Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 517.928.2

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

О. П. Германович, А. В. Малышев

Аннотация: Рассмотрена задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром E в степени q при производной. Исследована возможность использования для решения поставленной задачи метода регуляризации теории сингулярных возмущений, предложенного С. А. Ломовым. Показано, что при $q > 1$ применение процедуры метода регуляризации, изложенной в монографии С. А. Ломова, позволяет в классе безрезонансных решений построить только тривиальное решение поставленной задачи. Предложена и описана модификация процедуры, позволяющая построить нетривиальное решение поставленной задачи в пространстве безрезонансных решений.

Ключевые слова: сингулярность, возмущение, регуляризация.

Теория сингулярных возмущений имеет давнюю историю. Среди большого числа различных методов теории сингулярных возмущений особое место занимает предложенный С. А. Ломовым метод регуляризации [1]. В настоящее время метод регуляризации успешно развивается, а его идеи распространяются на новые классы сингулярно возмущенных задач. Ниже излагается применение метода регуляризации к одной из таких задач.

Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon^q \sum_{k=0}^{m-q} D_k \varepsilon^k \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{C}(t,\varepsilon)\mathbf{X}(t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}^0, \tag{1}$$

где $\mathbf{X}(t)$ — вектор-функция, $D_k \in \mathbf{R}$, $D_0 \neq 0$, $q \geq 1$, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, $\mathbf{C}(t,\varepsilon)$ — $n \times n$-матрица, непрерывная по t и являющаяся полиномом степени r относительно ε, т. е.

$$\mathbf{C}(t,\varepsilon) = \mathbf{C}_0(t) + \sum_{k=1}^{r} \mathbf{C}_k(t)\varepsilon^k, \tag{2}$$

$\mathbf{C}_k(t)$ — $n \times n$-матрица, непрерывная по t.

Используя (2), перепишем (1) так:

$$\mathbf{L}_\varepsilon \mathbf{X} \equiv \varepsilon^q \sum_{k=0}^{m-q} D_k \varepsilon^k \dot{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{C}_0(t)\mathbf{X}(t) - \sum_{k=1}^{r} \varepsilon^k \mathbf{C}_k(t)\mathbf{X}(t) = 0, \tag{3}$$

откуда предельным оператором будет $\mathbf{L}_0 \equiv \mathbf{C}_0(t)$.

Для решения задачи (1) воспользуемся методом регуляризации [1]. Пусть $\mathbf{b}_k(t)$ и $\lambda_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, — собственные векторы и собственные значения матрицы $\mathbf{C}_0(t)$ соответственно. Рассмотрим случай, когда спектр предельного оператора простой (используя соображения, изложенные в [1], можно распространить результаты и на другие случаи), а именно

$\lambda_k(t) \neq \lambda_j(t)$ при всех $t \in [0, a]$ и всех $k \neq j$, $k, j = \overline{1, n}$,
$\lambda_s(t) \neq 0$ при всех $t \in [0, a]$ и $s = \overline{1, n}$.

Следуя [1], введем $\mathbf{n}$ новых независимых переменных

$$t_i = \frac{1}{\varepsilon^q D_0} \int\limits_0^t \lambda_i(t)\, dt \equiv \varphi_i(t, \varepsilon). \tag{4}$$

Тогда в «расширенном» пространстве вместо (1) имеем следующую задачу Коши:

$$\mathbf{T}_\varepsilon \widetilde{\mathbf{X}} \equiv \varepsilon^q \sum_{k=0}^{m-q} D_k \varepsilon^k \left(\frac{\partial \widetilde{\mathbf{X}}}{\partial t} + \frac{1}{D_0 \varepsilon^q} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{X}}}{\partial t_i} \right) - \mathbf{C}_0(t) \widetilde{\mathbf{X}} - \sum_{k=1}^{r} \varepsilon^k \mathbf{C}_k(t) \widetilde{\mathbf{X}} = 0,$$
$$\widetilde{\mathbf{X}}(0, 0, \varepsilon) = \mathbf{X}^0, \tag{5}$$

где $\widetilde{\mathbf{X}} = \widetilde{\mathbf{X}}(t, t_i, i = \overline{1, n}, \varepsilon)$. Для предельного расширенного оператора $\mathbf{T}_0$ задача Коши такова:

$$\mathbf{T}_0 \mathbf{W} \equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t_i} - \mathbf{C}_0(t) \mathbf{W} = 0, \quad \mathbf{W}(0, 0) = \mathbf{X}^0. \tag{6}$$

Поскольку любое решение предельной задачи (6) принадлежит области определения расширенного оператора $\mathbf{T}_\varepsilon$, задача (5) является регулярной по ε при $\varepsilon \to 0$ и решение $\widetilde{\mathbf{X}}(t, t_i,\, i = \overline{1, n}, \varepsilon)$ можно искать в виде ряда

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \widetilde{\mathbf{X}}_j(t, t_i, i = \overline{1, n}). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, найдем следующую последовательность уравнений:

$$\mathbf{T}_0 \widetilde{\mathbf{X}}_p = \sum_{k=1}^{p} \mathbf{C}_k(t) \widetilde{\mathbf{X}}_{p-k} - \sum_{k=1}^{p} D_{k-q} \frac{\partial \widetilde{\mathbf{X}}_{p-k}}{\partial t} - \sum_{k=1}^{p} \frac{D_k}{D_0} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{X}}_{p-k}}{\partial t_i},\ p = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Здесь следует учитывать, что $\widetilde{\mathbf{X}}_s \equiv 0$ при $s < 0$, $D_s = 0$ при $s < 0$ и при $s > m - q$ и $\mathbf{C}_k \equiv 0$ при $k > r$.

Для каждого уравнения последовательности (8) ставится задача Коши так [1]:

$$\widetilde{\mathbf{X}}_0(0, 0) = \mathbf{X}^0, \quad \widetilde{\mathbf{X}}_p(0, 0) = 0, \quad p = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Следуя [1], введем в рассмотрение специальное конечномерное[1] гильбертово пространство, так называемое пространство безрезонансных решений, натянутое на элементы $\{\exp t_i \cdot \mathbf{b}_j(t)\}$, $i, j = \overline{1, n}$, и $\{\mathbf{b}_j(t)\}$, $j = \overline{1, n}$.

В этом пространстве искомые коэффициенты $\widetilde{\mathbf{X}}_p$ асимптотического ряда (7) запишутся в форме разложения по элементам пространства безрезонансных решений:

$$\widetilde{\mathbf{X}}_p(t, t_i, i = \overline{1, n}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}^{(p)}(t) \exp t_i \cdot \mathbf{b}_j(t) + \sum_{j=1}^{n} X_j^{(p)}(t) \mathbf{b}_j(t), \tag{10}$$

[1] Размерность пространства определяется количеством вводимых дополнительных независимых переменных, число которых равно количеству собственных значений предельного оператора $\mathbf{L}_0$. В рассматриваемом случае оно конечно.

где $X_{ij}^{(p)}(t)$ и $X_j^{(p)}(t)$ — искомые функции. Подставим (10) в (8), тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} X_{is}^{(p)}(t)(\lambda_i-\lambda_s)\exp t_i\cdot \mathbf{b}_s(t) - \sum_{s=1}^{n} X_s^{(p)}(t)\lambda_s \mathbf{b}_s(t)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\exp t_i\cdot \mathbf{b}_s(t)\left\{\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^{(p-k)}(t)\left[\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_j,\mathbf{b}_s^*\rangle - D_{k-q}\left\langle\frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial t},\mathbf{b}_s^*\right\rangle\right]\right\}$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\exp t_i\cdot \mathbf{b}_s(t)\left\{\sum_{k=1}^{p} D_{k-q}\frac{\partial X_{is}^{(p-k)}(t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{p}\frac{D_k}{D_0}\lambda_i X_{is}^{(p-k)}(t)\right\}$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\mathbf{b}_s(t)\left\{\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} X_{j}^{(p-k)}(t)\left[\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_j,\mathbf{b}_s^*\rangle - D_{k-q}\left\langle\frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial t},\mathbf{b}_s^*\right\rangle\right]\right\}$$
$$-\sum_{s=1}^{n}\mathbf{b}_s(t)\sum_{k=1}^{p} D_{k-q}\frac{\partial X_s^{(p-k)}(t)}{\partial t} \quad (11)$$

для $p=0,1,2,3\ldots$. Равенство (11) должно выполняться тождественно по t и для любого $p=0,1,2,3\ldots$. Следуя [1], приравняем нулю коэффициенты при элементах базиса $\mathbf{T}_0$, т. е. при $\exp t_i\cdot \mathbf{b}_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ $(s=i)$. Тогда для каждого $i=\overline{1,n}$ и $p=0,1,2\ldots$ имеем

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^{(p-k)}(t)\left[\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_j,\mathbf{b}_i^*\rangle - D_{k-q}\left\langle\frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial t},\mathbf{b}_i^*\right\rangle\right]$$
$$-\sum_{k=1}^{p} D_{k-q}\frac{\partial X_{ii}^{(p-k)}(t)}{\partial t} - \sum_{k=1}^{p}\frac{D_k}{D_0}\lambda_i X_{ii}^{(p-k)}(t) = 0. \quad (12)$$

Напомним, что (12) справедливо при условии $X_{ij}^{(l)}(t)\equiv 0$ для $l<0$, $D_s=0$ для $s<0$ и $s>m-q$ и $\mathbf{C}_s(t)\equiv 0$ при $s>r$.

Равенства (12), с одной стороны, представляют собой (для каждого p) n уравнений ($i=\overline{1,n}$), которые служат для вычисления $X_{ii}^{(p)}(t)$, и, с другой стороны, в совокупности являются последовательностью уравнений (для каждого $i=\overline{1,n}$) для вычисления $X_{ii}^{(p)}(t)$, $p=0,1,2,\ldots$. Что касается искомых функций $X_{ij}^{(l)}(t)$ при $i\neq j$ и $i,j=\overline{1,n}$ и $X_j^{(l)}(t)$, где $j=\overline{1,n}$, то они согласно [1] вычисляются посредством приравнивания коэффициентов левой и правой частей (11) при одноименных членах. Выполняя указанную процедуру, получим для $X_{is}^{(p)}(t)$ при $i\neq s$ и $i,s=\overline{1,n}$

$$X_{is}^{(p)}(t)(\lambda_i-\lambda_s) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^{(p-k)}(t)\left[\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_j,\mathbf{b}_s^*\rangle - D_{k-q}\left\langle\frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial t},\mathbf{b}_s^*\right\rangle\right]$$
$$-\sum_{k=1}^{p} D_{k-q}\frac{\partial X_{is}^{(p-k)}(t)}{\partial t} - \sum_{k=1}^{p}\frac{D_k}{D_0}\lambda_i X_{is}^{(p-k)}(t) = 0, \quad p=0,1,2,3, \quad (13)$$

для $X_s^{(p)}(t)$ при $s=\overline{1,n}$

$$-X_s^{(p)}(t)\lambda_s = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} X_{j}^{(p-k)}(t)\left[\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_j,\mathbf{b}_s^*\rangle - D_{k-q}\left\langle\frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial t},\mathbf{b}_s^*\right\rangle\right]$$
$$-\sum_{k=1}^{p} D_{k-q}\frac{\partial X_s^{(p-k)}(t)}{\partial t}, \quad p=0,1,2,3\ldots. \quad (14)$$

Заметим, что последовательности уравнений (13) и (14) предназначены соответственно для вычисления $X_{is}^{(p)}(t)$ при $i \neq s$ и $X_s^{(p)}(t)$ для каждого фиксированного $i = \overline{1,n}$ и конкретного $s = \overline{1,n}$ при $s \neq i$ через известные функции $X_{ij}^{(l)}(t)$ и $X_j^{(l)}(t)$ соответственно, где $j = \overline{1,n}$ $(l < p)$, поскольку $X_{ij}^{(l)}(t)$ и $X_j^{(l)}(t)$, входящие в правые части (13) и (14), должны быть уже известны как решения уравнений, предшествующих данному.

Остановимся на рассмотрении случая $q > 1$. Случай $q = 1$ подробно исследован в [1] и потому не представляет интереса. Что касается случая $q > 1$, то, как будет показано ниже, он имеет особенности и требует для построения нетривиального решения некоторой модификации метода регуляризации, поскольку применение к нему классической процедуры, изложенной в [1], позволяет построить лишь тривиальное решение.

Первоначально рассмотрим (14). Как следует из (14), для каждого $s = \overline{1,n}$ функция $X_s^{(p)}(t)$ вычисляется через $X_j^{(l)}(t)$, где $j = \overline{1,n}$ и $l < p$. Отсюда вытекает

Лемма 1. *Пусть $X_j^{(l)}(t) \equiv 0$ для некоторого p, всех $l < p$ и $j = \overline{1,n}$. Тогда $X_s^{(p)}(t) \equiv 0$ для всех $s = \overline{1,n}$.*

Доказательство. Поскольку $X_j^{(l)}(t) \equiv 0$ для $l \leq 0$ и $j = \overline{1,n}$ и по условию $\lambda_s(t) \neq 0$ для любого t и $s = \overline{1,n}$, из (14) непосредственно следует, что $X_s^{(p)}(t) \equiv 0$ для любого $p = 0, 1, 2, \dots$ и $s = \overline{1,n}$. Заметим, что этот результат является следствием того, что рассматриваемое уравнение (1) однородное. На существо предлагаемого метода факт однородности (1) не оказывает влияния.

Обратимся теперь к рассмотрению (12) и (13). Перепишем предварительно (12) и (13) для удобства так:

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_{ij}^{(p-k)}(t) \left[\left\langle \mathbf{C}_k \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_i^* \right\rangle - D_{k-q} \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial t}, \mathbf{b}_i^* \right\rangle \right] - \sum_{k=1}^{p} D_{k-q} \frac{\partial X_{ii}^{(p-k)}(t)}{\partial t}$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} X_{ii}^{(p-k)}(t) \left[\left\langle \mathbf{C}_k \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i^* \right\rangle - D_{k-q} \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial t}, \mathbf{b}_i^* \right\rangle - \frac{D_k}{D_0} \lambda_i \right] = 0, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (12^*)$$

$$X_{ij}^{(p)}(t)(\lambda_i - \lambda_j) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{n} X_{is}^{(p-k)}(t) \left[\left\langle \mathbf{C}_k \mathbf{b}_s, \mathbf{b}_j^* \right\rangle - D_{k-q} \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_s}{\partial t}, \mathbf{b}_j^* \right\rangle \right]$$
$$- \sum_{k=1}^{p} D_{k-q} \frac{\partial X_{ij}^{(p-k)}(t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{p} X_{ii}^{(p-k)}(t) \left[\left\langle \mathbf{C}_k \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j^* \right\rangle - D_{k-q} \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial t}, \mathbf{b}_j^* \right\rangle \right]$$
$$- \sum_{k=1}^{p} \frac{D_k}{D_0} \lambda_i X_{ij}^{(p-k)}(t), \quad i,j = \overline{1,n},\ i \neq j,\ p = 0, 1, 2, \dots. \qquad (13^*)$$

Из (12^*) и (13^*) непосредственно следует

Лемма 2. *Пусть $X_{ij}^{(l)}(t) \equiv 0$ для некоторого p и всех $l = \overline{0, p-1}$, где $i,j = \overline{1,n}$. Тогда $X_{ij}^{(p)}(t) \equiv 0$ для всех $i,j = \overline{1,n}$ и любого p.*

Условие леммы 2 при $q = 1$ не имеет места ни для какого p, поэтому процедура, устанавливаемая методом регуляризации [1], в этом случае позволяет, последовательно разрешая серию уравнений (12*), (13*), построить нетривиальное решение исходной задачи Коши. При $q > 1$ ситуация иная. В этом случае условие леммы 2 выполняется и, как будет показано ниже, единственное решение, которое удается построить при следовании процедуре, изложенной в [1], лишь тривиальное.

Итак, пусть $q > 1$. Выделим в серии уравнений (12*), (13*) для каждого фиксированного i по $q-1$ уравнений, которые соответствуют $p = \overline{1, q-1}$. (Правая часть уравнения, соответствующая $p = 0$, для рассматриваемого случая однородного уравнения (1) тождественно равна нулю.) Тогда (12*), (13*) запишутся так:

для $i = \overline{1, n}$

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1 j\neq i}^{n} X_{ij}^{(p-k)}(t)\big\langle \mathbf{C}_k \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_i^* \big\rangle + \sum_{k=1}^{p} X_{ii}^{(p-k)}(t) \left[\big\langle \mathbf{C}_k \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i^* \big\rangle - \frac{D_k}{D_0}\lambda_i\right] = 0, \quad (12')$$

для $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$

$$X_{ij}^{(p)}(t)(\lambda_i - \lambda_j) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{D_k}{D_0}\lambda_i X_{ij}^{(p-k)}(t)$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} \sum_{s=1 s\neq i}^{n} X_{is}^{(p-k)}(t)\big\langle \mathbf{C}_k \mathbf{b}_s, \mathbf{b}_j^* \big\rangle + \sum_{k=1}^{p} X_{ii}^{(p-k)}(t)\big\langle \mathbf{C}_k \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j^* \big\rangle. \quad (13')$$

Здесь учтено, что $p < q$, и поскольку $k \le p < q$, а $D_s = 0$ при $s < 0$, то $D_{k-q} = 0$.

Легко заметить, что согласно (13′) для любого $j = \overline{1, n}$ и $j \neq i$

$$X_{ij}^{(0)}(t) \equiv 0, \quad X_{ij}^{(1)}(t) = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}\big\langle \mathbf{C}_1 \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j^* \big\rangle X_{ii}^{(0)}(t). \quad (15)$$

Из (13′) непосредственно следует

Лемма 3. *Пусть $X_{ij}^{(p)}(t)$ для некоторого $p < q$ и $l = \overline{0, p-1}$, где $j = \overline{1, n}$ и $j \neq i$, является линейной комбинацией $X_{ii}^{(l)}(t)$. Тогда $X_{ij}^{(p)}(t)$ для любого $p < q$ будет линейной комбинацией $X_{ii}^{(l)}(t)$, где $l = \overline{0, p-1}$.*

Лемма 3 как следствие (13′) ограничена по p условием, для которого выписано (13′). Поскольку лемма 3 согласно (15) выполняется для $p = 1$, справедлива

Лемма 4. *Для любого $j = \overline{1, n}$, где $j \neq i$, и $p = \overline{0, q-1}$ величина $X_{ij}^{(p)}(t)$ является линейной комбинацией $X_{ii}^{(p-k)}(t)$, где $k = \overline{0, p}$.*

Справедливость леммы 4 очевидна и устанавливается путем последовательного разрешения (13′) относительно $X_{ij}^{(p)}(t)$ для $p = \overline{0, q-1}$. Используя лемму 4, после подстановки в (12′) вместо $X_{ij}^{(s)}(t)$ выражений для них в форме линейной комбинации $X_{ii}^{(s-k)}(t)$, где $k = \overline{0, s}$, получим, что каждое из $q-1$ уравнений последовательности (12′) (i фиксировано, а $p = \overline{0, q-1}$) является линейной комбинацией $X_{ii}^{(p-k)}(t)$, где $k = \overline{0, p}$. В силу изложенного выше система первых $q-1$ уравнений последовательности (12*) имеет для каждого i следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{p} h_k(t) X_{ii}^{(p-k)}(t) = 0, \quad p = \overline{1, q-1}. \quad (16)$$

Здесь через $h_k(t)$ обозначены коэффициенты — известные функции от t, отличные от тождественного нуля. Поскольку коэффициенты $h_k(t)$ зависят только от индекса k, в системе (16) содержится только $q-1$ различных коэффициентов $h_k(t)$, что существенно для дальнейшего. Так как система (16) однородная, а коэффициенты ее суть известные функции от t, отличные от нуля, то система (16) имеет единственное, тривиальное решение

$$X_{ii}^{(p)}(t) \equiv 0. \tag{17}$$

Таким образом, справедливо

Утверждение. *При $q > 1$ применение для решения задачи Коши* (1) *процедуры, изложенной в* [1], *позволяет построить в классе безрезонансных решений вида* (10) *только тривиальное решение.*

На основе детального анализа систем ($12'$) и ($13'$) в [2] для частного случая была предложена модификация процедуры метода регуляризации и дано ее описание. Она позволила преодолеть затруднения, возникшие при применении процедуры, изложенной в [1], к решению задачи Коши (1) в случае $q > 1$. Сущность предлагаемого метода состоит в следующем.

Помимо t_i, где $i = \overline{1,n}$ (см. (4)), которые теперь для единообразия в обозначениях запишем так:

$$t_{qi} = \frac{1}{D_0\varepsilon^q}\int\limits_0^t \lambda_i(\theta)\,d\theta, \quad i = \overline{1,n}, \tag{18}$$

введем дополнительно $n(q-1)$ новых нерегуляризирующих независимых переменных

$$t_{ri} = \frac{1}{D_0\varepsilon^r}\int\limits_0^t \mu_{ri}(\theta)\,d\theta, \quad i = \overline{1,n},\ r = \overline{1,q-1}. \tag{19}$$

Здесь $\mu_{ri}(\theta)$ — произвольные функции, которые доопределяются в ходе построения решения. Далее, следуя [1], вместо $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t,\varepsilon)$ введем новую искомую «расширенную» функцию $\widetilde{\mathbf{X}} = \widetilde{\mathbf{X}}(t, t_{si}, i = \overline{1,n}, s = \overline{1,q}, \varepsilon)$, которая является теперь функцией $nq+1$ независимых переменных. Вычислим

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t,\varepsilon) = \frac{\partial\widetilde{\mathbf{X}}}{\partial t} + \frac{1}{D_0}\sum_{r=1}^{q-1}\frac{1}{\varepsilon^r}\sum_{i=1}^{n}\mu_{ri}(t)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{X}}}{\partial t_{ri}} + \frac{1}{D_0\varepsilon^q}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{X}}}{\partial t_{qi}}.$$

Тогда для нового «расширенного» оператора $\mathbf{T}_\varepsilon$ имеем вместо (5) следующую задачу Коши:

$$\begin{gathered}\mathbf{T}_\varepsilon\widetilde{\mathbf{X}} \equiv \varepsilon^q\sum_{k=0}^{m-q}D_k\varepsilon^k\left(\frac{\partial\widetilde{\mathbf{X}}}{\partial t} + \frac{1}{D_0\varepsilon^q}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{X}}}{\partial t_{qi}}\right) \\ + \varepsilon^q\sum_{k=0}^{m-q}\frac{D_k}{D_0}\varepsilon^k\sum_{r=1}^{q-1}\frac{1}{\varepsilon^r}\sum_{i=1}^{n}\mu_{ri}(t)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{X}}}{\partial t_{ri}} - \mathbf{C}_0(t)\widetilde{\mathbf{X}} - \sum_{k=1}^{r}\varepsilon^k\mathbf{C}_k(t)\widetilde{\mathbf{X}} = 0, \\ \widetilde{\mathbf{X}}(0,0,\varepsilon) = \mathbf{X}^0.\end{gathered} \tag{20}$$

Введение нерегуляризирующих переменных не только не меняет предельного «расширенного» оператора $\mathbf{T}_0$, который, как и ранее, имеет вид

$$\mathbf{T}_0 \equiv \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\frac{\partial}{\partial t_{qi}} - \mathbf{C}_0(t),$$

но и не вносит каких-либо коренных изменений в существо метода регуляризации, так что метод регуляризации в основных своих чертах сохраняется прежним. Это и дает право называть предлагаемую методику *модифицированным методом регуляризации.*

Поскольку решение предельной задачи принадлежит, как и ранее, области определения «расширенного» оператора $\mathbf{T}_\varepsilon$, решение (20) допускает представление в виде

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \widetilde{\mathbf{X}}_j(t, t_{si}\, i = \overline{1,n}, s = \overline{1,q}). \tag{7*}$$

Подставляя (7*) в (20) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующую последовательность уравнений:

$$\mathbf{T}_0\widetilde{\mathbf{X}}_p = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{C}_k(t)\widetilde{\mathbf{X}}_{p-k} - \sum_{k=q}^{m} D_{k-q}\frac{\partial \widetilde{\mathbf{X}}_{p-k}}{\partial t} - \sum_{k=1}^{m-q} \frac{D_k}{D_0}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\frac{\partial \widetilde{\mathbf{X}}_{p-k}}{\partial t_{qi}}$$
$$- \sum_{k=0}^{m-q}\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{q-1}\frac{D_k}{D_0}\mu_{ri}(t)\frac{\partial \widetilde{\mathbf{X}}_{p-[k+(q-r)]}}{\partial t_{ri}}, \quad p = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Поскольку $\widetilde{\mathbf{X}}_s \equiv 0$ при $s < 0$, $D_s = 0$ при $s < 0$ и при $s > m-q$ и, наконец, $\mathbf{C}_k \equiv 0$ при $k > r$, полученную последовательность можно переписать окончательно так:

$$\mathbf{T}_0\widetilde{\mathbf{X}}_p = \sum_{k=1}^{p} \mathbf{C}_k(t)\widetilde{\mathbf{X}}_{p-k} - \sum_{k=1}^{p} D_{k-q}\frac{\partial \widetilde{\mathbf{X}}_{p-k}}{\partial t} - \sum_{k=1}^{p} \frac{D_k}{D_0}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\frac{\partial \widetilde{\mathbf{X}}_{p-k}}{\partial t_{qi}}$$
$$- \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{q-1}\frac{D_{k-(q-r)}}{D_0}\mu_{ri}(t)\frac{\partial \widetilde{\mathbf{X}}_{p-k}}{\partial t_{ri}}, \quad p = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{21}$$

Здесь учтено, что $\widetilde{\mathbf{X}}_s \equiv 0$ при $s < 0$, $D_s = 0$ при $s < 0$ и при $s > m - q$ и $\mathbf{C}_k \equiv 0$ при $k > r$.

Для каждого уравнения последовательности (21) ставится задача Коши [1]

$$\widetilde{\mathbf{X}}_0(0,0) = \mathbf{X}^0, \quad \widetilde{\mathbf{X}}_p(0,0) = 0, \quad p = 1, 2, \ldots.$$

Решение (21) будем искать, как и в [1], в пространстве безрезонансных решений, т. е. в форме

$$\widetilde{\mathbf{X}}_p(t, t_{si}, i = \overline{1,n}, s = \overline{1,q}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \widetilde{X}_{ij}^{(p)} \exp\, t_{qi}\,\mathbf{b}_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{X}_j^{(p)}\mathbf{b}_j(t), \tag{22}$$

с той лишь разницей, что, поскольку введены дополнительно $(q-1)n$ независимых переменных, в определении $\widetilde{X}_{ij}^{(p)}$ и $\widetilde{X}_j^{(p)}$ сохраняется значительный произвол. Для устранения этого произвола доопределим $\widetilde{\mathbf{X}}_p$ специальным образом, сохраняя при этом структуру решения. Для достижения желаемого результата доопределим скалярные функции $\widetilde{X}_{ij}^{(p)}$, входящие в (22), так:

$$\widetilde{X}_{ij}^{(p)} = X_{ij}^{(p)}(t)\prod_{r=1}^{q-1}\exp t_{ri} \quad \text{для всех } i = \overline{1,n}. \tag{23}$$

Относительно $\widetilde{X}_j^{(p)}$, как и прежде, будем полагать, что

$$\widetilde{X}_j^{(p)} = X_j^{(p)}(t). \tag{24}$$

Итак, модифицированный метод регуляризации имеет две отличительные особенности.

Первая состоит в том, что вводится дополнительно $(q-1)n$ новых независимых нерегуляризирующих переменных с произвольными функциями $\mu_{ri}(t)$, доопределяемыми в ходе построения решений.

Вторая состоит в том, что предлагается специальная форма представления решения, сохраняющая, с одной стороны, его структуру, которая регламентируется требованием принадлежности решения пространству безрезонансных решений, и, с другой стороны, специальным образом доопределяющая коэффициенты $\widetilde{X}_{ij}^{(p)}$ с тем, чтобы устранить произвол, возникший в связи с введением дополнительных независимых переменных.

Продолжим построения. Подставим (22) с учетом (23) и (24) в (21). Тогда

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} X_{is}^{(p)}(\lambda_i(t)-\lambda_s(t))\exp\left(\sum_{r=1}^{q-1} t_{ri}\right)\exp t_{qi}\mathbf{b}_s(t) - \sum_{s=1}^{n} X_s^{(p)}\lambda_s(t)\mathbf{b}_s(t) \\
= \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\exp\left(\sum_{r=1}^{q-1} t_{ri}\right)\exp t_{qi}\mathbf{b}_s(t) \\
\times \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^{(p-k)}\left[\left\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_s^*\right\rangle - D_{k-q}\left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial t}, \mathbf{b}_s^*\right\rangle\right] \\
- \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\exp\left(\sum_{r=1}^{q-1} t_{ri}\right)\exp t_{qi}\mathbf{b}_s(t)\sum_{k=1}^{p}\left[D_{k-q}\frac{\partial X_{is}^{(p-k)}}{\partial t} + \frac{D_k}{D_0}\lambda_i(t)X_{is}^{(p-k)}\right] \\
- \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\exp\left(\sum_{r=1}^{q-1} t_{ri}\right)\exp t_{qi}\mathbf{b}_s(t)\sum_{k=1}^{p} X_{is}^{(p-k)}\sum_{l=1}^{q-1}\frac{D_{k-(q-l)}}{D_0}\mu_{li}(t) \\
+ \sum_{s=1}^{n}\mathbf{b}_s(t)\sum_{k=1}^{p}\left\{\sum_{j=1}^{n} X_j^{(p-k)}\left[\left\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_s^*\right\rangle - D_{k-q}\left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial t}, \mathbf{b}_s^*\right\rangle\right] - D_{k-q}\frac{\partial X_s^{(p-k)}}{\partial t}\right\}.
\end{gathered} \tag{25}$$

Как и ранее, равенство (25) должно выполняться тождественно по t и для любого $p = 0, 1, 2, \ldots$. Поэтому, следуя [1], первоначально приравняем к нулю коэффициенты в правой части (25) при элементах ядра $\mathbf{T}_0$, т. е. при $\exp t_{qi}\mathbf{b}_i(t)$, где $i = \overline{1, n}$ и $i = s$. Тогда получим

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^{(p-k)}\left[\left\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_i^*\right\rangle - D_{k-q}\left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial t}, \mathbf{b}_i^*\right\rangle\right] \\
- \sum_{k=1}^{p}\left\{D_{k-q}\frac{\partial X_{ii}^{(p-k)}}{\partial t} + X_{ii}^{(p-k)}\left[\frac{D_k}{D_0}\lambda_i(t) + \sum_{l=1}^{q-1}\frac{D_{k-(q-l)}}{D_0}\mu_{li}(t)\right]\right\} = 0,
\end{gathered} \tag{26}$$

где $i = \overline{1, n}$ при $i = s$ и $p = 0, 1, 2, \ldots$.

Далее, приравнивая коэффициенты левой и правой частей (25) при одноименных членах, найдем для $X_{is}^{(p)}$, где $i, s = \overline{1,n}$ при $i \neq s$, и $p = 0, 1, 2, \ldots,$

$$X_{is}^{(p)}(\lambda_i(t) - \lambda_s(t)) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^{(p-k)}\left[\left\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_s^*\right\rangle - D_{k-q}\left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial t}, \mathbf{b}_s^*\right\rangle\right]$$
$$- \sum_{k=1}^{p}\left\{D_{k-q}\frac{\partial X_{is}^{(p-k)}}{\partial t} + X_{is}^{(p-k)}\left[\frac{D_k}{D_0}\lambda_i(t) + \sum_{l=1}^{q-1}\frac{D_{k-(q-l)}}{D_0}\mu_{li}(t)\right]\right\} = 0, \quad (27)$$

для $X_s^{(p)}$, где $s = \overline{1,n}$,

$$- X_s^{(p)}\lambda_s(t) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} X_j^{(p-k)}\left[\left\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_s^*\right\rangle - D_{k-q}\langle \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial t}, \mathbf{b}_s^*\rangle\right]$$
$$- \sum_{k=1}^{p} D_{k-q}\frac{\partial X_s^{(p-k)}}{\partial t}, \quad p = 0, 1, 2, 3 \ldots. \quad (28)$$

Напомним, что (26)–(28) справедливы при условии $X_{ij}^{(l)}(t) \equiv 0$ для $l < 0$, $D_s = 0$ для $s < 0$ и $s > m - q$, $\mathbf{C}_s(t) \equiv 0$ при $s > r$.

Перепишем (26) и (27) так:

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} X_{ij}^{(p-k)}\left[\left\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_i^*\right\rangle - D_{k-q}\left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial t}, \mathbf{b}_i^*\right\rangle\right] - \sum_{k=1}^{p} D_{k-q}\frac{\partial X_{ii}^{(p-k)}}{\partial t}$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} X_{ii}^{(p-k)}\left[\left\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i^*\right\rangle - D_{k-q}\left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial t}, \mathbf{b}_i^*\right\rangle - \frac{D_k}{D_0}\lambda_i(t) - \sum_{r=1}^{q-1}\frac{D_{k-r}}{D_0}\mu_{q-r,i}(t)\right] = 0, \quad (26^*)$$

где $i = \overline{1,n}$ и $p = 0, 1, 2, \ldots,$

$$X_{ij}^{(p)}(\lambda_i(t) - \lambda_j(t)) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1, s\neq i}^{n} X_{is}^{(p-k)}\left[\left\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_s, \mathbf{b}_j^*\right\rangle - D_{k-q}\left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_s}{\partial t}, \mathbf{b}_j^*\right\rangle\right]$$
$$- \sum_{k=1}^{p} D_{k-q}\frac{\partial X_{ij}^{(p-k)}}{\partial t} - \sum_{k=1}^{p} X_{ij}^{(p-k)}\left[\frac{D_k}{D_0}\lambda_i(t) + \sum_{r=1}^{q-1}\frac{D_{k-r}}{D_0}\mu_{q-r,i}(t)\right]$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} X_{ii}^{(p-k)}\left[\left\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j^*\right\rangle - D_{k-q}\left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial t}, \mathbf{b}_j^*\right\rangle\right], \quad (27^*)$$

где $i, j = \overline{1,n}$ при $i \neq j$ и $p = 0, 1, 2, \ldots.$

Для $p < q$, учитывая, что $D_s = 0$ при $s < 0$, найдем

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} X_{ij}^{(p-k)}\left\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_i^*\right\rangle$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} X_{ii}^{(p-k)}\left[\left\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i^*\right\rangle - \frac{D_k}{D_0}\lambda_i(t) - \sum_{r=1}^{q-1}\frac{D_{k-r}}{D_0}\mu_{q-r,i}(t)\right] = 0, \quad (26^{**})$$

где $i = \overline{1,n}$ и $p = 0, 1, 2, \ldots,$

$$X_{ij}^{(p)}(\lambda_i(t) - \lambda_j(t)) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1, s\neq i}^{n} X_{is}^{(p-k)}\left\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_s, \mathbf{b}_j^*\right\rangle + \sum_{k=1}^{p} X_{ii}^{(p-k)}\left\langle \mathbf{C}_k\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j^*\right\rangle$$
$$- \sum_{k=1}^{p} X_{ij}^{(p-k)}\left[\frac{D_k}{D_0}\lambda_i(t) + \sum_{r=1}^{q-1}\frac{D_{k-r}}{D_0}\mu_{q-r,i}(t)\right], \quad (27^{**})$$

где $i, j = \overline{1, n}$ при $i \neq j$ и $p = 0, 1, 2, \dots$.

Проанализируем полученные выше выражения (26)–(28). Равенство (28) совпадает с ранее найденным соотношением (14). Поэтому все выводы, сделанные выше относительно $X_s^{(p)}$, сохраняют свою силу. Что касается (26) и (27), то они отличаются от аналогичных уравнений (12) и (13) дополнительным слагаемым, содержащим произвольные функции, произвол в выборе которых в дальнейшем может быть использован для преодоления затруднений, возникающих при применении метода регуляризации по схеме, предложенной в [1].

Из сопоставления (12), (13) с (26), (27) следует, что основные выводы, сделанные относительно свойств решений (12) и (13) $X_{ii}^{(p)}(t)$ и $X_{ij}^{(p)}(t)$ $(i \neq j)$ сохраняют свою силу. В частности, остаются справедливыми леммы 2–4. Используя лемму 4, после подстановки в (26^{**}) вместо $X_{ij}^{(s)}(t)$ $(i \neq j)$ выражений для них в виде линейной комбинации $X_{ii}^{(s-k)}(t)$, $k = \overline{1, s}$, получим, что каждое уравнение последовательности, содержащей $q-1$ уравнений из серии уравнений (26^{**}) (для $p = \overline{1, q-1}$ и каждого $i = \overline{1, n}$), является линейной комбинацией $X_{ii}^{(p-k)}(t)$, $k = \overline{1, p}$. Таким образом, первые $q-1$ уравнений $(p = \overline{1, q-1})$ серии (26^{**}) для каждого i можно записать так:

$$\sum_{k=1}^{p} h_k(t, \mu_{q-r,i}(t), \, r = \overline{1, k}) X_{ii}^{(p-k)} = 0, \quad p = \overline{1, q-1}. \tag{29}$$

Здесь через $h_k(t, \mu_{q-r,i}(t), \, r = \overline{1, k})$ обозначены коэффициенты, не зависящие от индекса p, но содержащие произвольные функции $\mu_{q-r,i}(t)$, $r = \overline{1, q-1}$. Из рассмотрения системы (29) следует, что это однородная система $q-1$ линейных уравнений относительно $X_{ii}^{(p-k)}(t)$, где $p - k = \overline{0, q-2}$. Поскольку $h_k(t, \mu_{q-r,i}(t), \, r = \overline{1, k})$ не зависят от p, а матрица коэффициентов системы треугольная, система имеет решение при произвольных $X_{ii}^{(p-k)}(t)$ тогда и только тогда, когда коэффициенты системы $h_p(t, \mu_{q-r,i}(t), \, r = \overline{1, p})$ равны нулю тождественно по t. Наличие произвола в выборе $\mu_{q-r,i}(t)$ позволяет обеспечить выполнение этого требования. Справедлива

Теорема. *Однородная система линейных алгебраических уравнений* (29) *имеет решение при произвольных* $X_{ii}^{(p-k)}(t)$, $p - k = \overline{0, q-2}$, *тогда и только тогда, когда* $\mu_{q-r,i}(t)$, $r = \overline{1, q-1}$, *являются решением системы* $q-1$ *неоднородных алгебраических уравнений*

$$h_p(t, \mu_{q-r,i}(t), \, r = \overline{1, p}) = 0, \quad p = \overline{1, q-1}. \tag{30}$$

Доказательство. Так как коэффициенты (29) зависят только от k и не зависят от индекса p, система (29) содержит только $q-1$ различных коэффициентов, в качестве которых можно выбрать, например, коэффициенты при $X_{ii}^{(0)}(t)$, т. е. $h_p(t, \mu_{q-r,i}(t), \, r = \overline{1, p})$. Таким образом, для обеспечения разрешимости (29) при произвольных $X_{ii}^{(p-k)}(t)$ необходимо и достаточно выполнения условия $h_p(t, \mu_{q-r,i}(t), \, r = \overline{1, p}) = 0$, где $p = \overline{1, q-1}$, которое представляет собой систему $q-1$ неоднородных алгебраических уравнений относительно $\mu_{q-r,i}(t)$, $r = \overline{1, q-1}$. Поскольку в (26^{**}) и (27^{**}) величина D_{k-r} является множителем при $\mu_{q-r,i}(t)$, а $D_s = 0$ при $s < 0$, то $h_l(t, \mu_{q-r,i}(t), \, r = \overline{1, l})$ содержит l различных искомых функций $\mu_{q-r,i}(t)$, $r = \overline{1, l}$, причем искомая функция $\mu_{q-l,i}(t)$ в $h_l(t, \mu_{q-r,i}(t), \, r = \overline{1, l})$ входит линейно. Отсюда следует, что система

(30) однозначно разрешима относительно $\mu_{q-r,i}(t)$, $r=\overline{1,q-1}$. Искомые функции $\mu_{q-r,i}(t)$, $r=\overline{1,q-1}$, определяются путем последовательного разрешения неоднородных алгебраических уравнений $h_l(t,\mu_{q-r,i}(t),\ r=\overline{1,l})=0$, линейных относительно вычисляемой искомой функции $\mu_{q-l,i}(t)$.

Итак, с учетом равенств (30), составленных для доопределения $\mu_{q-r,i}(t)$, $r=\overline{1,q-1}$, уравнения последовательностей (26) и (27) с $p=\overline{1,q-1}$ выполняются тождественно по t при произвольных $X_{ii}^{(s)}(t)$, $s=\overline{0,q-2}$, уравнение, соответствующее $p=q$, представляет собой линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $X_{ii}^{(0)}(t)$, каждое последующее уравнение (26), (27), соответствующее $p>q$, с учетом всех предшествующих равенств является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка относительно $X_{ii}^{(p-q)}(t)$, коэффициенты которого — известные функции t. Таким образом, описанная выше модификация метода регуляризации позволяет построить нетривиальное решение задачи Коши [1] при $q>1$. При этом начиная с $p=q$ и с учетом (30) последовательность уравнений (26), (27), как и в [1], разрешается путем последовательного интегрирования линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно $X_{ii}^{(p-q)}(t)$. В [2] рассмотрен пример для случая $q=4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
2. *Баирова Н. К., Германович О. П., Субботин С. В.* Асимптотическое интегрирование одной сингулярно возмущенной задачи управления энергетическими объектами: Докл. юбилейной НТК СЗПИ. СПб.: СЗПИ, 2000. С. 117–122.

Статья поступила 14 ноября 2001 г., окончательный вариант — 14 мая 2003 г.

Германович Олег Пантелеймонович
Северо-западный гос. заочный технический университет,
ул. Миллионная, 5, Санкт-Петербург 191186
gero@online.ru,

Малышев Александр Владимирович
ОАО Федеральная сетевая компания,
филиал: магистральные электрические сети Северо-Запада,
ул. Курчатова, 1, Санкт-Петербург 194223
mes11@mes-sz.spb.ru