1(x)|^{2-p} + |z_2(x)|^{2-p})(|z_2(x)|^{p-1} - |z_1(x)|^{p-1})^2 \, dx = \left\|\frac{z_1 + z_2}{2}\right\|_p^p + \kappa\Delta_p(z_1, z_2). \tag{3.4}$$

Отсюда следует конечность величины $\Delta_p(z_1, z_2)$. $\square$

Лемма 3.5. *Пусть $1 < p < 2$. Предположим, что для последовательности $\{z_n\} \subset L_p(T)$ и элемента $z_0 \in L_p(T)$ выполнено соотношение*

$$\Delta_p(z_n, z_0) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Тогда имеют место сходимости

$$\|z_n\|_p \to \|z_0\|_p, \quad \int\limits_T \big|\, |z_n(x)|^p - |z_0(x)|^p \big| \, dx \to 0.$$

Доказательство. Используем известное числовое неравенство

$$\big||z_2|^p - |z_1|^p\big| \leq \frac{p}{p-1}(|z_2| + |z_1|)\big|\, |z_2|^{p-1} - |z_1|^{p-1}\big| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R},\ 1 < p < 2,$$

для вывода оценки

$$\big|\|z_n(x)\|_p^p - \|z_0(x)\|_p^p\big| = \left|\int\limits_T (|z_n(x)|^p - |z_0(x)|^p) \, dx\right| \leq \int\limits_T \big|\, |z_n(x)|^p - |z_0(x)|^p \big| \, dx$$
$$\leq \frac{p}{p-1} \int\limits_T (|z_n(x)| + |z_0(x)|)\big|\, |z_n(x)|^{p-1} - |z_0(x)|^{p-1}\big| \, dx.$$

Применяя в ней справа неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\big|\|z_n(x)\|_p^p - \|z_0(x)\|_p^p\big| \le \int\limits_T \big||z_n(x)|^p - |z_0(x)|^p\big|\,dx$$

$$\le \frac{p}{p-1}\Bigg\{\Bigg[\int\limits_T |z_n(x)|^{2(1-p/2)}(|z_n(x)|^{p-1} - |z_0(x)|^{p-1})^2\,dx\Bigg]^{1/2}\Bigg[\int\limits_T |z_n(x)|^{2(p/2)}\,dx\Bigg]^{1/2}$$

$$+\Bigg[\int\limits_T |z_0(x)|^{2(1-p/2)}(|z_n(x)|^{p-1} - |z_0(x)|^{p-1})^2\,dx\Bigg]^{1/2}\Bigg[\int\limits_T |z_0(x)|^{2(p/2)}\,dx\Bigg]^{1/2}\Bigg\}$$

$$\le \frac{p}{p-1}\Bigg[\int\limits_T (|z_n(x)|^{2-p} + |z_0(x)|^{2-p})(|z_n(x)|^{p-1} - |z_0(x)|^{p-1})^2\,dx\Bigg]^{1/2}$$

$$\times\Bigg\{\Bigg[\int\limits_T |z_n(x)|^p\,dx\Bigg]^{1/2} + \Bigg[\int\limits_T |z_0(x)|^p\,dx\Bigg]^{1/2}\Bigg\}$$

$$= \frac{p}{p-1}\big(\|z_n(x)\|_p^{p/2} + \|z_0(x)\|_p^{p/2}\big)\Delta_p^{1/2}(z_n, z_0). \quad (3.5)$$

Отсюда и из условия леммы следует, что

$$\big|\|z_n(x)\|_p^{p/2} - \|z_0(x)\|_p^{p/2}\big| \le \frac{p}{p-1}\Delta_p^{1/2}(z_n, z_0) \to 0, \quad (3.6)$$

т. е. $\|z_n\|_p \to \|z_0\|_p$ при $n \to \infty$. Тогда из (3.5) и (3.6) получается и другая доказываемая сходимость:

$$\int\limits_T \big||z_n(x)|^p - |z_0(x)|^p\big|\,dx \to 0. \quad \square$$

Определение 3.6. Функционал Ω называется *квазиравномерно выпуклым на выпуклом множестве* $D \subset L_p(T)$, $1 < p < 2$, если существует функция $\xi(t)$ со свойствами, как в определении 3.2, такая, что

$$\frac{\Omega(z_1) + \Omega(z_2)}{2} \ge \Omega\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + \xi[\Delta_p(z_1, z_2)] \quad \forall z_1, z_2 \in D. \quad (3.7)$$

Как ясно из неравенства (3.4), примером квазиравномерно выпуклого функционала на всем пространстве $L_p(T)$, $1 < p < 2$, будет $\Omega(z) = \|z\|_p^p$.

Теорема 3.7. *Если функционал Ω является квазиравномерно выпуклым и слабо полунепрерывным снизу на выпуклом множестве D, то он обладает на D H-свойством.*

Действительно, если для последовательности $\{z_n\} \subset D$ выполнены условия (Б1), (Б2), то, рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.3, можно вывести из формулы (3.7) и из слабой полунепрерывности снизу функционала Ω сходимости $\xi[\Delta_p(z_n, z_0)] \to 0$ и $\Delta_p(z_n, z_0) \to 0$. Поэтому по лемме 3.5 получается сходимость норм $\|z_n\|_p \to \|z_0\|_p$. Она вместе со слабой сходимостью $z_n \rightharpoonup z_0$ из условия (Б1) согласно известным свойствам пространств L_p, $p > 1$ [8, гл. 8, § 3], влечет сильную сходимость. $\square$

Укажем еще два класса функционалов Ω, обладающих H-свойством.

Определение 3.8. Функционал Ω называется *обобщенно равномерно выпуклым на выпуклом множестве* $D \subset L_p(T)$, если существуют такие функция $\xi(t)$ со свойствами, как в определении 3.2, и непрерывная возрастающая при $z \geq 0$ функция $\varphi(z)$, что

$$\frac{\Omega(z_1)+\Omega(z_2)}{2} \geq \Omega\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) + \xi(\|\varphi(|z_1(x)|)-\varphi(|z_2(x)|)\|_p) \quad \forall z_1, z_2 \in D. \quad (3.8)$$

Функционал Ω называется *обобщенно квазиравномерно выпуклым на выпуклом множестве* $D \subset L_p(T)$, $1<p<2$, если вместо (3.8) выполнено неравенство

$$\frac{\Omega(z_1)+\Omega(z_2)}{2} \geq \Omega\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) + \xi(\Delta_p[\varphi(|z_1(x)|), \varphi(|z_2(x)|)]) \quad \forall z_1, z_2 \in D. \quad (3.9)$$

В связи с определением 3.8 сделаем следующее

Замечание 3.9. Пусть множество D содержит какую-то функцию $\tilde{z}(x)$, для которой $\varphi(|\tilde{z}(x)|) \in L_p(T)$. Тогда условия (3.8) или (3.9) порождают включение $\varphi(|z(x)|) \in L_p(T)$ для любой $z(x) \in D$. Действительно, из (3.8) следует, что

$$\|\varphi(|z(x)|)-\varphi(|\tilde{z}(x)|)\|_p \leq \xi^{-1}\left[\frac{\Omega(z)+\Omega(\tilde{z})}{2} - \Omega\left(\frac{z+\tilde{z}}{2}\right)\right] < \infty \quad \forall z(x) \in D \subset L_p(T),$$

т. е. измеримая функция $\varphi(|z(x)|)-\varphi(|\tilde{z}(x)|)$, а значит, и $\varphi(|z(x)|)$, принадлежат $L_p(T)$. Если же выполнено (3.9), то по аналогии с (3.6), заменяя в доказательстве леммы 3.5 величины $z_n(x)$, $z_0(x)$ на $\varphi(|z(x)|)$, $\varphi(|\tilde{z}(x)|)$, получим

$$\left|\|\varphi(|z(x)|)\|_p^{p/2} - \|\varphi(|\tilde{z}(x)|)\|_p^{p/2}\right| \leq \frac{p}{p-1}\Delta_p^{1/2}(\varphi(|z(x)|), \varphi(|\tilde{z}(x)|)) \leq \frac{p}{p-1}\left\{\xi^{-1}\left[\frac{\Omega(z)+\Omega(\tilde{z})}{2} - \Omega\left(\frac{z+\tilde{z}}{2}\right)\right]\right\}^{1/2} < \infty,$$

и это снова доказывает включение $\varphi(|z(x)|) \in L_p(T)$.

Замечание 3.9 верно, в частности, если множество D содержит какую-либо постоянную функцию $\tilde{z}(x) = C_0 = \text{const}$.

Для исследования функционалов, фигурирующих в определении 3.8, потребуется

Лемма 3.10. *Предположим, что для функции $\varphi(z)$, определенной, непрерывной и монотонно возрастающей при $z \geq 0$, выполнены неравенства $\varphi(z) \geq 0$, $\varphi(z) \geq a + bz$ $\forall z \geq 0$, где a, b — некоторые константы, причем $b > 0$. Пусть, кроме того, $\varphi(|z(x)|) \in L_p(T)$ для любого $z \in D$.*

1. *Если для последовательности функций $\{z_n(x)\} \subset D$ и элемента $z_0(x) \in D$ имеет место сходимость $\|\varphi(|z_n(x)|)-\varphi(|z_0(x)|)\|_p \to 0$ при $n \to \infty$, то $\|z_n\|_p \to \|z_0\|_p$.*

2. *Если при $1<p<2$ справедливо предельное соотношение*

$$\Delta_p[\varphi(|z_n(x)|), \varphi(|z_0(x)|)] \to 0,$$

то также $\|z_n\|_p \to \|z_0\|_p$.

Доказательство. В первом случае $\|\varphi(|z_n(x)|)-\varphi(|z_0(x)|)\|_p \to 0$, т. е.

$$v_n(x) = |v_n(x)| = \varphi(|z_n(x)|) \xrightarrow{L_p} \varphi(|z_0(x)|) = |v_0(x)| = v_0(x).$$

Исследуем предельное соотношение между функциями $|z_n(x)| = \varphi^{-1}(|v_n(x)|)$ и $|z_0(x)| = \varphi^{-1}(|v_0(x)|)$ при $n \to \infty$. По условиям на функцию $v = \varphi(z)$ получим

$$0 \le z = \varphi^{-1}(v) = \varphi^{-1}(|v|) \le a_0 + b_0 v = a_0 + b_0|v|,$$

где $a_0 = -a/b, b_0 = 1/b$. Таким образом, $|\varphi^{-1}(|v|)| \le a_0 + b_0|v|$. Это условие согласно результатам из [9, гл. 6, § 19; 10, гл. 6, § 1] гарантирует, что оператор $\varphi^{-1}[\cdot]$, который действует по правилу $|z(x)| = \varphi^{-1}[|v(x)|]$ на элементы $v(x)$ пространства $L_p(T)$, будет непрерывным из L_p в L_p. Следовательно,

$$|z_n(x)| = \varphi^{-1}[|v_n(x)|] \xrightarrow{L_p} \varphi^{-1}[|v_0(x)|] = |z_0(x)|,$$

откуда и получается сходимость норм $\|z_n\|_p \to \|z_0\|_p$.

Во втором случае, применяя лемму 3.5 с заменой в ней функций $z_n = z_n(x)$, $z_0 = z_0(x)$ на $\varphi(|z_n(x)|), \varphi(|z_0(x)|)$ соответственно и учитывая условие $\varphi(z) \ge 0$, получим, что

$$\int\limits_T |\varphi^p(|z_n(x)|) - \varphi^p(|z_0(x)|)|\, dx \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Это значит, что

$$w_n(x) = \varphi^p(|z_n|) \xrightarrow{L_1} \varphi^p(|z_0|) = w_0(x).$$

Используем теперь тот факт, что оператор возведения в степень $v(x) = |w(x)|^{1/p}$ непрерывен из L_1 в L_p, как это следует из [9, гл. 6, § 19; 10, гл. 6, § 1]. Тогда

$$v_n(x) = \varphi(|z_n(x)|) = |\varphi^p(|z_n(x)|)|^{1/p} \xrightarrow{L_p} |\varphi^p(|z_0(x)|)|^{1/p} = \varphi(|z_0(x)|) = v_0(x).$$

Дальнейшие рассуждения, использующие условия $\varphi(z) \ge 0$, $\varphi(z) \ge a + bz$, проводятся, как при доказательстве первой части этой леммы, и снова дают сходимость $\|z_n\|_p \to \|z_0\|_p$. □

Теорема 3.11. *Пусть выпуклое множество $D \subset L_p(T)$ содержит такую функцию $\tilde{z}(x)$, что $\varphi(|\tilde{z}(x)|) \in L_p(T)$ (например, $\tilde{z}(x) = C_0 = \mathrm{const} \in D$), а функционал $\Omega(z)$ слабо полунепрерывен снизу на D. Тогда*

1) если функционал $\Omega(z)$ является обобщенно равномерно выпуклым на множестве D, причем для функции $\varphi(z)$, включенной в определение 3.8, выполнены условия $\varphi(z) \ge 0$, $\varphi(z) \ge a + bz$ $\forall z \ge 0$ с $a, b = \mathrm{const}$, $b > 0$, то этот функционал обладает H-свойством;

2) если функционал $\Omega(z)$ обобщенно квазиравномерно выпуклый на выпуклом множестве $D \subset L_p(T)$, $1 < p < 2$, то при тех же условиях на $\varphi(z)$ он обладает H-свойством.

Действительно, для любой последовательности $\{z_n(x)\} \subset D$ со свойствами (Б1) и (Б2), как и при доказательстве теоремы 3.3, из неравенств (3.8), (3.9), взятых при $z_1 = z_n(x)$, $z_2 = z_0(x)$, и из слабой полунепрерывности снизу функционала Ω вытекают сходимости

$$\|\varphi(|z_n(x)|) - \varphi(|z_0(x)|)\|_p \to 0, \quad \Delta_p[\varphi(|z_n(x)|), \varphi(|z_0(x)|)] \to 0.$$

Кроме того, согласно замечанию 3.9 справедливо включение $\varphi(|z(x)|) \in L_p(T)$ $\forall z \in D$ и, в частности, $\varphi(|z_n(x)|), \varphi(|z_0(x)|) \in L_p(T)$. Поэтому лемма 3.10 гарантирует сходимость норм $\|z_n\|_p \to \|z_0\|_p$, которая вместе с условием (Б1) слабой сходимости последовательности дает сильную сходимость $z_n \xrightarrow{L_p} z_0$. □

Из сказанного ясно, что обеспечить решение проблемы (Б) для функционалов вида (1.6) можно, гарантировав для них выполнение H-свойства. Теоремы 3.3, 3.7 и 3.11 показывают, что этим свойством обладают слабо полунепрерывные снизу и (обобщенно) равномерно выпуклые или (обобщенно) квазиравномерно выпуклые функционалы. Соответствующие условия на функции $f(x,y)$, порождающие такие функционалы вида (1.6), приведены в следующем параграфе.

§ 4. Достаточные условия обобщенной выпуклости функционалов

Чтобы функционалы вида (1.6) были обобщенно равномерно выпуклы или обобщенно квазиравномерно выпуклы на выпуклом множестве $D \subset L_p(T)$, достаточно, например, потребовать для непрерывной при $(x,y) \in T \times [0,+\infty)$ и неубывающей по y для любого $x \in T$ функции $f(x,y)$ выполнения одного из числовых неравенств

$$\frac{f(x,|z_1|)+f(x,|z_2|)}{2} \geq f\left(x, \left|\frac{z_1+z_2}{2}\right|\right) + \kappa|\varphi(|z_1|)-\varphi(|z_2|)|^p \tag{4.1}$$
$$\forall x \in T,\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}, \quad \kappa = \mathrm{const} > 0; \quad p > 1;$$

$$\frac{f(x,|z_1|)+f(x,|z_2|)}{2} \geq f\left(x, \left|\frac{z_1+z_2}{2}\right|\right) + \kappa(\varphi^{2-p}(|z_1|)+\varphi^{2-p}(|z_1|))(\varphi^{p-1}(|z_1|)-\varphi^{p-1}(|z_2|))^2, \quad 1<p<2, \tag{4.2}$$

с функцией $\varphi(z)$, которая удовлетворяет требованиям из определения 3.8 и условиям леммы 3.10 (теоремы 3.11). Тогда, с одной стороны, функция $f(x,y)$ будет подчиняться условиям (а), (б) из § 2, т. е. по теореме 2.1 соответствующий функционал (1.6) будет слабо полунепрерывным снизу. С другой стороны, для такого функционала (1.6), как нетрудно убедиться, будут выполнены неравенства (3.8) и (3.9) с $\xi(t) = \kappa t$. Значит, по теореме 3.11 функционал (1.6) будет обладать H-свойством. При $\varphi(z) = z$ неравенства (4.1) и (4.2) аналогично обеспечивают равномерную и квазиравномерную выпуклость функционала (1.6) и по теоремам 3.3, 3.7 — его H-свойство.

Интерес, однако, представляют более детальные достаточные условия на функции $f(x,y)$. Их можно получить для функционалов вида

$$\Omega(z) = \int_T f(x, \varphi^p(|z(x)|))\,dx, \quad z(x) \in D = D_0 \cap D_\Omega \subset L_p(T), \quad D \neq \varnothing, \tag{4.3}$$

с неотрицательной функцией $\varphi(z)$, определенной при $z \geq 0$. Функцию $f(x,y)$ считаем по-прежнему неотрицательной.

Теорема 4.1. *Предположим, что*

1) *функция $f(x,y)$ непрерывна при $(x,y) \in T \times [0,\infty)$;*

2) *$f(x,y)$ дифференцируема по y при каждом $x \in T$, причем $f'_y(x,y) \geq m = \mathrm{const} > 0$ $\forall (x,y) \in T \times [0,\infty)$;*

3) *$f(x,y)$ выпукла по y при каждом $x \in T$;*

4) *функция $\varphi(z)$ непрерывна, неотрицательна, монотонно возрастает и выпукла при $z \geq 0$.*

Тогда функционал (4.3) *является обобщенно квазиравномерно выпуклым при* $1 < p < 2$ *и обобщенно равномерно выпуклым при* $p \geq 2$ *на* D.

Доказательство. Пусть, например, $p \geq 2$. Тогда, используя выпуклость функции $f(x,y)$ по второй переменной, неравенство (3.2) с заменой в нем $|z_1|$ и $|z_2|$ на $\varphi^p(|z_1|)$ и $\varphi^p(|z_2|)$, монотонность функции $f(x,y)$ по переменной $y \geq 0$, вытекающую из условия 2, и применяя формулу конечных приращений, получим

$$\frac{f(x,\varphi^p(|z_1|)) + f(x,\varphi^p(|z_2|))}{2} \geq f\biggl(x, \frac{\varphi^p(|z_1|) + \varphi^p(|z_2|)}{2}\biggr)$$
$$\geq f\biggl(x, \biggl|\frac{\varphi(|z_1|) + \varphi(|z_2|)}{2}\biggr|^p + \kappa|\varphi(|z_1|) - \varphi(|z_2|)|^p\biggr) = f\biggl(x, \biggl|\frac{\varphi(|z_1|) + \varphi(|z_2|)}{2}\biggr|^p\biggr)$$
$$+ f'_y\biggl(x, \biggl|\frac{\varphi(|z_1|) + \varphi(|z_2|)}{2}\biggr|^p + \theta\kappa|\varphi(|z_1|) - \varphi(|z_2|)|^p\biggr)\kappa|\varphi(|z_1|) - \varphi(|z_2|)|^p$$
$$\geq f\biggl(x, \biggl|\frac{\varphi(|z_1|) + \varphi(|z_2|)}{2}\biggr|^p\biggr) + m\kappa|\varphi(|z_1|) - \varphi(|z_2|)|^p \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R};\ 0 < \theta < 1.$$

Продолжим эту выкладку с учетом возрастания функции $f(x,y)$ по аргументу y, выпуклости функции $\varphi(z) \geq 0$ и ее возрастания при $z \geq 0$:

$$f\biggl(x, \biggl|\frac{\varphi(|z_1|) + \varphi(|z_2|)}{2}\biggr|^p\biggr) \geq f\biggl(x, \varphi^p\biggl(\frac{|z_1| + |z_2|}{2}\biggr)\biggr) \geq f\biggl(x, \varphi^p\biggl(\biggl|\frac{z_1 + z_2}{2}\biggr|\biggr)\biggr).$$

В итоге для каждого $x \in T$ и любых $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ получим

$$\frac{f(x,\varphi^p(|z_1|)) + f(x,\varphi^p(|z_2|))}{2} \geq f\biggl(x, \varphi^p\biggl(\biggl|\frac{z_1 + z_2}{2}\biggr|\biggr)\biggr) + m\kappa|\varphi(|z_1|) - \varphi(|z_2|)|^p. \tag{4.4}$$

Подставляя в это числовое неравенство произвольные функции $z_1(x), z_2(x)$ из выпуклого множества $D \subset L_p(T)$ и почленно интегрируя полученное соотношение, приходим к следующему варианту формулы (3.8):

$$\frac{\Omega(z_1) + \Omega(z_2)}{2} \geq \Omega\biggl(\frac{z_1 + z_2}{2}\biggr) + m\kappa\|\varphi(|z_1|) - \varphi(|z_2|)\|_p^p \quad \forall z_1, z_2 \in D.$$

Это доказывает обобщенную равномерную выпуклость функционала (4.3).

В случае $1 < p < 2$ обобщенная квазиравномерная выпуклость доказывается по той же схеме с некоторыми изменениями. Так, вместо неравенства (3.2) используется неравенство (3.3) с заменой в нем $|z_1|$, $|z_2|$ на $\varphi(|z_1|)$, $\varphi(|z_2|)$ соответственно и с последующей заменой в выкладках члена $|\varphi(|z_1|) - \varphi(|z_2|)|^p$ на

$$(\varphi^{2-p}(|z_1|) + \varphi^{2-p}(|z_1|))(\varphi^{p-1}(|z_1|) - \varphi^{p-1}(|z_2|))^2.$$

В частности, так модифицируется неравенство (4.4). В итоге получается вариант соотношения (3.9):

$$\frac{\Omega(z_1) + \Omega(z_2)}{2} \geq \Omega\biggl(\frac{z_1 + z_2}{2}\biggr) + m\kappa\Delta_p[\varphi(|z_1|), \varphi(|z_2|)] \quad \forall z_1, z_2 \in D,$$

и это доказывает теорему. □

Следствие 4.2. *Если множество D удовлетворяет условию теоремы* 3.11 (*например, содержит некоторую постоянную функцию*), *а для функций f и φ выполнены условия теоремы* 4.1 *и, кроме того, условие $\varphi(z) \geq a + bz$ с $b > 0$ при $z \geq 0$, то функционал* (4.3) *обладает следущими свойствами:*

($\mathrm{A1}_w$) *слабо полунепрерывен снизу на D;*

($\mathrm{A2}_w$) *его непустые множества Ω_C слабо замкнуты и слабо компактны в $L_p(T)$;*

(Б) *обладает H-свойством в D.*

Доказательство. Производящая функция $f_0(x,z) = f(x, \varphi^p(|z|))$ функционала (4.3) обладает свойствами (а)–(в) из § 2. Действительно, ее непрерывность и монотонность следуют из условий 1, 2 и 4 теоремы 4.1, а выпуклость вытекает из неравенства (4.4) при $p \geq 2$ или его аналога при $1 < p < 2$. Свойство (в) получается с учетом условия $\varphi(z) \geq a + bz$ и условия 2 теоремы 4.1 из оценки

$$f(x, \varphi^p(z)) = f(x, 0) + f'_y(x, \theta\varphi^p(z))\varphi^p(z) \geq 0 + m(bz + a)^p \geq m(b/2)^p z^p,$$

справедливой при $z \geq M = \max\bigl(0, -\frac{2a}{b}\bigr)$. Но тогда по теоремам 2.1 и 2.2 функционал (4.3) будет обладать свойствами ($\mathrm{A1}_w$) и ($\mathrm{A2}_w$), а из теоремы 3.11 и результата теоремы 4.1 с учетом ($\mathrm{A1}_w$) получается его H-свойство. $\square$

Из следствия 4.2 ясно, что такой функционал (4.3) может быть использован в вариационной схеме тихоновской регуляризации, где он будет обеспечивать сильную сходимость приближенных решений в $L_p(T)$, $p > 1$

Рассмотрим несколько конкретных примеров. Как нетрудно убедиться, следующие функционалы с $\varphi(z)$, подчиненной условиям теоремы 3.11, оказываются по теореме 4.1 обобщенно равномерно выпуклыми при $p \geq 2$ и обобщенно квазиравномерно выпуклыми при $1 < p < 2$ в D:

$$\Omega_1(z) = \int_T q(x) \exp(\varphi^p(|z(x)|))\, dx,$$

$$\Omega_2(z) = \int_T q(x)(\varphi^p(|z(x)|) + 1) \ln(\varphi^p(|z(x)|) + 1)\, dx.$$

Здесь $q(x) \geq q_0 = \mathrm{const} > 0$ — заданная непрерывная в T функция. По следствию 4.2 функционалы $\Omega_{1,2}(z)$ будут иметь H-свойство в D, а также свойства ($\mathrm{A1}_w$) и ($\mathrm{A2}_w$) в $L_p(T)$.

Особый интерес представляет функционал

$$\Omega_3(z) = \int_T z^p(x) \ln^p\left(\frac{z(x)}{r}\right) dx, \tag{4.5}$$

рассматриваемый на множестве $D_r = D_0(r) \cap D_\Omega$ с

$$D_0(r) = \{z(x) \in L_p(T) : z(x) \geq r \ \forall x \in T\},$$

где $r > 0$ — заданная константа. При $p = 1$ такой функционал хорошо изучен и используется в варианте тихоновской регуляризации, называемом методом максимальной энтропии (см., например, [11, 12]). При $p > 1$ регуляризующие свойства этого функционала до сих пор не изучались. После замены $\zeta(x) = z(x) - r$ функционал (4.5) примет вид (4.3):

$$\Omega_3(\zeta) = \int\limits_T [\zeta(x) + r]^p \ln^p\left(\frac{\zeta(x) + r}{r}\right) dx = \int\limits_T f(x, \varphi^p(\zeta(x)))\, dx$$

с $\varphi(\zeta) = (\zeta + r)\ln\left(\frac{\zeta + r}{r}\right)$ и $f(x, y) = y$. Функция $\varphi(\zeta)$, как можно убедиться, удовлетворяет при $\zeta \geq 0$ условиям 4 теоремы 4.1, а также условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\zeta) \geq \zeta$. На множестве D_r выполнено неравенство $\zeta(x) \geq 0$. Поэтому по теореме 4.1 функционал $\Omega_3(z)$ будет обобщенно равномерно выпуклым при $p \geq 2$ или обобщенно квазиравномерно выпуклым при $1 < p < 2$ на множестве D_r. По следствию 4.2 он будет иметь на D_r H-свойство и свойства ($\mathrm{A1}_w$), ($\mathrm{A2}_w$).

Теперь рассмотрим часто встречающиеся в приложениях функционалы вида

$$\Omega(z) = \int\limits_T q(x)|z(x)|^p \psi(|z(x)|)\, dx, \quad z(x) \in D, \tag{4.6}$$

где $q(x), \psi(z)$ — некоторые заданные функции.

Теорема 4.3. *Предположим, что* $q(x) \geq q_0 = \mathrm{const} > 0$ — *непрерывная в* T *функция, а неотрицательная и непрерывная при* $z \geq 0$ *функция* $\psi(z)$ *такова, что при рассматриваемом числе* p *функция* $\omega(z) = (\psi(|z|) - 1)|z|^p$ *выпукла. Тогда функционал* (4.6) *будет равномерно выпуклым при* $p \geq 2$ *и квазиравномерно выпуклым при* $1 < p < 2$ *на* D.

Доказательство. Положим $f(x, y) = q(x)y^p\psi(y)$, $y \geq 0$, и пусть, например, $1 < p < 2$. Тогда для любых z_1, $z_2 \in \mathbb{R}$ из неравенства (3.3), а также из неравенства $q(x) \geq q_0$ и выпуклости функции $\omega(z) = (\psi(|z|) - 1)|z|^p$ следует оценка

$$\begin{aligned}
\frac{f(x, |z_1|) + f(x, |z_2|)}{2} &= q(x)\frac{|z_1|^p + |z_2|^p + |z_1|^p(\psi(|z_1|) - 1) + |z_2|^p(\psi(|z_2|) - 1)}{2} \\
&\geq q(x)\left|\frac{z_1 + z_2}{2}\right|^p + q_0\kappa(|z_1|^{2-p} + |z_2|^{2-p})(|z_1|^{p-1} - |z_2|^{p-1})^2 \\
&+ q(x)\left|\frac{z_1 + z_2}{2}\right|^p \left(\psi\left(\left|\frac{z_1 + z_2}{2}\right|\right) - 1\right) = q(x)\left|\frac{z_1 + z_2}{2}\right|^p \psi\left(\left|\frac{z_1 + z_2}{2}\right|\right) \\
&+ q_0\kappa(|z_1|^{2-p} + |z_2|^{2-p})(|z_1|^{p-1} - |z_2|^{p-1})^2 \\
&= f\left(x, \left|\frac{z_1 + z_2}{2}\right|\right) + q_0\kappa(|z_1|^{2-p} + |z_2|^{2-p})(|z_1|^{p-1} - |z_2|^{p-1})^2.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Таким образом, выполнено соотношение (4.2) с $\varphi(z) = z$, из которого, как указано в начале § 4, получается условие квазиравномерной выпуклости (3.7) функционала (4.5) на множестве $D = D_0 \cap D_\Omega$ с $\xi(t) = q_0\kappa t$. Эта теорема доказывается аналогично и для случая $p \geq 2$, если вместо (3.3) использовать неравенство (3.2). Соответственно меняется выкладка (4.7) и вместо (4.2) получается вариант соотношения (4.1). $\square$

Следствие 4.4. *Если функции* q, ψ *подчинены условиям теоремы* 4.3 *и, кроме того,* $\psi(y)$ *не убывает при* $y \geq 0$, *то производящая функция* $f(x, y) = q(x)y^p\psi(y)$ *функционала* (4.6) *имеет при* $y \geq 0$, $x \in T$ *свойства* (а)–(в) *из* § 2 *и поэтому функционал* (4.6) *обладает свойствами* ($\mathrm{A}1_w$), ($\mathrm{A}2_w$), *а также* H-*свойством.*

Действительно, свойство непрерывности (а) вытекает из условий теоремы 4.3, свойство выпуклости, фигурирующее в (б), следует из доказанной выше оценки (4.7) или ее аналога при $p \geq 2$. Монотонность производящей функции по аргументу y вытекает из ее вида и монотонности функции $\psi(y)$. Свойство (в) также оказывается справедливым. Например, установим его для $1 < p < 2$. Из (4.7) при $z_1 = y \geq 0, z_2 = 0$ с учетом неотрицательности $f(x,y)$ получим

$$\frac{f(x,y)+f(x,0)}{2} \geq f\left(x, \frac{y}{2}\right) + q_0\kappa y^p \geq q_0\kappa y^p,$$

т. е. $f(x,y) \geq 2q_0\kappa y^p - f(x,0) = 2q_0\kappa y^p$ $\forall y \geq 0$. Аналогично исследуется случай $p \geq 2$. Свойства ($\mathrm{A}1_w$), ($\mathrm{A}2_w$) функционала (4.6) следуют из (а)–(в) по теоремам 2.1, 2.2, а H-свойство — из результата теоремы 4.3 и теорем 3.3 и 3.7 с учетом ($\mathrm{A}1_w$). $\square$

В качестве конкретных примеров таких функционалов (4.6) можно указать следующие:

$$\Omega_4(z) = \int\limits_T q(x)|z(x)|^p \exp(|z(x)|)\,dx, \quad \Omega_5(z) = \int\limits_T q(x)|z(x)|^p \ln(e + |z(x)|)\,dx$$

и многие другие.

В заключение подытожим полученные результаты.

I. Функционалы вида (1.6) при выполнении условий (а)–(в) на функцию $f(x,y)$ удовлетворяют требованиям регуляризации ($\mathrm{A}1_w$), ($\mathrm{A}2_w$) для слабой сходимости в $L_p(T)$. Если, кроме того, функция $f(x,y)$ подчиняется условию (4.1) или (4.2), то при выполнении условий теоремы 3.11 этот функционал обладает H-свойством.

II. Функционалы вида (4.3) при выполнении условий теорем 3.11 и 4.1 также обладают свойствами ($\mathrm{A}1_w$), ($\mathrm{A}2_w$), равно как и H-свойством.

III. Если функции $q(x)$, $\psi(y)$, определяющие функционал (4.6), удовлетворяют условиям теоремы 4.3 и следствия 4.4, то этот функционал снова обладает свойствами ($\mathrm{A}1_w$), ($\mathrm{A}2_w$) и H-свойством.

Таким образом, все эти функционалы можно использовать в вариационной схеме тихоновской регуляризации, а также в таких вариационных регуляризующих алгоритмах, как обобщенный метод невязки и обобщенный метод квазирешений (см. [2–5]), для получения сильно сходящихся приближенных решений некорректных задач (1.1) в лебеговых пространствах $L_p(T)$, $p > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н, Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
3. *Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
4. *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
5. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
6. *Леонов А. С.* Обобщение метода максимальной энтропии для решения некорректных задач // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 4. С. 863–872.
7. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
9. *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: ГИТТЛ, 1956.
10. Функциональный анализ (Серия СМБ)/ Под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972.
11. *Amato U., Hughes W.* Maximum entropy regularization of Fredholm integral equations of the first kind // Inverse Problems. 1991. V. 7. P. 793–808.
12. *Eggermont P. P. B.* Maximum entropy regularization for Fredholm integral equations of the first kind // SIAM J. Math. Anal. 1993. V. 24, N 6. P. 1557–1576.

Статья поступила 19 февраля 2002 г.

Леонов Александр Сергеевич
Московский инженерно-физический институт, кафедра математики,
Каширское шоссе, 31, Москва 115409
leonov@illposed.msk.ru