Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 517.962.2

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

А. Ю. Александров, А. П. Жабко

Аннотация: Рассматривается некоторый класс систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Проводится коррекция разностных схем, соответствующих исследуемым уравнениям, для обеспечения согласованности между дифференциальными и разностными системами в смысле устойчивости нулевого решения. Получены условия, при выполнении которых возмущения не нарушают асимптотической устойчивости решений разностных систем.

Ключевые слова: устойчивость разностных систем, функции Ляпунова, консервативные численные методы, устойчивость по нелинейному приближению.

1. В работе предлагается способ построения разностных схем для одного класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот способ обеспечивает согласованность между дифференциальными и разностными уравнениями в смысле устойчивости нулевого решения. С помощью метода функций Ляпунова определяются условия, при выполнении которых возмущения не нарушают асимптотической устойчивости решений построенных разностных систем.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = \frac{\partial W}{\partial X} + G(X)X. \tag{1}$$

Здесь X — n-мерный вектор, функция $W(X)$ определена и непрерывно дифференцируема при всех $X \in E^n$, $G(X)$ — заданная и непрерывная при $X \in E^n$ кососимметрическая матрица ($G^*(X) = -G(X)$). В соответствии с теоремой о канонической структуре силовых полей [1, с. 110–114] автономная система дифференциальных уравнений с непрерывно дифференцируемыми правыми частями всегда может быть представлена в виде (1). При этом функция $W(X)$ является потенциалом силового поля, а вектор $H(X) = G(X)X$ определяет соленоидальную (гироскопическую) составляющую поля, которая не производит работы при перемещении вдоль радиус-вектора: $X^*H(X) \equiv 0$.

Будем считать, что $W(X)$ — отрицательно-определенная однородная порядка $\mu+1$ функция, $\mu > 1$. Тогда система (1) имеет нулевое решение, которое является асимптотически устойчивым в целом, причем в качестве функции Ляпунова можно выбрать функцию

$$V(X) = \|X\|^2, \tag{2}$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора.

Рассмотрим соответствующую уравнениям (1) разностную систему

$$Y(k+1) = Y(k) + h\left(\frac{\partial W(Y(k))}{\partial X} + G(Y(k))Y(k)\right). \tag{3}$$

Здесь $Y(k) \in E^n$, h — шаг дискретизации ($h > 0$), целочисленный аргумент k принимает значения $k = 0, 1, \ldots$.

Пусть G — постоянная матрица, $G \neq 0$. Тогда, применяя теорему о неустойчивости по линейному приближению [2, с. 94–96], получаем, что при всех $h > 0$ нулевое решение уравнений (3) неустойчиво.

Таким образом, для любого сколь угодно малого шага дискретизации асимптотически устойчивой системе дифференциальных уравнений (1) может соответствовать неустойчивая разностная система.

В работах [1, 3–5] исследовалась проблема построения консервативных численных методов интегрирования систем дифференциальных уравнений, т. е. таких методов, которые учитывают специфику изучаемых систем и сохраняют их качественные характеристики. В частности, рассматривалась задача о сохранении интегралов движения при численном интегрировании дифференциальных уравнений. Для ее решения В. И. Зубовым были разработаны модификации известных разностных схем [1, 4]. Указанные модификации осуществляются путем введения управлений в процессе вычислений. При этом значения управляющих параметров на каждом шаге интегрирования определяются из условий сохранения заданных интегралов. В настоящей статье данный подход используется для корректировки разностной схемы (3), соответствующей дифференциальным уравнениям (1).

2. Наряду с системой (1) рассмотрим систему
$$\dot{X} = G(X)X, \tag{4}$$
для которой функция (2) является первым интегралом. Построим численный метод интегрирования уравнений (4), сохраняющий этот интеграл.

В соответствии с подходом, разработанным в [1, с. 193, 194], имеем
$$Y(k+1) = Y(k) + hG(Y(k))Y(k) + u(h, Y(k))Y(k).$$
Здесь скалярное управление $u(h, Y(k))$ определяется из условия $\|Y(k+1)\|^2 = \|Y(k)\|^2$. Получим, что для любого $\delta > 0$ существует число $h_0 > 0$ такое, что в области
$$0 < h < h_0, \quad \|X\| < \delta \tag{5}$$
функцию $u(h, X)$ можно выбрать в виде
$$u(h, X) = \begin{cases} 0, & \text{если } X = 0, \\ -1 + \sqrt{1 - (h\|G(X)X\|/\|X\|)^2}, & \text{если } X \neq 0. \end{cases}$$
При этом для всех h и X, удовлетворяющих условиям (5), справедлива оценка $|u(h, X)| \leq bh^2$, где b — положительная постоянная.

Далее с помощью найденного управления проводим коррекцию разностной схемы (3), соответствующей уравнениям (1):
$$Y(k+1) = Y(k) + h\left(\frac{\partial W(Y(k))}{\partial X} + G(Y(k))Y(k)\right) + u(h, Y(k))Y(k). \tag{6}$$

Теорема 1. *При достаточно малом h нулевое решение системы* (6) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. В качестве функции Ляпунова выбираем функцию (2). Рассмотрим ее приращение на решениях уравнений (6). Имеем
$$\Delta V = V(Y(k+1)) - V(Y(k)) = 2h(\mu + 1)(1 + u(h, Y(k)))W(Y(k))$$
$$+ 2h^2 \left(\frac{\partial W(Y(k))}{\partial X}\right)^* G(Y(k))Y(k) + h^2 \left\|\frac{\partial W(Y(k))}{\partial X}\right\|^2.$$

Учитывая отрицательную определенность и однородность функции $W(X)$, получаем, что при $0 < h < h_0$, $\|Y(k)\| < \delta$ выполнено соотношение

$$\Delta V \leq h\|Y(k)\|^{\mu+1}(-a_1 + a_2 h^2 + a_3 h + a_4 h\|Y(k)\|^{\mu-1}).$$

Здесь $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$.

Будем считать, что величина h_0 удовлетворяет условиям

$$4a_2 h_0^2 < a_1, \quad 4a_3 h_0 < a_1. \tag{7}$$

Тогда для достаточно малых значений $\|Y(k)\|$ и при всех $0 < h < h_0$ имеет место неравенство

$$\Delta V \leq -\frac{a_1 h}{4}\|Y(k)\|^{\mu+1}. \tag{8}$$

Значит, функция ΔV отрицательно-определенная. Отсюда следует [6, с. 27–30], что нулевое решение системы (6) асимптотически устойчиво.

Замечание 1. Если $G(0) = 0$, то при доказательстве теоремы на величину h_0 не нужно накладывать дополнительные ограничения (7).

Замечание 2. В случае, когда $W(X)$ — положительно-определенная функция, с помощью первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [2, с. 82] можно показать, что нулевые решения систем (1) и (6) являются неустойчивыми.

Таким образом, предложенная модификация разностной схемы обеспечивает согласованность между дифференциальными и разностными уравнениями в смысле устойчивости нулевого решения. При этом построенное управление имеет второй порядок относительно шага дискретизации.

Далее в настоящей работе считаем, что δ и h являются фиксированными параметрами, причем величина h выбрана так, чтобы функция $u(h, X)$ была определена при всех $\|X\| < \delta$ и чтобы по крайней мере для достаточно малых значений $\|Y(k)\|$ выполнялось неравенство (8).

Оценим скорость стремления к началу координат решений уравнений (6). Из доказательства теоремы 1 следует существование числа $\delta_1 > 0$ такого, что если

$$k_0 \geq 0, \quad \|Y_0\| < \delta_1, \tag{9}$$

то при всех $k \geq k_0$ имеем

$$\|Y(k+1)\|^2 \leq \|Y(k)\|^2 - a\|Y(k)\|^{\mu+1}. \tag{10}$$

Здесь $Y(k)$ — решение, проходящее при $k = k_0$ через точку Y_0, a — положительная постоянная, не зависящая от начальных данных рассматриваемого решения.

Лемма. *Пусть для членов последовательности $\{v_k\}$ выполнены неравенства*

$$0 \leq v_{k+1} \leq v_k - a v_k^{\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{11}$$

где $a > 0$, $\lambda > 1$, $v_0 \geq 0$, $a\lambda v_0^{\lambda-1} \leq 1$. Тогда при всех $k = 0, 1, \ldots$ справедлива оценка

$$v_k \leq v_0\bigl(1 + a(\lambda-1)v_0^{\lambda-1}k\bigr)^{-\frac{1}{\lambda-1}}. \tag{12}$$

Доказательство. Применяем метод математической индукции. При $k = 0$ неравенство (12) верно. Предположим, что оно имеет место для всех $k \leq l$.

Тогда $v_l \le v_0$, откуда следует, что $a\lambda v_l^{\lambda-1} \le 1$. Функция $v_l - av_l^{\lambda}$ монотонно возрастает на промежутке $[0, (a\lambda)^{-1/(\lambda-1)}]$. Значит, справедливы соотношения

$$v_{l+1} \le v_l\big(1 - av_l^{\lambda-1}\big) \le v_0\big(1 + zl\big)^{-\frac{1}{\lambda-1}} \left(1 - \frac{z}{(\lambda-1)(1+zl)}\right)$$
$$= v_0(1 + z(l+1))^{-\frac{1}{\lambda-1}} g(z).$$

Здесь

$$z = a(\lambda-1)v_0^{\lambda-1}, \quad g(z) = \left(1 + \frac{z}{1+zl}\right)^{\frac{1}{\lambda-1}} \left(1 - \frac{z}{(\lambda-1)(1+zl)}\right).$$

Заметим теперь, что $g(0) = 1$ и при этом функция $g(z)$ монотонно убывает на промежутке $[0, +\infty)$. Следовательно, неравенство (12) выполняется и при $k = l + 1$.

Замечание 3. В случае, если соотношения (11) имеют место лишь при $k = 0, 1, \dots, N$, оценка (12) будет справедлива при $k = 0, 1, \dots, N + 1$.

Применяя к неравенствам (10) доказанную лемму (здесь $v_k = \|Y(k + k_0)\|^2$, $\lambda = (\mu+1)/2$), получаем, что если $a(\mu+1)\delta_1^{\mu-1}/2 \le 1$, то для решений, начинающихся при $k = k_0$ в δ_1-окрестности точки $Y = 0$, при всех $k \ge k_0$ имеют место оценки

$$\|Y(k)\| \le \|Y_0\| \left(1 + \frac{a(\mu-1)}{2}\|Y_0\|^{\mu-1}(k-k_0)\right)^{-\frac{1}{\mu-1}}.$$

Замечание 4. Аналогичным образом можно показать, что если число δ_1 достаточно мало, то для решений $Y(k)$ системы (6) с начальными данными $Y(k_0) = Y_0$, удовлетворяющими условиям (9), при всех $k \ge k_0$ справедливы соотношения

$$\|Y(k)\| \ge \|Y_0\|(1 + \gamma\|Y_0\|^{\mu-1}(k-k_0))^{-\frac{1}{\mu-1}}.$$

Здесь γ — положительная постоянная.

Замечание 5. Найденные оценки для решений разностной системы (6) согласуются с оценками, полученными в работе [7] для решений системы дифференциальных уравнений (1).

Замечание 6. При построении разностной системы (3), соответствующей уравнениям (1), использовался метод Эйлера. Предложенный в [1, 4] способ модификации известных численных методов позволяет проводить аналогичную коррекцию вычислительных схем и добиваться согласованности между дифференциальными и разностными уравнениями в смысле устойчивости нулевого решения и в случае, когда первоначальная разностная система построена методом Рунге — Кутты или Адамса.

3. Далее рассмотрим возмущенную систему

$$Y(k+1) = Y(k) + h\left(\frac{\partial W(Y(k))}{\partial X} + G(Y(k))Y(k)\right)$$
$$+ u(h, Y(k))Y(k) + R(k, Y(k)). \quad (13)$$

Здесь векторная функция $R(k, X)$ определена при $k = 0, 1, \dots,$ $\|X\| < \delta$, непрерывна по X и удовлетворяет неравенству

$$\|R(k, X)\| \le c\|X\|^{\sigma}, \tag{14}$$

где $c > 0$, $\sigma > 0$. Таким образом, система (13) также имеет решение $Y(k) \equiv 0$. Исследуем вопрос: при каких условиях возмущения не нарушают асимптотической устойчивости нулевого решения?

Теорема 2. *При выполнении неравенства*

$$\sigma > \mu \tag{15}$$

нулевое решение системы (13) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Приращение функции (2) на решениях возмущенных уравнений можно представить в виде

$$\Delta V = V(Y(k+1)) - V(Y(k)) = 2h(\mu+1)\big(1+u(h,Y(k))\big)W(Y(k))$$
$$+ 2h^2 \left(\frac{\partial W(Y(k))}{\partial X}\right)^* G(Y(k))Y(k) + h^2 \left\|\frac{\partial W(Y(k))}{\partial X}\right\|^2 + \|R(k,Y(k))\|^2$$
$$+ 2R^*(k,Y(k)) \left(Y(k) + h\frac{\partial W(Y(k))}{\partial X} + hG(Y(k))Y(k) + u(h,Y(k))Y(k)\right).$$

Используя оценку (8), установленную для приращения функции $V(X)$ на решениях системы (6), а также условие (14), получаем, что при достаточно малых значениях $\|Y(k)\|$ для всех $k = 0, 1, \ldots$ справедливо соотношение

$$\Delta V \le -b_1\|Y(k)\|^{\mu+1} + b_2\|Y(k)\|^{\sigma+1} + b_3\|Y(k)\|^{2\sigma}.$$

Здесь b_1, b_2, b_3 — положительные постоянные.

Если выполнено неравенство (15), то существует число $\delta_1 > 0$ такое, что при $k = 0, 1, \ldots$, $\|Y(k)\| < \delta_1$ имеет место оценка $\Delta V \le -b_1\|Y(k)\|^{\mu+1}/2$. Таким образом, функция $V(X)$ удовлетворяет требованиям теоремы об асимптотической устойчивости [6, с. 27–30].

Теорема 2 утверждает, что возмущения не нарушают асимптотической устойчивости нулевого решения, если их порядок выше порядка функций, входящих в правые части уравнений (6). Покажем теперь, что при некоторых дополнительных ограничениях на матрицу $G(X)$ и векторную функцию $R(k, X)$ асимптотическая устойчивость сохраняется и в случае, когда $\sigma \le \mu$.

Пусть система (13) имеет вид

$$Y(k+1) = Y(k) + h\left(\frac{\partial W(Y(k))}{\partial X} + G(Y(k))Y(k)\right)$$
$$+ u(h,Y(k))Y(k) + B_kQ(Y(k)). \tag{16}$$

Здесь B_k — постоянные матрицы размерности $n \times m$, а элементы m-мерного вектора $Q(X)$ представляют собой непрерывно дифференцируемые однородные функции порядка σ, $\sigma > 1$.

Предположим, что последовательность B_k является ограниченной. Кроме того, будем считать, что для матрицы $G(X)$ в области $\|X\| < \delta$ справедлива оценка

$$\|G(X)\| \le c_1\|X\|^\lambda, \tag{17}$$

где $c_1 > 0$, $\lambda > 0$.

Рассмотрим последовательность $(n \times m)$-матриц

$$I_0 = 0, \quad I_k = \sum_{j=0}^{k-1} B_j, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

Теорема 3. *Если последовательность* (18) *ограничена, то при выполнении неравенства*

$$\sigma > \max\{(\mu+1)/2; \mu-\lambda\} \tag{19}$$

нулевое решение системы (16) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Функцию Ляпунова для системы (16) выбираем в виде

$$V_1(k,X) = \|X\|^2 - 2X^* I_k Q(X). \tag{20}$$

Получим

$$\Delta V_1 = V(Y(k+1)) - V(Y(k)) - 2Y^*(k)B_k Q(Y(k)) \\ + 2(Y^*(k)I_{k+1}Q(Y(k)) - Y^*(k+1)I_{k+1}Q(Y(k+1))).$$

Следовательно, при $k = 0,1,\dots$ и $\|Y(k)\| < \delta$ справедливы соотношения

$$\|Y(k)\|^2 - a\|Y(k)\|^{\sigma+1} \le V_1(k,Y(k)) \le \|Y(k)\|^2 + a\|Y(k)\|^{\sigma+1},$$

$$\Delta V_1 \le -b_1\|Y(k)\|^{\mu+1} + b_2(\|Y(k)\|^{\mu+\lambda+1} + \|Y(k)\|^{\mu+2\lambda+1} + \|Y(k)\|^{2\mu}) \\ + b_3\|Y(k)\|^{\sigma}(\|Y(k)\|^{\mu} + \|Y(k)\|^{\lambda+1} + \|Y(k)\|^{2\lambda+1} + \|Y(k)\|^{\sigma}).$$

Здесь a, b_1, b_2, b_3 — положительные постоянные.

Если выполнено условие (19), то при достаточно малых значениях $\|Y(k)\|$ для всех $k = 0,1,\dots$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{2}\|Y(k)\|^2 \le V_1(k,Y(k)) \le 2\|Y(k)\|^2, \quad \Delta V_1 \le -\frac{b_1}{2}\|Y(k)\|^{\mu+1}.$$

Значит, функция $V_1(k,X)$ удовлетворяет требованиям теоремы об асимптотической устойчивости [6, с. 27–30].

Следствие. *Если оценку* (17) *для матрицы* $G(X)$ *заменить условием* $G(0) = 0$, *то асимптотическая устойчивость нулевого решения системы* (16) *будет иметь место при* $\sigma \ge \mu$.

Предположим теперь, что последовательность (18), вообще говоря, не является ограниченной. Однако существует число α, $0 < \alpha \le 1$, такое, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^\alpha} I_k = 0. \tag{21}$$

Теорема 4. *При выполнении неравенства*

$$\sigma \ge \max\left\{\frac{\mu+1+\alpha(\mu-1)}{2}; \mu-\lambda+\alpha(\mu-1)\right\}$$

нулевое решение системы (16) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. В качестве функции Ляпунова снова выберем функцию $V_1(k,X)$, построенную по формуле (20). Получим, что при достаточно малых значениях $\|Y(k)\|$ для всех $k = 0,1,\dots$ справедливы оценки

$$\|Y(k)\|^2 - \eta_k(k+1)^\alpha\|Y(k)\|^{\sigma+1} \le V_1(k,Y(k)) \le \|Y(k)\|^2 + \eta_k(k+1)^\alpha\|Y(k)\|^{\sigma+1},$$

$$\Delta V_1 \le -b\|Y(k)\|^{\mu+1} + \varepsilon_k(k+1)^\alpha(\|Y(k)\|^{\mu+\sigma} + \|Y(k)\|^{\lambda+\sigma+1} + \|Y(k)\|^{2\sigma}),$$

где $b > 0$, а последовательности неотрицательных чисел η_k и ε_k стремятся к нулю при $k \to \infty$.

Покажем, что существуют постоянные γ, A и L такие, что для любого решения $Y(k)$ системы (16) с начальными данными $Y(k_0) = Y_0$, удовлетворяющими условиям

$$k_0 \geq L, \quad \|Y_0\|^{\mu-1} < \frac{\gamma}{k_0}, \tag{22}$$

при всех $k \geq k_0$ имеет место неравенство

$$\|Y(k)\|^{\mu-1} < \frac{A}{k}. \tag{23}$$

Зададим числа γ и A так, чтобы выполнялись соотношения

$$0 < \gamma < \frac{8}{(\mu-1)b}, \quad A > \frac{2^{\mu+2}}{(\mu-1)b}.$$

Выберем $L > 0$ настолько большим, чтобы при $k \geq L$ были справедливы неравенства

$$\frac{A}{k} < \delta^{\mu-1}, \quad \frac{\gamma b(\mu+1)}{4k} \leq 1,$$
$$2\eta_k(k+1)^\alpha \left(\frac{A}{k}\right)^{\frac{\sigma-1}{\mu-1}} < 1, \quad 6\varepsilon_k(k+1)^\alpha \left(\frac{A}{k}\right)^{\frac{\sigma+\lambda-\mu}{\mu-1}} < b,$$
$$6\varepsilon_k(k+1)^\alpha \left(\frac{A}{k}\right)^{\frac{\sigma-1}{\mu-1}} < b, \quad 6\varepsilon_k(k+1)^\alpha \left(\frac{A}{k}\right)^{\frac{2\sigma-\mu-1}{\mu-1}} < b.$$

Рассмотрим решение $Y(k)$ системы (16) с начальными данными, удовлетворяющими условиям (22). Пусть существует натуральное число $k_1 > k_0$ такое, что $\|Y(k_1)\|^{\mu-1} = A/k_1$, а при $k = k_0, \ldots, k_1 - 1$ имеет место оценка (23). Тогда для всех $k = k_0, \ldots, k_1$ получаем

$$\frac{1}{2}\|Y(k)\|^2 \leq V_1(k, Y(k)) \leq 2\|Y(k)\|^2, \tag{24}$$

$$\Delta V_1 \leq -\frac{b}{2}\|Y(k)\|^{\mu+1} \leq -\frac{b}{2}\left(\frac{V_1(k, Y(k))}{2}\right)^{\frac{\mu+1}{2}}.$$

Заметим, что при этом

$$\frac{b(\mu+1)}{4}\left(\frac{V_1(k_0, Y_0)}{2}\right)^{\frac{\mu-1}{2}} \leq \frac{b(\mu+1)}{4}\|Y_0\|^{\mu-1} < \frac{\gamma b(\mu+1)}{4k_0} \leq 1.$$

Применяя доказанную в разд. 2 лемму, приходим к неравенству

$$V_1(k_1, Y(k_1)) \leq \left(V_1^{-\frac{\mu-1}{2}}(k_0, Y_0) + b(\mu-1)2^{-\frac{\mu+5}{2}}(k_1 - k_0)\right)^{-\frac{2}{\mu-1}}.$$

Учитывая оценки (24), получаем, что справедливо соотношение

$$k_1\left((\mu-1)b - \frac{2^{\mu+2}}{A}\right) \leq k_0\left((\mu-1)b - \frac{8}{\gamma}\right).$$

Из условий выбора чисел γ и A следует, что левая часть данного неравенства положительна, а правая — отрицательна. Приходим к противоречию. Значит, для решения $Y(k)$ при всех $k \geq k_0$ имеет место оценка (23).

Используя доказанное свойство решений системы (16), а также их непрерывную зависимость от начальных данных, получаем утверждение теоремы.

Замечание 7. При выполнении неравенства $\alpha(\mu-1) \le \lambda$ теорема 4 уточняет условие асимптотической устойчивости, найденное с помощью функции (2). В противном случае лучше оказывается условие (15).

Замечание 8. Полученные в настоящем разделе критерии асимптотической устойчивости нулевого решения разностных систем совпадают с установленными в [7] для систем обыкновенных дифференциальных уравнений критериями асимптотической устойчивости по нелинейному приближению вида (1).

4. Пример. Рассмотрим задачу гашения угловых движений твердого тела. Пусть задано твердое тело, вращающееся в инерциальном пространстве с угловой скоростью ω вокруг своего центра инерции O. Предположим, что с телом связаны оси $Oxyz$, которые являются его главными центральными осями. Динамические уравнения Эйлера, описывающие вращательное движение тела под действием управляющего момента M, имеют вид

$$\Theta\,\dot{\omega} + \omega \times \Theta\omega = M, \tag{25}$$

где Θ — тензор инерции тела [1, с. 114].

Будем считать, что $M = \partial W/\partial\omega$, где $W(\omega)$ — непрерывно дифференцируемая отрицательно-определенная однородная порядка $\mu+1$ функция, $\mu > 1$. Известно [1, с. 114–116], что при таком управлении система (25) имеет асимптотически устойчивое положение равновесия $\omega = 0$, а в качестве функции Ляпунова можно взять функцию

$$V = \omega^*\Theta\omega. \tag{26}$$

Для построения разностной системы, соответствующей уравнениям (25), рассмотрим систему

$$\Theta\,\dot{\omega} + \omega \times \Theta\omega = 0, \tag{27}$$

для которой функция (26) является первым интегралом. Получим модифицированный метод Эйлера численного интегрирования уравнений (27):

$$\Theta Y(k+1) = \Theta Y(k) - hY(k) \times \Theta Y(k) + u(h, Y(k))\Theta Y(k).$$

Здесь $Y(k) \in E^3$, а скалярное управление $u(h, Y(k))$ определяется из условия сохранения интеграла (26). Для любого $\delta > 0$ существует $h_0 > 0$ такое, что в области $0 < h < h_0$, $\|\omega\| < \delta$ функцию $u(h,\omega)$ можно выбрать в виде

$$u(h,\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega = 0, \\ -1 + \sqrt{1 - h^2\varphi(\omega)}, & \text{если } \omega \ne 0, \end{cases}$$

где $\varphi(\omega) = (\omega \times \Theta\omega)^*\Theta^{-1}(\omega \times \Theta\omega)/(\omega^*\Theta\omega)$.

При таком управлении нулевое решение построенной для уравнений (25) разностной системы

$$\Theta Y(k+1) = \Theta Y(k) - hY(k) \times \Theta Y(k) + h\frac{\partial W(Y(k))}{\partial\omega} + u(h, Y(k))\Theta Y(k)$$

будет асимптотически устойчивым.

Предположим теперь, что на исследуемое тело наряду с управляющим моментом M действует момент внешних возмущающих сил. Пусть возмущенные разностные уравнения имеют вид

$$\Theta Y(k+1) = \Theta Y(k) - hY(k) \times \Theta Y(k) + h\frac{\partial W(Y(k))}{\partial\omega} + u(h, Y(k))\Theta Y(k) + B_kQ(Y(k)). \tag{28}$$

Здесь B_k — постоянные матрицы размерности $3 \times m$, причем последовательность этих матриц является ограниченной, а элементы m-мерного вектора $Q(\omega)$ представляют собой непрерывно дифференцируемые однородные функции порядка σ, $\sigma > 1$.

Получим, что если $\sigma > \mu$, то нулевое решение системы (28) асимптотически устойчиво. В случае, когда последовательность матриц I_k, построенная по формулам (18), ограничена, для асимптотической устойчивости нулевого решения достаточно выполнения неравенства $\sigma > \max\{(\mu + 1)/2;\ \mu - 1\}$. Если же для последовательности (18) справедливо предельное соотношение (21), то достаточное условие асимптотической устойчивости принимает вид $\sigma \geq \max\{(\mu + 1 + \alpha(\mu - 1))/2; (1 + \alpha)(\mu - 1)\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов В. И.* Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судпромгиз, 1980.
2. *Бромберг П. В.* Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М.: Наука, 1967.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
4. *Зубов В. И.* Консервативные численные методы интегрирования дифференциальных уравнений в нелинейной механике // Докл. РАН. 1997. Т. 354, № 4. С. 446–448.
5. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге — Кутта для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988.
6. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.
7. *Александров А. Ю.* Об асимптотической устойчивости решений нелинейных неавтономных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 2. С. 5–9.

Статья поступила 25 июля 2002 г.

Александров Александр Юрьевич, Жабко Алексей Петрович
Санкт-Петербургский гос. университет,
факультет прикладной математики — процессов управления,
кафедра теории управления,
Университетский пр., 28, Петродворец, Санкт-Петербург 198504
alex@vrm.apmath.spbu.ru, zhabko@apmath.spbu.ru