Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 517.54

ТЕОРЕМА ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ЛАКУНАРНЫХ РЯДОВ

И. Р. Каюмов

Аннотация: Доказывается теорема искажения для конформных отображений единичного круга, для которых $\log f'$ представим в виде лакунарного ряда Адамара. Из этой теоремы следует, в частности, что такие конформные отображения должны быть «почти» ограниченными, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительная константа C_ε такая, что $|f(z)| \le C_\varepsilon(1-|z|)^{-\varepsilon}$.

Ключевые слова: конформные отображения, однолистные функции, лакунарные ряды, уравнение Левнера.

В современной геометрической теории функций комплексного переменного важную роль играют следующие три функции. Функция Кебе $k(z) = z/(1-z)^2$, отображающая круг D на плоскость с прямолинейным разрезом на вещественной оси, является экстремальной для большого количества задач теории однолистных функций. В частности, она дает точные верхнюю и нижнюю грани в оценках

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \le \left|\frac{f'(z)}{f'(0)}\right| \le \frac{1+r}{(1-r)^3}. \tag{1}$$

Здесь и всюду далее $r = |z|$. С функцией Кебе связана функция Жуковского $F(\zeta) = \zeta + 1/\zeta = 1/f(1/\zeta) + 2$, имеющая многочисленные приложения в задачах гидродинамики и теории крыла.

Другая замечательная функция

$$f(z) = \int_0^z \exp\left(\lambda \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}\right) dz, \tag{2}$$

где λ — малое положительное число, характеризует многие фрактальные свойства конформных отображений: граница $f(D)$ не является спрямляемой в окрестности каждой точки; хаусдорфова размерность образа границы круга D больше 1. Кроме того, для логарифма производной данной функции выполнен закон повторного логарифма с положительной константой в правой части.

Тот факт, что функция (2) будет однолистной при малых значениях λ, следует из работы [1].

Пусть λ_0 — максимальное положительное число, при котором функция (2) однолистна.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02–01–00168, 03–01–00015).

Х. Поммеренке [2] показал, что $\lambda_0 > 1/3$. Ф. Крецер [3] с использованием ЭВМ получил экспериментальные оценки

$$0.65 \le \lambda_0 \le 0.75.$$

Отметим, что верхнюю оценку можно считать достоверной, поскольку на рисунке, выполненном Крецером, неоднолистность функции (2) видна явно.

В настоящей работе мы исследуем поведение более общего класса функций, что повлечет за собой следующую оценку:

$$\lambda_0 \le \log 2 = 0.693\ldots.$$

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Предположим, что f конформно отображает круг D на односвязную область на плоскости и*

$$\log f' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{q^k},$$

где q — натуральное число, большее 1. Тогда для любого $\alpha > 0$ существует $C_\alpha < +\infty$ такое, что

$$|f'(z)| \le C_\alpha \frac{\log^{2+\alpha} \frac{2}{1-r}}{1-r}, \quad r < 1,$$

более того, при $q \ge 3$

$$|f'(z)| \le \frac{e^\pi}{1-r^2}, \quad r < 1.$$

Важность этой теоремы следует из того, что логарифмы производных однолистных функций образуют нетривиальное подмножество в классе Блоха, типичными представителями которого являются лакунарные ряды Адамара.

Покажем теперь, как из этой теоремы получить верхнюю оценку для λ_0. Для этого воспользуемся следующим результатом из [2 с. 189]: *Пусть последовательность комплексных чисел a_k ограничена, а последовательность целых чисел n_k обладает свойством $n_{k+1}/n_k \ge q > 1$. Тогда существует положительная константа $C < +\infty$, такая, что*

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k} - \sum_{k=0}^{m} a_k e^{i n_k \arg z} \right| \le C, \quad 1 - \frac{1}{n_{m-1}} \le r \le 1 - \frac{1}{n_m}. \tag{3}$$

Из (3) вытекает существование постоянной $c > 0$ такой, что для любого $r \in [0, 1)$ для функции (2) справедлива оценка

$$|f'(r)| \ge c \left(\frac{1}{1-r} \right)^{\lambda_0 / \log 2}.$$

Теперь оценка $\lambda_0 \le \log 2$ легко следует из теоремы.

Для доказательства теоремы нам понадобится

Лемма. *Предположим, что функция f однолистна, аналитична в единичном круге и нормирована условием $f'(0) = 1$. Тогда если $\cos \alpha \le 0$, то*

$$|f'(z)^{e^{i\alpha}}| \le \begin{cases} \exp(4 \arcsin r), & r < 1/\sqrt{2}, \\ e^\pi r^2/(1-r^2), & r \ge 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Доказательство. Эту лемму можно вывести из результатов работ [4–7]. Доказательство получается наиболее простым, если воспользоваться методом Левнера, который был применен Г. М. Голузиным для доказательства случая $\alpha = \pm\pi/2$ [8].

Лемму достаточно проверить для однолистных функций, которые имеют представление

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t f(z,t),$$

где $f(z,t)$ аналитична в круге $r < 1$, $|f(z,t)| < 1$, $f(0,t) = 0$ и $f'_z(0,t) = e^{-t}$. Кроме того, $f(z,t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f\frac{1+kf}{1-kf}, \tag{4}$$

удовлетворяющим начальному условию $f(z,0) = z$. Здесь $k = k(t)$ — произвольная функция, кусочно непрерывная в промежутке $0 \le t \le \infty$, по модулю равная единице.

Дифференцируя уравнение (4) по z, получаем

$$\frac{\partial f'}{\partial t} = f'\left(1 - \frac{2}{(1-kf)^2}\right), \quad f' = \frac{\partial f(z,t)}{\partial z}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \log|(f'(z)e^t)^{e^{i\alpha}}|}{\partial t} = 2\cos\alpha - 2\operatorname{Re}\frac{e^{i\alpha}}{(1-kf)^2}.$$

Чтобы полностью уложиться в схему Голузина [8, с. 142], достаточно показать, что при $|f| \le 1/\sqrt{2}$

$$|1-kf|^2\cos\alpha - 2\operatorname{Re}\frac{e^{i\alpha}|1-kf|^2}{(1-kf)^2} \le 2|f|\sqrt{1-|f|^2}.$$

Положим $u = \overline{kf}$. Нам нужно показать, что

$$\cos\alpha(|1-u|^2 - \cos(2\psi)) + \sin\alpha\sin(2\psi) \le 2\rho\sqrt{1-\rho^2} \tag{5}$$

при $\cos\alpha \le 0$, $r \le 1/\sqrt{2}$, где $\rho = |u|$, $\psi = \arg(1-u)$.

Поскольку $\sin(2\psi) \le 2\rho\sqrt{1-\rho^2}$ (см. [8, с. 143]) и $\cos\alpha \le 0$, можно считать, что $|1-u|^2 \le \cos(2\psi)$, т. е. $\cos^2(\psi) \ge (1+|1-u|^2)/2$. С другой стороны, по теореме косинусов

$$\cos\psi = \frac{|1-u|^2 + 1 - \rho^2}{2|1-u|}. \tag{6}$$

Таким образом,

$$\frac{(|1-u|^2+1-\rho^2)^2}{4|1-u|^2} \ge \frac{1+|1-u|^2}{2}.$$

Решая это неравенство относительно $|1-u|^2$, приходим к выводу, что

$$|1-u|^2 \le -\rho^2 + \sqrt{\rho^4 + (1-\rho^2)^2}. \tag{7}$$

Для доказательства (5) достаточно теперь показать, что

$$(|1-u|^2 - \cos(2\psi))^2 + \sin^2(2\psi) \le 4\rho^2(1-\rho^2).$$

Используя элементарные тригонометрические тождества, это неравенство приводим к виду

$$1+|1-u|^4-2|1-u|^2(2\cos^2\psi-1)\leq 4\rho^2(1-\rho^2). \tag{8}$$

Подставляя $\cos\psi$ из равенства (6) в неравенство (8), убеждаемся, что левая часть неравенства (8) равна $-\rho^4+2\rho^2+2\rho^2|1-u|^2$. В силу (7) эта величина не превосходит $2\rho^2-3\rho^4+2\rho^2\sqrt{(1-\rho)^2+\rho^4}$. Простые вычисления показывают, что последняя величина не превосходит $4\rho^2(1-\rho^2)$ при $\rho\leq 2/\sqrt{7}$, в частности, при $\rho\leq 1/\sqrt{2}$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

Рассмотрим случай $q=2$. Из теоремы Голузина [8, с. 154] следует, что для любого натурального n имеет место оценка

$$\min_{0\leq s<2^{n-1}}|f(ze^{i2\pi s/2^n})|\leq Ar/(1-r)^{1/2^{n-1}}, \tag{9}$$

где A — абсолютная константа. Отметим, что в самой теореме Голузина A зависит от n. Однако для рассматриваемого нами частного случая из доказательства Голузина вытекает, что A не зависит от n.

Далее, легко видеть, что

$$\left|\frac{f'(z)}{f'(ze^{i2\pi s/2^n})}\right|=\left|\frac{f'(z)}{f'(ze^{i2\pi s/2^n})}\right|=\left|\exp\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k-a_ke^{i2\pi s/2^{k-n}})z^{2^k}\right)\right|$$
$$\leq\sup_t\left|\exp\sum_{k=0}^{n}(a_k-a_ke^{i2\pi s/2^{k-n}})e^{it2^k}\right|.$$

Из неравенства (3) получаем, что

$$\left|\log f'((1-1/2^n)e^{it})-\sum_{k=0}^{n}a_ke^{i2^kt}\right|\leq C$$

для некоторой абсолютной константы $C<\infty$. Абсолютность этой константы следует из того, что коэффициенты логарифма производной произвольной однолистной функции ограничены (см., например, [9]). Далее в доказательстве в различных формулах буква C может означать различные константы.

Таким образом,

$$\sup_t\frac{\left|\exp\sum\limits_{k=0}^{n}a_ke^{it2^k}\right|}{\left|\exp\sum\limits_{k=0}^{n}a_ke^{i2\pi s/2^{k-n}}e^{it2^k}\right|}\leq C\sup_t\frac{|f'((1-1/2^n)e^{it})|}{|f'((1-1/2^n)e^{i2\pi s/2^n})|}.$$

Принимая во внимание оценки (1), заключаем, что последняя величина не превосходит $C2^{4n}$. Это означает, что

$$\left|\frac{f'(z)}{f'(ze^{i2\pi s/2^n})}\right|\leq C2^{4n}.$$

Теперь, используя (9), нетрудно показать, что

$$|f'(z)|\leq C2^{4n}/(1-r)^{1+1/2^{n-1}}.$$

Здесь мы еще дополнительно воспользовались теоремой искажения для логарифмической производной [8, с. 146]:

$$\left|\frac{zf'}{f}(z)\right| \le \frac{1+r}{1-r}, \quad z \in D.$$

Полагая $2^n = \log 1/(1-r)$, получаем

$$|f'(z)| \le \frac{C}{1-r}\log^4\frac{1}{1-r}.$$

Поэтому на линии уровня $r = 1 - 1/2^n$ имеем оценку $|f'(z)| \le 2^n n^4$. Проводя рассуждения снова с использованием этой оценки, приходим к равенству

$$|f'(z)| \le \frac{C}{1-r}\log^4\log\frac{1}{1-r}\log^2\frac{1}{1-r},$$

что и доказывает первое неравенство теоремы.

Перейдем теперь к случаю $q \ge 3$ и рассмотрим функцию

$$g(z) = f(ze^{i2\pi s/(q-1)})e^{-i2\pi s/(q-1)},$$

где s — произвольное натуральное число. Имеет место соотношение

$$\log g'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{i2\pi s q^k/(q-1)} z^{q^k} = e^{i2\pi s/(q-1)}\log f'(z).$$

Выберем s таким, что $\cos(2\pi s/(q-1)) \le 0$. Тогда $f' = g'^{e^{i\alpha}}$, где $\cos\alpha \le 0$. В силу леммы $|g'^{e^{i\alpha}}| \le e^{\pi}/(1-r^2)$, что и доказывает нашу теорему.

Как видно из (1) и (2), сама по себе однолистность или «лакунарность» не влечет оценки из теоремы.

Для случая $q > \exp(3\pi/4)$ теорема может быть усилена следующим образом.

Предложение. *Предположим, что f однолистна в D и $\log f' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$, $n_{k+1}/n_k \ge q > 2$. Тогда существует абсолютная постоянная $C < \infty$ такая, что*

$$|f'(z)| \le C\left(\frac{1}{1-r}\right)^{3\pi/(4\log q)}. \tag{10}$$

Доказательство. В общем случае для коэффициентов логарифма производной однолистных функций известна [9] оценка $|a_k| \le 4$. Однако в нашем частном случае эту оценку можно улучшить. Для этого рассмотрим коэффициенты шварциана

$$\{f, z\} = (f''/f')' - \frac{1}{2}(f''/f')^2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

Выразим коэффициенты a_k через b_k. Для этого запишем тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty} n_k(n_k-1)a_k z^{n_k-2} - \frac{1}{2}\sum_{l,s=0}^{\infty} n_s n_l a_s a_l z^{n_s+n_l-2} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

Так как $n_{k+1}/n_k > 2$, легко видеть, что равенство $n_s + n_l = n_k$ невозможно. Это значит, что

$$a_k n_k (n_k - 1) = b_{n_k - 2}.$$

В статье [10] показано, что $|b_k| \le \frac{3\pi}{4}(k+2)^2$.

Таким образом,

$$|a_k| \le \frac{3\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{n_k - 1}\right),$$

откуда

$$|\log f'| \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^{n_k} \le \frac{3\pi}{4}\sum_{k=0}^{\infty} r^{n_k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{n_k}}{n_k - 1}. \tag{11}$$

Очевидно, что третий ряд в (11) сходится равномерно в $\overline{D}$, а второй мажорируется рядом $\frac{3\pi}{4}\sum\limits_{k=0}^{\infty} r^{n_0 q^k}$. В силу (3) сумма этого ряда не превосходит

$$\frac{3\pi}{4}\frac{\log \frac{1}{1-r}}{\log q} + C$$

для некоторой абсолютной константы $C < +\infty$. Предложение доказано.

Заметим, что показатель $3\pi/(4\log q)$ в предложении не может быть меньше, чем $e/(2\log q)$. Это следует из того, что функция

$$f(z) = \int\limits_0^z \exp\left(\lambda \sum_{k=0}^{\infty} z^{q^k}\right) dz$$

при $\lambda = e/2 - O(1/q)$ является однолистной в единичном круге (см. [2]).

Возвращаясь к теореме, отметим, что аналогичный результат может быть доказан, если вместо целых чисел q рассматривать числа Пизо (см. [11, с. 180]), т. е. алгебраические числа, все сопряженные числа которых по модулю меньше единицы. А именно, теорема будет верна для лакунарных рядов $\sum a_k z^{n_k}$, где $n_k = [\lambda\theta^k]$. Здесь $[x]$ — означает целую часть x, θ — число Пизо, по модулю большее 1. В качестве примера приведем два числа Пизо θ_1 и θ_2, которые являются положительными корнями уравнений $x^3 - x - 1 = 0$ и $x^4 - x^3 - 1$ соответственно: $\theta_1 = 1.324\ldots$, $\theta_2 = 1.380\ldots$. Для доказательства этого результата можно воспользоваться важным свойством таких чисел [11, с. 180]: существует $\lambda > 0$ такое, что сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin^2(\pi\lambda\theta^k).$$

Это означает, что $\lambda\theta^k$ приближенно равно $[\lambda\theta^k]$ при больших k, что является решающим фактором для доказательства теоремы для чисел Пизо.

В заключение, хочу выразить благодарность Ф. Г. Авхадиеву и Х. Поммеренке за полезные замечания, способствовавшие улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Duren P. L., Shapiro H. S., Shields A. L.* Singular measures and domains not of Smirnov type // Duke Math. J. 1966. V. 33, N 2. P. 247–254.
2. *Pommerenke Ch.* Boundary behaviour of conformal maps. Berlin: Springer-Verl., 1992.

3. *Kraetzer Ph.* Algorithmische Methoden der konformen Abbildungen auf fraktale Gebiete. Berlin: Genehmigte Dissertation, 2000.

4. *Grad A.* Coefficient regions of schlicht functions // New York: Amer. Math. Soc., 1950. (Collouqium Publ.; 35).

5. *Дженкинс Дж.* Однолистные функции и конформные отображения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

6. *Александров И. А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.

7. *Александров И. А., Копанев С. А.* Область значений производной на классе голоморфных однолистных функций // Укр. мат. журн. 1970. Т. 5. С. 660–664.

8. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.; Л.: Гостехиздат, 1952.

9. *Авхадиев Ф. Г., Каюмов И. Р.* Оценки в классе Блоха и их обобщения // Докл. РАН. 1996. Т. 349, № 5. С. 583–585.

10. *Zemyan S. M.* On the Schwarzian coefficients of univalent functions // Bull. Austral. Math. Soc. 1992. V. 46, N 3. P. 391–400.

11. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.

Статья поступила 17 апреля 2003 г., окончательный вариант — 2 июля 2003 г.

Каюмов Ильгиз Рифатович
Казанский гос. университет, НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева, ул. Университетская, 17, Казань 420008
ikayumov@ksu.ru