Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 512.982

О КОМПЛЕКСЕ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ, АССОЦИИРОВАННОМ С АБСТРАКТНЫМ ГИЛЬБЕРТОВЫМ КОМПЛЕКСОМ

Н. В. Глотко

Аннотация: Рассматриваются комплексы гильбертовых пространств с плотно определенными замкнутыми операторами в качестве дифференциалов. Особенность таких комплексов состоит в том, что с помощью их дифференциалов можно построить в каждой размерности операторы Лапласа.

Оператор Лапласа в совокупности с достаточно «хорошей» измеримой функцией позволяет определить «обобщенное соболевское пространство». Существуют пары измеримых функций, дающие возможность построить «канонические» отображения соответствующих им соболевских пространств. Найдены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти отображения были компактными.

В ряде случаев по данному гильбертову комплексу можно построить ассоциированный с ним соболевский комплекс. Показано, что дифференциалы исходного комплекса нормально разрешимы одновременно с дифференциалами ассоциированного с ним и редуцированные когомологии этих комплексов совпадают.

Ключевые слова: теоремы вложения, соболевские пространства, гильбертовы пространства, дифференциальные формы на римановых многообразиях.

Гильбертов комплекс — это коцепной комплекс, компоненты которого суть гильбертовы пространства, а дифференциалы — плотно определенные замкнутые линейные операторы. Для любого гильбертова комплекса $\mathscr{A} = \left(A^i, d^i_A\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ и произвольного целого числа $k \in \mathbb{Z}$ определены гильбертовы пространства редуцированных когомологий $\overline{H}^k\mathscr{A}$ и топологические векторные пространства когомологий $H^k\mathscr{A}$. Эти пространства совпадают тогда и только тогда, когда оператор d^{k-1}_A нормально разрешим, т. е. имеет замкнутый в A^k образ.

Абстрактные гильбертовы комплексы изучались, например, в работе [1] и в более общей ситуации (банаховы комплексы) в работе [2].

Операторы d^k_A позволяют сконструировать для каждого $k \in \mathbb{Z}$ плотно определенный самосопряженный оператор Лапласа

$$\Delta_{A^k} = \left(d^k_A\right)^* d^k_A + d^{k-1}_A\left(d^{k-1}_A\right)^*.$$

Тогда для достаточно «хороших» функций f функционал $\|f(\mathrm{Id}_{A^k} + \Delta_{A^k})\cdot\|_{A^k}$ является нормой. Пополнение $\operatorname{Dom} f(\mathrm{Id}_{A^k} + \Delta_{A^k})$ по данной норме называется *соболевским пространством с показателем* f и обозначается через $H^{f,k}(\mathscr{A})$.

Существуют пары функций f, g, позволяющие построить «каноническое» отображение $\varepsilon^{f,k}_g : H^{f,k}(\mathscr{A}) \to H^{g,k}(\mathscr{A})$, которое иногда является вложением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ–311.–2003.–1).

В данной работе найдены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы это отображение было компактно.

Существует класс функций f, позволяющий сформировать для комплекса $\mathscr{A} = \left(A^i, d^i_A\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ ассоциированный с ним комплекс соболевских пространств $\mathscr{H}^f_k(\mathscr{A})$:

$$\dots \to H^{f(\lambda)\lambda^{\frac{k}{2}},0}(\mathscr{A}) \xrightarrow{d^{k,0}_{H,f}} H^{f(\lambda)\lambda^{\frac{k-1}{2}},1}(\mathscr{A}) \to \dots \to H^{f(\lambda)\lambda^{\frac{k-N}{2}},N}(\mathscr{A}) \to \dots,$$

причем замыкания $d^m_{H,f}$ в соболевских пространствах операторов внешнего дифференцирования d^m_A будут ограниченными операторами. Такой комплекс мы будем называть *соболевским комплексом, ассоциированным с комплексом* $\mathscr{A}$.

В настоящей работе показано, что ограниченные операторы $d^m_{H,f}$ комплекса $\mathscr{H}^f_k(\mathscr{A})$ нормально разрешимы одновременно с плотно определенными дифференциалами d^m_A комплекса $\mathscr{A}$ и, кроме того, редуцированные когомологии этих комплексов совпадают.

Данные результаты имеют приложение в теории дифференциальных форм на римановых многообразиях. Рассмотрим гладкое риманово многообразие M и гильбертово пространство $L^k_2(M)$ измеримых дифференциальных форм степени k на M, имеющих интегрируемый в квадрате модуль. Оператор внешнего дифференцирования, заданный на гладких формах, можно рассматривать как неограниченный оператор из $L^k_2(M)$ в $L^{k+1}_2(M)$. Этот оператор допускает замыкание, которое мы будем обозначать через $d^k : L^k_2(M) \to L^{k+1}_2(M)$. В области определения $W^k(M)$ оператора d^k естественно рассмотреть норму

$$\|\omega\|_{W^k(M)} = \left(\|\omega\|^2_{L^k_2(M)} + \|d^k\omega\|^2_{L^{k+1}_2(M)}\right)^{1/2}.$$

Через $V^k(M)$ будем обозначать замыкание в $W^k(M)$ пространства $C^\infty_0(\Lambda^k T^*M)$ гладких дифференциальных форм степени k, имеющих компактные носители, лежащие в $\operatorname{Int} M$.

Пусть задано некоторое замкнутое подпространство Γ^k пространства $W^k(M)$, содержащее $V^k(M)$. Для любой формы $\omega \in d^k(\Gamma^k)$ уравнение $d^k v = \omega$ имеет в Γ^k единственное решение, ортогональное к подпространству $\Gamma^k \cap \operatorname{Ker} d^k$. Обозначим это решение через $(d^k)^{-1}\omega$. Оператор $(d^k)^{-1} : d^k(\Gamma^k) \to L^k_2(M)$ ограничен тогда и только тогда, когда подпространство $d^k(\Gamma^k)$ замкнуто в $L^{k+1}_2(M)$, т. е. когда оператор внешнего дифференцирования d^k_Γ, действующий из $L^k_2(M)$ в $L^{k+1}_2(M)$, с областью определения Γ^k нормально разрешим.

Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ имеется плотно определенный самосопряженный оператор Лапласа $\Delta_{\Gamma^k} = \left(d^k_\Gamma\right)^* d^k_\Gamma + d^{k-1}_\Gamma \left(d^{k-1}_\Gamma\right)^*$. В данном случае соболевские пространства $H^f_{\Gamma^k}(M)$ представляют собой пополнения $\operatorname{Dom} f(\operatorname{Id}_{L^k_2(M)} + \Delta_{\Gamma^k})$ по норме $\|f(\operatorname{Id}_{L^k_2(M)} + \Delta_{\Gamma^k}) \cdot \|_{L^k_2(M)}$.

В случае, когда $f = \lambda^{n/2}$, где $n \in \mathbb{Z}$, многообразие M компактно или полно и имеет ограниченную геометрию (см. [3]), а $\Gamma^k = V^k(M)$, пространства $H^f_{\Gamma^k}(M)$ представляют собой обычные соболевские пространства $\overset{\circ}{H}{}^{n,2}(\Lambda^k T^*M)$, которые в работе [3] обозначаются символом $A^{n,k}(M)$. В частности, если M представляет собой искривленный цилиндр, можно найти (пользуясь результатами данной работы и работы [4]) явные условия на искривляющую функцию f, достаточные для того, чтобы вложения соболевских пространств были компактны.

1. Предварительные сведения об операторах в банаховом пространстве. Будем использовать следующие обозначения: X, Y — банаховы пространства, T — плотно определенный замкнутый линейный оператор с областью определения $\mathrm{Dom}(T)$, действующий из пространства X в пространство Y. В пространстве $\mathrm{Dom}(T)$ зададим норму $\|x\|_{\mathrm{Dom}(T)} = \left(\|x\|_X^2 + \|Tx\|_Y^2\right)^{1/2}$. Поскольку оператор T замкнут, пространство $\mathrm{Dom}(T)$ полно в норме $\|\cdot\|_{\mathrm{Dom}(T)}$. Через $\mathrm{Im}\, T$ и $\mathrm{Ker}\, T$ будем обозначать соответственно пространства $\{Tx \mid x \in \mathrm{Dom}(T)\}$ и $\{x \in \mathrm{Dom}(T) \mid Tx = 0\}$.

Будем говорить, что последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{Im}\, T$ *накрывается последовательностью* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{Dom}(T)$, если $Tx_n = y_n$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 1.1. Оператор T называется *нормально разрешимым*, если любая ограниченная последовательность из подпространства $\mathrm{Im}\, T$ накрывается ограниченной последовательностью из пространства $\mathrm{Dom}(T)$, и *компактно разрешимым*, если любая ограниченная последовательность из подпространства $\mathrm{Im}\, T$ накрывается последовательностью из области определения $\mathrm{Dom}(T)$, содержащей сходящуюся в пространстве X подпоследовательность.

Наряду с оператором T рассмотрим оператор $T^{-1} : Y \to X/\,\mathrm{Ker}\, T$ такой, что $\mathrm{Dom}(T^{-1}) = \mathrm{Im}\, T$, $T^{-1} \circ T = \pi$, где $\pi : X \to X/\,\mathrm{Ker}\, T$ — каноническая проекция на фактор-пространство.

Лемма 1.1. *Пусть оператор T замкнут и плотно определен. Оператор T нормально разрешим тогда и только тогда, когда оператор T^{-1} ограничен. Оператор T компактно разрешим тогда и только тогда, когда оператор T^{-1} компактен.*

Предложение 1.1 [5]. *Пусть оператор T замкнут и плотно определен. Оператор T компактно разрешим тогда и только тогда, когда компактен оператор вложения*

$$i_0 : \mathrm{Dom}(T)/\,\mathrm{Ker}\, T \to X/\,\mathrm{Ker}\, T.$$

Предложение 1.2 [5]. *Если замкнутый плотно определенный оператор T нормально (компактно) разрешим, то сопряженный оператор T^* также замкнут, плотно определен и нормально (компактно) разрешим.*

Лемма 1.2. *Пусть в диаграмме*

$$\begin{array}{ccc} B_0 & \xrightarrow{\psi_0} & C_0 \\ \beta\downarrow & & \downarrow\gamma \\ B_1 & \xrightarrow[\psi_1]{} & C_1 \end{array}$$

пространства B_0, B_1, C_0, C_1 банаховы, операторы ψ_0, ψ_1, β, γ ограничены и всюду определены, $\mathrm{Im}\, \psi_0 = C_0$, $\mathrm{Im}\, \psi_1 = C_1$, причем $\gamma\psi_0(x) = \psi_1\beta(x)$ для каждого $x \in B_0$. Тогда если оператор β компактен, то компактен и оператор γ. Обратно, если $\dim \mathrm{Ker}\, \psi_1 < \infty$, то из компактности оператора γ следует компактность оператора β.

Предложение 1.3. *Для замкнутого плотно определенного оператора T следующие свойства эквивалентны:*

1) *оператор T компактно разрешим и* $\dim \mathrm{Ker}\, T < \infty$*;*
2) *вложение $i : \mathrm{Dom}(T) \to X$ компактно.*

Доказательство. Пусть оператор T компактно разрешим и $\dim \mathrm{Ker}\, T < \infty$. Тогда по предложению 1.1 вложение $i_0 : \mathrm{Dom}(T)/\,\mathrm{Ker}\, T \to X/\,\mathrm{Ker}\, T$ компактно. Поскольку $\|i(x)\|_X = \|x\|_X \le \|x\|_{\mathrm{Dom}(T)}$, вложение i ограничено. Таким образом, диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Dom}(T) \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "i"'] & \mathrm{Dom}(T)/\operatorname{Ker} T \arrow[d, "i_0"] \\ X \arrow[r, "\pi"'] & X/\operatorname{Ker} T \end{tikzcd}$$

удовлетворяет условиям леммы 1.2. Поэтому оператор i компактен. Обратно, пусть вложение i компактно. Тогда по лемме 1.2 вложение i_0 компактно, откуда по предложению 1.1 следует компактная разрешимость оператора T. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \operatorname{Ker} T$ такую, что $\|x_n\|_X \le C < \infty$. Поскольку $\|x_n\|_X = \|x_n\|_{\mathrm{Dom}(T)}$ и оператор i компактен, последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ содержит сходящуюся в пространстве X подпоследовательность. Таким образом, пространство $\operatorname{Ker} T$ конечномерно. Предложение доказано.

Каждому линейному подпространству A банахова пространства X можно сопоставить подпространство $A^\perp$ пространства X^*, состоящее из всех (непрерывных линейных) функционалов $f \in X^*$ таких, что $f(x) = 0$ для всех элементов $x \in A$. Подпространство $A^\perp$ замкнуто в пространстве X^*, каким бы ни было подпространство $A \subset X$.

Лемма 1.3. *Если линейный оператор T, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y, замкнут и плотно определен, то $(\operatorname{Im} T)^\perp = \operatorname{Ker} T^*$. Если, кроме того, оператор T нормально разрешим, то $(\operatorname{Ker} T)^\perp = \operatorname{Im} T^*$.*

Пусть теперь оператор T, действующий на гильбертовом пространстве X, плотно определен и самосопряжен. Рассмотрим измеримую конечную и определенную почти всюду по отношению к спектральному семейству $\{E_\lambda\}$ оператора T комплекснозначную функцию w. Функция $w(T)$ оператора T определяется следующим образом:

$$(w(T)f, g)_X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(\lambda)\, d(E_\lambda f, g).$$

Здесь $g \in X$, $f \in \mathrm{Dom}(w(T))$, где $\mathrm{Dom}(w(T))$ — множество всех $f \in X$ таких, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |w(\lambda)|^2\, d(E_\lambda f, f) < \infty.$$

Приведенное ниже утверждение представляет собой хорошо известный факт функционального анализа (см. [6]).

Лемма 1.4. *Для любой функции w с указанными выше свойствами справедливы следующие утверждения.*

1. *Если функция w отлична от нуля почти всюду относительно спектрального семейства $\{E_\lambda\}$ оператора T, то имеет место равенство*

$$[w(T)]^{-1} = w^{-1}(T),$$

причем $\mathrm{Dom}([w(T)]^{-1}) = \mathrm{Dom}(w^{-1}(T))$.

2. *Оператор $w(T)$ замкнут и плотно определен, причем*

$$[w(T)]^* = \overline{w}(T).$$

3. *Для того чтобы оператор $w(T)$ был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы функция w была ограничена почти всюду относительно спектрального семейства $\{E_\lambda\}$ оператора T; при этом условии выполнено равенство*

$$\|w(T)\| = \operatorname{vrai\,max}|w(\lambda)|.$$

4. *Положительным функциям соответствуют положительные операторы.*

5. *Пусть функция u измерима, действительна и почти всюду конечна относительно спектрального семейства $\{E_\lambda\}$ самосопряженного оператора T, пусть, далее, функция v (действительная или комплексная) измерима и почти всюду конечна относительно спектрального семейства $\{F_\mu\}$ самосопряженного оператора $S = u(T)$. Тогда сложная функция $w(\lambda) = v(u(\lambda))$ также измерима и почти всюду конечна относительно спектрального семейства $\{E_\lambda\}$ и $w(T) = v(S) = v(u(T))$.*

6. *Если функции w_1 и w_2 измеримы и почти всюду конечны относительно спектрального семейства $\{E_\lambda\}$ оператора T, то*

$$w_1(T)\cdot w_2(T) \subseteq (w_1\cdot w_2)(T),$$

причем $\mathrm{Dom}(w_1(T)\cdot w_2(T)) = \mathrm{Dom}(w_2(T)) \cap \mathrm{Dom}[(w_1\cdot w_2)(T)]$.

Замкнутый оператор T, действующий на гильбертовом пространстве X, называется *строго положительным*, если он плотно определен и существует такое $\varepsilon > 0$, что $(Tx, x)_X \geq \varepsilon\|x\|_X^2$ для всех элементов $x \in \mathrm{Dom}(T)$.

Пусть T, S — самосопряженные операторы и $T, S \geq 0$; будем считать, что $T \geq S$, если $\mathrm{Dom}(S) \supset \mathrm{Dom}(T)$ и $(x, Tx)_X \geq (x, Sx)_X$ для всех $x \in \mathrm{Dom}(T)$.

Лемма 1.5.1. *Пусть оператор T, действующий на гильбертовом пространстве X, самосопряжен, плотно определен и строго положителен. Пусть f — измеримая конечная определенная почти всюду относительно спектрального семейства оператора T вещественнозначная функция. Тогда*

1) $\operatorname{Ker} T = 0$, $\operatorname{Im} T = X$*;*

2) *если существует такое вещественное число $\gamma > 0$, что $f(\lambda) \geq \gamma$ для п. в. λ, принадлежащих спектру $\sigma(T)$ оператора T, то оператор $f(T)$ строго положителен.*

Доказательство. 1. Ввиду неравенства $(Tx, x) \geq c(x, x)$, где $c > 0$, имеем $0 \geq c(x, x)$ для $x \in \operatorname{Ker} T$. Отсюда $x = 0$ и $\operatorname{Ker} T = 0$. Поскольку оператор T самосопряжен и плотно определен, то $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T)^\perp$, так что подпространство $\operatorname{Im} T$ плотно в X. Далее, так как $c\|x\|^2 \leq (Tx, x) \leq \|Tx\|\|x\|$, для любого x имеем $\|Tx\| \geq c\|x\|$, т. е. оператор T нормально разрешим и $\operatorname{Im} T = X$.

2. В силу леммы 1.4 оператор $f(T)$ самосопряжен и плотно определен. Так как оператор T строго положителен, для каждого $x \in \mathrm{Dom}(T)$ имеем $(Tx, x) \geq c(x, x)$, где число $c > 0$ является нижней границей спектра оператора T (см. [7]). Поскольку множество $\sigma(T)$ замкнуто и для п. в. $\lambda \in \sigma(T)$ по условию имеем $f(\lambda) \geq \gamma > 0$, то $(f(T)x, x) \geq \gamma(x, x)$ и оператор $f(T)$ строго положителен. Лемма доказана.

Лемма 1.5.2. *Пусть оператор T, действующий на гильбертовом пространстве X, самосопряжен, плотно определен, положителен и $\operatorname{Ker} T = 0$. Пусть f — измеримая, конечная и определенная почти всюду относительно спектрального семейства оператора T вещественнозначная функция. Тогда если $f(\lambda) \geq 0$ для п. в. λ, принадлежащих спектру $\sigma(T)$ оператора T (причем если $\lambda \neq 0$, то $f(\lambda) \neq 0$), то билинейный функционал $(f(T)\cdot, f(T)\cdot) : \mathrm{Dom}\, f(T) \times \mathrm{Dom}\, f(T) \to \mathbb{R}$*

задает на области определения оператора $f(T)$ скалярное произведение. Если оператор T строго положителен и существует такая константа $\gamma > 0$, что $f(\lambda) \geq \gamma$ для п. в. $\lambda \in \sigma(T)$, то пространство $\operatorname{Dom} f(T)$ полно в норме $\|f(T)\cdot\|$.

Доказательство. В силу леммы 1.4 оператор $f(T)$ самосопряжен, плотно определен и положителен. Пусть $x \in \operatorname{Ker} f(T)$ т. е. $f(T)x = 0$. Тогда

$$\|f(T)x\|^2 = \int\limits_0^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \, d(E_\lambda x, x) = 0.$$

Поэтому $f(\lambda) = 0$ п. в. на множестве $\sigma(T)$ относительно спектральной меры $(E_\lambda x, x)$ оператора T. С другой стороны, $f(\lambda) > 0$ для п. в. $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$.

Далее, $\mu((0, b]) = (E_{b+0}x, x) - (E_{+0}x, x) = 0$ для любого $b \in \sigma(T)$, где μ — мера, порожденная спектральным семейством оператора T. Но тогда $(E_\lambda x, x) = \|x\|^2$ при $\lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0$ и $(E_0 x, x) = 0$.

Тем самым 0 — изолированное собственное число оператора T, т. е. $Tx = 0$. Но $\operatorname{Ker} T = 0$. Таким образом, $x = 0$ и $\operatorname{Ker} f(T) = 0$. Но тогда билинейный функционал $(f(T)\cdot, f(T)\cdot) : \operatorname{Dom} f(T) \times \operatorname{Dom} f(T) \to \mathbb{R}$ является скалярным произведением.

Если оператор T строго положителен, то для любого $x \in \operatorname{Dom}(T)$ имеем $(Tx, x) \geq c(x, x)$ для некоторой константы $c > 0$. Поскольку функция f ограничена снизу на спектре $\sigma(T)$ некоторой положительной константой γ, можно применить лемму 1.5.1. Таким образом, оператор $f(T)$ строго положителен. Поэтому $\gamma\|x\| \leq \|f(T)x\|$ для любого $x \in \operatorname{Dom} f(T)$. Но тогда

$$\gamma^2(\|x\|^2 + \|f(T)x\|^2) \leq (1 + \gamma^2)\|f(T)x\|^2 \leq (1 + \gamma^2)(\|x\|^2 + \|f(T)x\|^2)$$

и норма $\|f(T)\cdot\|$ эквивалентна норме графика оператора $f(T)$, откуда в силу замкнутости оператора $f(T)$ делаем вывод о полноте пространства $\operatorname{Dom} f(T)$ в норме $\|f(T)\cdot\|$. Лемма доказана.

2. Соболевские пространства, ассоциированные с замкнутым оператором. Всюду в этом пункте символом T будем обозначать плотно определенный самосопряженный положительный оператор, действующий на гильбертовом пространстве X и такой, что $\operatorname{Ker} T = 0$. Поскольку $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T)^\perp$, подпространство $\operatorname{Im} T$ плотно в пространстве X.

Оператор $\operatorname{Id} + T^2$ самосопряжен, плотно определен и строго положителен, причем $((\operatorname{Id} + T^2)x, x) \geq (x, x)$ для любого $x \in \operatorname{Dom}(\operatorname{Id} + T^2)$. Таким образом, по лемме 1.5.1 $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id} + T^2) = 0$, $\operatorname{Im}(\operatorname{Id} + T^2) = X$.

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+ \rightleftharpoons \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \geq 0\}$, удовлетворяющую следующим двум условиям:

(i) f измерима, конечна и определена почти всюду относительно спектрального семейства $\{E_\lambda\}$ оператора $\operatorname{Id} + T^2$;

(ii) $f(\lambda) > 0$ для п. в. $\lambda \in \sigma(\operatorname{Id} + T^2)$.

Тогда оператор $f(\operatorname{Id} + T^2)$ самосопряжен, плотно определен, положителен и по лемме 1.5.2 билинейный функционал $(f(\operatorname{Id} + T^2)\cdot, f(\operatorname{Id} + T^2)\cdot)$ представляет собой скалярное произведение в пространстве $\operatorname{Dom} f(\operatorname{Id} + T^2)$.

Определение 2.1. *Соболевским пространством $H_T^f(X)$, ассоциированным с парой* (T, f), будем называть пополнение пространства $\operatorname{Dom} f(\operatorname{Id} + T^2)$ по норме $\|f(\operatorname{Id} + T^2)\cdot\|$.

Пусть функции f, g, действующие из $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}_+$, удовлетворяют условиям (i), (ii) и условию:

(iii) существует константа $c > 0$ такая, что для п. в. $\lambda \in \sigma(\mathrm{Id} + T^2)$ выполнено неравенство $g(\lambda) \le c \cdot f(\lambda)$.

Тогда
$$\mathrm{Dom}\, f(\mathrm{Id} + T^2) \subset \mathrm{Dom}\, g(\mathrm{Id} + T^2).$$

Действительно, пусть $x \in \mathrm{Dom}\, f(\mathrm{Id} + T^2)$. Имеем
$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} |g(\lambda)|^2\, d(E_\lambda x, x) \le c^2 \int\limits_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda)|^2\, d(E_\lambda x, x) \le C < \infty. \tag{2.1}$$

Отсюда $x \in \mathrm{Dom}\, g(\mathrm{Id} + T^2)$.

Продолжая тождественное вложение $\mathrm{Dom}\, f(\mathrm{Id} + T^2)$ в $\mathrm{Dom}\, g(\mathrm{Id} + T^2)$ по непрерывности на пополнения, имеем для любой пары функций f, g, удовлетворяющих условиям (i)–(iii), отображение $\varepsilon_g^f : H_T^f(X) \to H_T^g(X)$.

В дальнейшем под предгильбертовым пространством мы будем понимать (вообще говоря неполное) нормированное пространство, норма которого порождается скалярным произведением.

Лемма 2.1. *Пусть X — предгильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_X$, L — его подпространство, являющееся предгильбертовым пространством относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_L$, ε — некоторое вложение L в X как векторного подпространства.*

1. Если для любого $x \in L$ выполнено $\|\varepsilon(x)\|_X \le C\|x\|_L$, где константа C не зависит от x, то отображение $\bar\varepsilon : \overline{L} \to \overline{X}$, являющееся продолжением по непрерывности на пополнения вложения ε, ограничено.

Если, кроме того, существует такая константа $C_1 > 0$, что для любого $x \in L$ выполнено $\|\varepsilon(x)\|_X \ge C_1\|x\|_L$, то отображение $\bar\varepsilon$ является топологическим изоморфизмом.

2. Для любой ограниченной в норме $\|\cdot\|_L$ последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L$ последовательность $\{\varepsilon x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ содержит фундаментальную в норме пространства X подпоследовательность тогда и только тогда, когда отображение $\bar\varepsilon$ компактно.

Предложение 2.1. *Пусть функции $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяют условиям* (i)–(iii). *Тогда отображение $\varepsilon_g^f : H_T^f(X) \to H_T^g(X)$ ограничено.*

Доказательство. Поскольку
$$\|f(T)x\|^2 = \int\limits_0^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda x, x),$$
доказательство следует из оценки (2.1).

Лемма 2.2. *Для любого компактного самосопряженного оператора S, действующего на гильбертовом пространстве X, существует такой ортонормированный базис $\{\varepsilon_n\}$ в X, что*
$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, \varepsilon_n)\varepsilon_n, \tag{2.2}$$
где λ_n — вещественные числа, $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$. Обратно, любой оператор, представимый в виде (2.2), *компактен.*

Лемма 2.2′. *Пусть S — плотно определенный самосопряженный оператор, действующий на бесконечномерном гильбертовом пространстве X и такой, что $\operatorname{Ker} S = 0$. Оператор S компактно разрешим тогда и только тогда, когда его спектр $\sigma(S)$ — счетное множество такое, что $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$* (здесь $\sigma(S) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$). *Каждое число $\lambda \in \sigma(S)$ является собственным значением оператора S.*

В дальнейшем наряду с обозначением $f(\mathrm{Id} + T^2)$ мы будем для удобства использовать обозначение $f(\lambda)(\mathrm{Id} + T^2)$.

Предложение 2.2. *Пусть функции $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяют условиям* (i)–(iii) *и условию*

(iv) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} g(\lambda)/f(\lambda) = 0$.

Тогда

1. *Если оператор T компактно разрешим, то отображение*

$$\varepsilon_g^f : H_T^f(X) \to H_T^g(X)$$

компактно.

2. *Если отображение ε_g^f компактно, то оператор T компактно разрешим.*

Доказательство. 1. Пусть оператор T компактно разрешим. Тогда компактно разрешим и оператор $\mathrm{Id} + T^2$. Действительно, если T компактно разрешим, то, поскольку $\operatorname{Ker} T = 0$, оператор $T^{-1} : \operatorname{Im} T \to X$ компактен. Но тогда компактен и оператор T^{-2}, совпадающий с оператором $(T^2)^{-1}$, т. е. оператор T^2 компактно разрешим. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \operatorname{Dom}(\mathrm{Id} + T^2)$ такую, что $\|x_n\|_{\operatorname{Dom}(\mathrm{Id} + T^2)} \le C < \infty$. Так как $\operatorname{Dom}(\mathrm{Id} + T^2) = \operatorname{Dom}(T^2)$, на этом подпространстве

$$\begin{aligned}\|x_n\|^2_{\operatorname{Dom}(\mathrm{Id} + T^2)} &= (x_n, x_n)_X + ((\mathrm{Id} + T^2)x_n, (\mathrm{Id} + T^2)x_n)_X \\ &= 2\|x_n\|_X^2 + 2(T^2x_n, x_n)_X + \|T^2x_n\|_X^2 \ge \|x_n\|_X^2 + \|T^2x_n\|_X^2 = \|x_n\|^2_{\operatorname{Dom}(T^2)},\end{aligned}$$

поскольку $(T^2x, x)_X \ge 0$ для любого $x \in \operatorname{Dom}(T^2)$. Таким образом, $\|x_n\|_{\operatorname{Dom}(T^2)} \le C < \infty$. Из компактной разрешимости оператора T^2 и того, что $\operatorname{Ker} T^2 = 0$, по предложению 1.3 следует, что существует сходящаяся в X подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, откуда и вытекает компактная разрешимость оператора $\mathrm{Id} + T^2$.

Поэтому по следствию 2.1 его спектр $\sigma(\mathrm{Id} + T^2) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — счетное множество и $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Но тогда спектр оператора $(g/f)(\mathrm{Id} + T^2)$ также представляет собой счетное множество, причем $\sigma((g/f)(\mathrm{Id} + T^2))$ не имеет предельных точек, отличных от нуля в силу условия (iv). Тем самым оператор $(g/f)(\mathrm{Id} + T^2)$ компактен. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \operatorname{Dom} f(\mathrm{Id} + T^2)$ — ограниченная в норме пространства $H_T^f(X)$ последовательность. Поскольку выполнено условие (iii), на подпространстве $\operatorname{Dom} f(\mathrm{Id} + T^2)$ справедливо равенство

$$g(\mathrm{Id} + T^2) = (g/f)(\mathrm{Id} + T^2) \cdot f(\mathrm{Id} + T^2).$$

Таким образом, последовательность $\{g(\mathrm{Id} + T^2)x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ как образ ограниченной в X последовательности при компактном отображении $(g/f)(\mathrm{Id} + T^2)$ содержит фундаментальную в X подпоследовательность. Теперь компактность отображения ε_g^f следует из леммы 2.1.

2. Пусть отображение ε_g^f компактно. Тогда любая последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \operatorname{Dom} f(\mathrm{Id} + T^2)$, ограниченная в норме пространства $H_T^f(X)$, содержит подпоследовательность, фундаментальную в норме пространства $H_T^g(X)$.

Пусть $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \operatorname{Dom}[f(\operatorname{Id}+T^2)]^{-1}$ — ограниченная в норме пространства X последовательность. Тогда существует такая последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \operatorname{Dom} f(\operatorname{Id}+T^2)$, что $f(\operatorname{Id}+T^2)y_n = z_n$, или $y_n = [f(\operatorname{Id}+T^2)]^{-1}z_n$. Тем самым $\|f(\operatorname{Id}+T^2)y_n\| \le C < \infty$. Но тогда последовательность $\{g(\operatorname{Id}+T^2)y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ содержит фундаментальную в X подпоследовательность. Поскольку выполнено условие (iii), оператор $(g/f)(\operatorname{Id}+T^2)$ всюду определен и, следовательно, ограничен. Таким образом, на подпространстве $\operatorname{Dom}[f(\operatorname{Id}+T^2)]^{-1} = \operatorname{Dom}(1/f)(\operatorname{Id}+T^2)$ имеем

$$(g/f)(\operatorname{Id}+T^2)z_n = g(\operatorname{Id}+T^2)\cdot(1/f)(\operatorname{Id}+T^2)z_n.$$

Итак, для любой ограниченной последовательности $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \operatorname{Dom}(1/f)(\operatorname{Id}+T^2)$ ее образ при отображении $(g/f)(\operatorname{Id}+T^2)$ содержит сходящуюся в X подпоследовательность. Пользуясь тем, что подпространство $\operatorname{Dom}(1/f)(\operatorname{Id}+T^2)$ плотно в пространстве X, и применяя лемму 2.1, делаем вывод о компактности оператора $(g/f)(\operatorname{Id}+T^2)$. Итак, спектр $\sigma((g/f)(\operatorname{Id}+T^2))$ дискретен и не имеет иных предельных точек, кроме нуля. Из условия (iv)

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda)/g(\lambda) = \infty.$$

Отсюда следует компактная разрешимость оператора $(\operatorname{Id}+T^2)$. Ввиду того, что $(\operatorname{Id}+T^2)^{1/2} = (\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}})(\operatorname{Id}+T^2)$, компактно разрешим и оператор $(\operatorname{Id}+T^2)^{1/2}$. Но тогда отображение $H_T^{\sqrt{\lambda}}(X)$ в X компактно и в силу того, что $\operatorname{Dom}(\operatorname{Id}+T^2)^{1/2}$ полно в норме $\|(\operatorname{Id}+T^2)^{1/2}\cdot\|$, является вложением. Заметим также, что функцию $f(\operatorname{Id}+T^2)$ оператора $\operatorname{Id}+T^2$ можно рассматривать и как функцию оператора T в силу п. 5 леммы 1.4. Имеем $x \in \operatorname{Dom}(\operatorname{Id}+T^2)^{1/2}$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^{+\infty} |(1+\lambda^2)|\, d(E_\lambda x, x) < \infty,$$

и $x \in \operatorname{Dom}(T)$ тогда и только тогда, когда $\int\limits_0^{+\infty} |\lambda|^2\, d(E_\lambda x, x) < \infty$. Так как эти интегралы сходятся одновременно, то $\operatorname{Dom}(T) = \operatorname{Dom}((\operatorname{Id}+T^2)^{1/2})$. На подпространстве $\operatorname{Dom}(T)$ имеем

$$\|(\operatorname{Id}+T^2)^{1/2}x\|_X^2 = \int\limits_0^{+\infty} |(1+\lambda^2)^{1/2}|^2\, d(E_\lambda x, x) = \|x\|_X^2 + \|Tx\|_X^2 = \|x\|^2_{\operatorname{Dom}(T)},$$

т. е. пространство $H_T^{\sqrt{\lambda}}(X)$ совпадает с пространством $(\operatorname{Dom}(T), \|\cdot\|_{\operatorname{Dom}(T)})$. Поскольку вложение $\varepsilon_{\lambda^0}^{\lambda^{1/2}}$ компактно и $\operatorname{Ker} T = 0$, по предложению 1.3 оператор T компактно разрешим. Предложение доказано.

Лемма 2.3. *Пусть функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям* (i), (ii). *Тогда если выполнено условие:*

(v) *существует константа $\gamma > 0$ такая, что $f(\lambda) \ge \gamma$ для п. в. $\lambda \in \sigma(\operatorname{Id}+T^2)$, то на подпространстве $\operatorname{Dom}(\lambda^{1/2}\cdot f(\lambda))(\operatorname{Id}+T^2)$ выполнено равенство*

$$T\cdot f(\operatorname{Id}+T^2) = f(\operatorname{Id}+T^2)\cdot T. \tag{2.3}$$

Если же функция f удовлетворяет условию:

(vi) *существует константа $\gamma > 0$ такая, что $f(\lambda) \le \gamma$ для п. в. $\lambda \in \sigma(\operatorname{Id}+T^2)$,* *то равенство* (2.3) *выполняется на подпространстве* $\mathrm{Dom}(T)$.

Доказательство. Пусть $\{E_\lambda\}$ — спектральное семейство оператора T. Имеем

$$D = \mathrm{Dom}(\lambda^{1/2} \cdot f(\lambda))(\mathrm{Id} + T^2) = \left\{ x \in X \mid \int_0^{+\infty} |f(1+\lambda^2)|^2 (1+\lambda^2)\, d(E_\lambda x, x) < \infty \right\}.$$

Область определения правой части равенства (2.3) такова:

$$\begin{aligned} D_R = D \cap \mathrm{Dom}(T) = D \cap \left\{ x \in X \mid \int_0^{+\infty} \lambda^2\, d(E_\lambda x, x) < \infty \right\} \\ = D \cap \left\{ x \in X \mid \int_0^{+\infty} (1+\lambda^2)\, d(E_\lambda x, x) < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Область определения левой части равенства (2.3) такова:

$$D_L = D \cap \mathrm{Dom}\, f(\mathrm{Id} + T^2) = D \cap \left\{ x \in X \mid \int_0^{+\infty} |f(1+\lambda^2)|^2\, d(E_\lambda x, x) < \infty \right\}.$$

В силу оценки

$$\int_0^{+\infty} |f(1+\lambda^2)|^2\, d(E_\lambda x, x) \le \int_0^{+\infty} (1+\lambda^2)|f(1+\lambda^2)|^2\, d(E_\lambda x, x)$$

имеем $D \subset D_L$.

Если $f(\lambda) \ge \gamma$ для п. в. $\lambda \in \sigma(\mathrm{Id} + T^2)$, то

$$\gamma^2 \int_0^{+\infty} \lambda^2\, d(E_\lambda x, x) \le \gamma^2 \int_0^{+\infty} (1+\lambda^2)\, d(E_\lambda x, x) \le \int_0^{+\infty} (1+\lambda^2)|f(1+\lambda^2)|^2\, d(E_\lambda x, x)$$

и $D \subset D_R$, т. е. обе части равенства (2.3) определены на подпространстве $\mathrm{Dom}(\lambda^{1/2} \cdot f(\lambda))(\mathrm{Id} + T^2)$.

Если же для п. в. $\lambda \in \sigma(\mathrm{Id} + T^2)$ выполнено $f(\lambda) \le \gamma$, то правая часть равенства (2.3) определена на $\mathrm{Dom}(T) = \mathrm{Dom}(\mathrm{Id} + T^2)^{1/2}$, поскольку

$$\int_0^{+\infty} (1+\lambda^2)|f(1+\lambda^2)|^2\, d(E_\lambda x, x) \le \gamma^2 \int_0^{+\infty} (1+\lambda^2)\, d(E_\lambda x, x).$$

На этом же подпространстве определена и левая часть равенства. Лемма доказана.

Предложение 2.3. *Пусть функция* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет условиям* (i), (ii) *и хотя бы одному из условий* (v), (vi). *Тогда оператор* T *продолжается по непрерывности до ограниченного всюду определенного оператора* (*который тоже будет обозначаться символом* T) $T : H_T^{\lambda^{1/2} \cdot f(\lambda)}(X) \to H_T^f(X)$.

Доказательство. Пусть сначала функция f удовлетворяет условиям (i), (ii), (v). Пусть $x \in \mathrm{Dom}(\lambda^{1/2} \cdot f(\lambda))(\mathrm{Id} + T^2)$. Тогда

$$\|Tx\|_{H_T^f(X)} = \|f(\mathrm{Id} + T^2)Tx\|_X.$$

В силу леммы 2.3 на подпространстве $\mathrm{Dom}(\lambda^{1/2}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)$ выполнено равенство (2.3). Поэтому

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2_{H_T^f(X)} &= \|Tf(\mathrm{Id}+T^2)x\|^2_X \le \|f(\mathrm{Id}+T^2)x\|^2_X + \|Tf(\mathrm{Id}+T^2)x\|^2_X \\ &= ((\mathrm{Id}+T^2)^{1/2}f(\mathrm{Id}+T^2)x, (\mathrm{Id}+T^2)^{1/2}f(\mathrm{Id}+T^2)x)_X = \|x\|^2_{H_T^{f(\lambda)\cdot\sqrt{\lambda}}(X)}. \quad (2.4)\end{aligned}$$

Поскольку $H_T^{f(\lambda)\cdot\sqrt{\lambda}}(X)$ — пополнение $\mathrm{Dom}(f(\lambda)\cdot\lambda^{1/2})(\mathrm{Id}+T^2)$ в норме $\|(f(\lambda)\cdot\lambda^{1/2})(\mathrm{Id}+T^2)\cdot\|_X$, оператор T продолжается по непрерывности до ограниченного отображения на пополнениях.

Пусть теперь функция f удовлетворяет условиям (i), (ii) и (vi). Тогда равенство (2.3) выполняется на подпространстве $\mathrm{Dom}(T) = \mathrm{Dom}(\mathrm{Id}+T^2)^{1/2} \subset \mathrm{Dom}(\lambda^{1/2}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)$ и на $\mathrm{Dom}(T)$ выполнена цепочка неравенств (2.4). Поэтому для того чтобы оператор T мог быть продолжен по непрерывности до ограниченного оператора, действующего из $H_T^{\lambda^{1/2}\cdot f(\lambda)}(X)$ в $H_T^f(X)$, достаточно показать, что подпространство $\mathrm{Dom}(\mathrm{Id}+T^2)^{1/2}$ плотно в $H_T^{\lambda^{1/2}\cdot f(\lambda)}(X)$. Пусть $u \in \mathrm{Dom}(\lambda^{1/2}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)$. Тогда

$$(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{Id}+n^{-1}T) = \mathrm{Dom}(T) = \mathrm{Dom}(\mathrm{Id}+T^2)^{1/2}$$

для любого целого числа $n > 0$. Оператор $(\mathrm{Id}+n^{-1}T)$ строго положителен для положительных n. Поэтому $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}+n^{-1}T) = 0$ и $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}+n^{-1}T) = X$.

На подпространстве $\mathrm{Dom}(\lambda^{1/2}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)$ выполнено

$$(\lambda^{1/2}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)\cdot(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1} = (\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}\cdot(\lambda^{1/2}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2). \quad (2.5)$$

Действительно, пусть

$$D = \left\{x \in X \mid \int\limits_0^{+\infty} \frac{(1+\lambda^2)|f(1+\lambda^2)|^2}{(1+\lambda/n)^2}\, d(E_\lambda x, x) < \infty\right\}.$$

Тогда левая часть равенства (2.5) определена на подпространстве

$$D_L = D \cap \left\{x \in X \mid \int\limits_0^{+\infty} \frac{d(E_\lambda x, x)}{(1+\lambda/n)^2} < \infty\right\} = D,$$

правая — на подпространстве

$$D_R = D \cap \left\{x \in X \mid \int\limits_0^{+\infty} (1+\lambda^2)|f(1+\lambda^2)|^2\, d(E_\lambda x, x) < \infty\right\}.$$

Поскольку оператор T положителен и $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, имеется оценка

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(1+\lambda^2)|f(1+\lambda^2)|^2}{(1+\lambda/n)^2}\, d(E_\lambda x, x) \le \int\limits_0^{+\infty} (1+\lambda^2)|f(1+\lambda^2)|^2\, d(E_\lambda x, x).$$

Поэтому

$$\left\{x \in X \mid \int\limits_0^{+\infty} (1+\lambda^2)|f(1+\lambda^2)|^2\, d(E_\lambda x, x) < \infty\right\} \subset D.$$

Таким образом, для $u \in \mathrm{Dom}(\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)$ имеем

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}u-u\|_{H_T^{\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda)}(X)} &= \|(\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)((\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}u-u)\|_X\\ &= \|(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}(\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)u-(\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)u\|_X\\ &= \|(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}v-v\|_X,\end{aligned}$$

где $v=(\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)u\in X$. Последовательность $\{(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена, ибо

$$\|(\mathrm{Id}+n^{-1}T)x\|_X^2=(x,x)_X+\frac{2}{n}(Tx,x)_X+\frac{1}{n^2}(Tx,Tx)_X\ge(x,x)_X$$

для любого положительного целого числа n, так что $\|(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}y\|_X\le\|y\|$ для каждого $y\in X$, т. е. $\|(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}\|\le 1$. Подпространство $\mathrm{Dom}(T)=\mathrm{Dom}(\mathrm{Id}+T^2)^{1/2}$ плотно в пространстве X, и для любого $x\in\mathrm{Dom}(T)$ имеем

$$\|(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}x-x\|_X=n^{-1}\|(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}Tx\|_X\le n^{-1}\|Tx\|_X\to 0$$

при $n\to\infty$. Поэтому $\|(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}x-x\|_X\to 0$ при $n\to\infty$ для любого $x\in X$. Но тогда $(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}u\to u$ при $n\to\infty$ в норме $H_T^{\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda)}(X)$, поскольку $(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}v\to v$ в X, где $v=(\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)u\in X$, т. е. подпространство $\mathrm{Dom}(\mathrm{Id}+T^2)$ плотно в $\mathrm{Dom}(\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)$ в норме пространства $H_T^{\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda)}(X)$, а значит, и в пространстве $H_T^{\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda)}(X)$. Предложение доказано.

Лемма 2.4. *Пусть функции $f,g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ удовлетворяют условиям* (i), (ii), *а функция (f/g) — условию* (v). *Тогда если выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) *функция g удовлетворяет условию* (v);

2) *функция f удовлетворяет условию* (vi),

то отображение $(f/g)(\mathrm{Id}+T^2)$ продолжается до изометрического изоморфизма пространства $H_T^f(X)$ на $H_T^g(X)$. Если функция g удовлетворяет условию (v) *или функция $\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda)$ удовлетворяет условию* (vi), *то диаграмма*

$$\begin{tikzcd} H_T^{\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda)}(X) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "(f/g)(\mathrm{Id}+T^2)"'] & H_T^f(X) \arrow[d, "(f/g)(\mathrm{Id}+T^2)"] \\ H_T^{\sqrt{\lambda}\cdot g(\lambda)}(X) \arrow[r, "T"'] & H_T^g(X) \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

коммутативна.

Доказательство. Пусть сначала функция g удовлетворяет условию (v). Тогда это условие выполняется также и для функции f, так как $(f/g)(\lambda)\ge c>0$ для п. в. $\lambda\in\sigma(\mathrm{Id}+T^2)$. Так как выполнена оценка

$$\int_0^{+\infty}\frac{|f(1+\lambda^2)|^2}{|g(1+\lambda^2)|^2}\,d(E_\lambda x,x)\le\frac{1}{\gamma^2}\int_0^{+\infty}|f(1+\lambda^2)|^2\,d(E_\lambda x,x),$$

то $\mathrm{Dom}\,f(\mathrm{Id}+T^2)\subset\mathrm{Dom}(f/g)(\mathrm{Id}+T^2)$. Отображение $(f/g)(\mathrm{Id}+T^2)$ всюду определено на подпространстве $\mathrm{Dom}\,f(\mathrm{Id}+T^2)$, и, кроме того, на $\mathrm{Dom}\,f(\mathrm{Id}+T^2)$ выполнено

$$g(\mathrm{Id}+T^2)\cdot(f/g)(\mathrm{Id}+T^2)=f(\mathrm{Id}+T^2), \tag{2.7}$$

ибо левая часть этого равенства определена на подпространстве $\operatorname{Dom} f(\operatorname{Id}+T^2)\cap \operatorname{Dom}(f/g)(\operatorname{Id}+T^2)$. Из равенства (2.7) также следует, что

$$(f/g)(\operatorname{Id}+T^2)(\operatorname{Dom} f(\operatorname{Id}+T^2)) \subset \operatorname{Dom} g(\operatorname{Id}+T^2).$$

Докажем, что $(f/g)(\operatorname{Id}+T^2)$ отображает $\operatorname{Dom} f(\operatorname{Id}+T^2)$ на $\operatorname{Dom} g(\operatorname{Id}+T^2)$. Действительно, пусть $x \in \operatorname{Dom} g(\operatorname{Id}+T^2)$. В силу (v) оператор $(1/g)(\operatorname{Id}+T^2)$ ограничен и всюду определен, причем на X имеем

$$g(\operatorname{Id}+T^2)\cdot(1/g)(\operatorname{Id}+T^2) = \operatorname{Id}_X .$$

Поэтому существует такой элемент $y \in X$, что $(1/g)(\operatorname{Id}+T^2)y = x$. Всюду на X выполнено соотношение

$$(1/g)(\operatorname{Id}+T^2) = (f/g)(\operatorname{Id}+T^2)\cdot(1/f)(\operatorname{Id}+T^2),$$

поскольку обе части этого равенства определены на подпространстве

$$\operatorname{Dom}(1/g)(\operatorname{Id}+T^2)\cap\operatorname{Dom}(1/f)(\operatorname{Id}+T^2),$$

которое совпадает с X в силу ограниченности снизу функций f и g. Тогда

$$x = (1/g)(\operatorname{Id}+T^2)y = (f/g)(\operatorname{Id}+T^2)(1/f)(\operatorname{Id}+T^2)y.$$

Но $(1/f)(\operatorname{Id}+T^2)y \in \operatorname{Dom} f(\operatorname{Id}+T^2)$ для любого $y \in X$, т. е. для любого $x \in \operatorname{Dom} g(\operatorname{Id}+T^2)$ существует такой элемент $z \in \operatorname{Dom} f(\operatorname{Id}+T^2)$, что

$$(f/g)(\operatorname{Id}+T^2)z = x.$$

Пусть, далее, $x, y \in \operatorname{Dom} f(\operatorname{Id}+T^2)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&((f/g)(\operatorname{Id}+T^2)x, (f/g)(\operatorname{Id}+T^2)y)_{H_T^g(X)}\\
&\quad= (g(\operatorname{Id}+T^2)\cdot(f/g)(\operatorname{Id}+T^2)x, g(\operatorname{Id}+T^2)\cdot(f/g)(\operatorname{Id}+T^2)y)_X\\
&\qquad= (f(\operatorname{Id}+T^2)x, f(\operatorname{Id}+T^2)y)_X = (x,y)_{H_T^f(X)}
\end{aligned}\tag{2.8}$$

в силу равенства (2.7). Поэтому отображение

$$(f/g)(\operatorname{Id}+T^2) : \operatorname{Dom} f(\operatorname{Id}+T^2) \to \operatorname{Dom} g(\operatorname{Id}+T^2)$$

продолжается до изометрического изоморфизма пространства $H_T^f(X)$ на пространство $H_T^g(X)$. Рассмотрим теперь случай, когда функция f удовлетворяет условию (vi). Поскольку функция f/g удовлетворяет условию (v), то и для g выполняется (vi). Поэтому $\operatorname{Dom} f(\operatorname{Id}+T^2) = \operatorname{Dom} g(\operatorname{Id}+T^2) = X$ и $\operatorname{Dom}(f/g)(\operatorname{Id}+T^2) \subset \operatorname{Dom} f(\operatorname{Id}+T^2)$. Равенство (2.7) выполняется теперь на подпространстве $\operatorname{Dom} f(\operatorname{Id}+T^2)\cap\operatorname{Dom}(f/g)(\operatorname{Id}+T^2) = \operatorname{Dom}(f/g)(\operatorname{Id}+T^2)$. В силу того, что $(f/g)(\lambda) \geq c > 0$ для п. в. $\lambda \in \sigma(\operatorname{Id}+T^2)$, образ оператора $(f/g)(\operatorname{Id}+T^2)$ совпадает с пространством X. Далее, поскольку подпространство $\operatorname{Dom}(f/g)(\operatorname{Id}+T^2)$ плотно в пространстве X, оно плотно и в пространстве $H_T^f(X)$, так как оператор $f(\operatorname{Id}+T^2)$ ограничен и, следовательно, выполнена оценка $\|f(\operatorname{Id}+T^2)x\|_X \leq \gamma\cdot\|x\|_X$.

Для $x, y \in \operatorname{Dom}(f/g)(\operatorname{Id}+T^2)$ выполнена цепочка неравенств (2.8). Поэтому отображение $(f/g)(\operatorname{Id}+T^2)$ продолжается до изометрического изоморфизма пространства $H_T^f(X)$ на пространство $H_T^g(X)$.

Обратимся к диаграмме (2.6). Если функция g удовлетворяет условию (v), то таковы же и функции $\sqrt{\lambda}\cdot g(\lambda)$, $\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda)$, f. Поэтому отображение $(f/g)(\mathrm{Id}+T^2)$ продолжается до изометрического изоморфизма пространства $H^f_T(X)$ на пространство $H^g_T(X)$ и пространства $H_T^{\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda)}(X)$ на пространство $H_T^{\sqrt{\lambda}\cdot g(\lambda)}(X)$. Далее,

$$\mathrm{Dom}\, f(\mathrm{Id}+T^2)\subset \mathrm{Dom}(f/g)(\mathrm{Id}+T^2),$$

$$\mathrm{Dom}(\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)\subset \mathrm{Dom}(f/g)(\mathrm{Id}+T^2),$$

поскольку $(f/g)(\lambda)\le (1/\gamma)f(\lambda)\lambda^{1/2}$ на множестве $\sigma(\mathrm{Id}+T^2)$. Так как для $\lambda\in[0,+\infty[$ выполнены оценки

$$\begin{gathered}\lambda(f/g)(1+\lambda^2)\le(1/\gamma)\sqrt{1+\lambda^2}f(1+\lambda^2),\quad \lambda\gamma\le\sqrt{1+\lambda^2}f(1+\lambda^2),\\ \gamma f(1+\lambda^2)/g(1+\lambda^2)\le\sqrt{1+\lambda^2}f(1+\lambda^2),\end{gathered}\tag{2.9}$$

обе части равенства

$$T\cdot(f/g)(\mathrm{Id}+T^2)=(f/g)(\mathrm{Id}+T^2)\cdot T$$

определены на подпространстве $\mathrm{Dom}(\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)$. Поскольку функтор пополнения сохраняет коммутативность диаграмм, диаграмма (2.6) коммутативна. Подобным же образом рассматривается случай, когда функция $\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda)$ удовлетворяет условию (vi). Лемма доказана.

Отметим, что коммутативность диаграммы (2.6), вертикальные стрелки которой суть изометрические изоморфизмы, влечет одновременную нормальную разрешимость операторов $T: H_T^{\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda)}(X)\to H^f_T(X)$ и $T: H_T^{\sqrt{\lambda}\cdot g(\lambda)}(X)\to H^g_T(X)$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.4. *Пусть функция $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям* (i), (ii). *Если, кроме того, выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) *функция f удовлетворяет условию* (v);

2) *функция $\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda)$ удовлетворяет условию* (vi),

и оператор T как оператор, действующий на гильбертовом пространстве X, нормально разрешим, то нормально разрешим и оператор $T: H_T^{\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda)}(X)\to H^f_T(X)$. Обратно, если существует такая функция $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, что для нее выполнены условия (i), (ii) *и хотя бы одно из условий 1 или 2 и продолжение оператора $T: H_T^{\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda)}(X)\to H^f_T(X)$ на пополнения нормально разрешимо, то нормально разрешим и оператор T, действующий из X в X.*

Доказательство. Пусть, например, функция $\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda)$ удовлетворяет условию (vi). Тогда в силу леммы 2.4 диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T^u"] \arrow[d, "1/(\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)"'] & H_T^{1/\sqrt{\lambda}}(X) \arrow[d, "1/(\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)"] \\ H_T^{\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda)}(X) \arrow[r, "T^d"'] & H^f_T(X) \end{tikzcd}\tag{2.10}$$

коммутативна и вертикальные стрелки являются изометрическими изоморфизмами. Поэтому нормальная разрешимость T^d эквивалентна нормальной разрешимости T^u. С другой стороны, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_T^{\sqrt{\lambda}}(X) & \xrightarrow{T^w} & X \\ {\scriptstyle (\mathrm{Id}+T^2)^{1/2}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (\mathrm{Id}+T^2)^{1/2}} \\ X & \xrightarrow[T^u]{} & H_T^{1/\sqrt{\lambda}}(X) \end{array} \tag{2.11}$$

также коммутативна. Действительно, равенство

$$(\mathrm{Id}+T^2)^{1/2}T = T(\mathrm{Id}+T^2)^{1/2}$$

справедливо на подпространстве

$$D = \left\{ x \in X \mid \int\limits_0^{+\infty} \lambda^2(1+\lambda^2)\, d(E_\lambda x, x) < \infty \right\}.$$

Поскольку для $\lambda \in [0, +\infty[$ будет

$$n\lambda \geq \frac{\lambda\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\lambda/n},$$

если $n \in \mathbb{N}$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\mathrm{Dom}(T) \subset \mathrm{Dom}\left(\frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)}}{1+\sqrt{\lambda-1}/n}\right)(\mathrm{Id}+T^2).$$

Так как оператор $(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}$ определен на X, на подпространстве $\mathrm{Dom}(T)$ определена композиция

$$(\sqrt{\lambda(\lambda-1)})(\mathrm{Id}+T^2)\cdot(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}.$$

Поэтому

$$(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}(\mathrm{Dom}(T)) \subset \mathrm{Dom}(\sqrt{\lambda(\lambda-1)})(\mathrm{Id}+T^2) = D.$$

Пусть $u \in \mathrm{Dom}(T)$. Подобно тому, как это делалось при доказательстве предложения 2.3, можно доказать, что последовательность

$$\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}u\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset D$$

сходится к элементу u в норме пространства $H_T^{\sqrt{\lambda}}(X)$. Для этого достаточно заметить, что равенство

$$(\mathrm{Id}+T^2)^{1/2}\cdot(\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1} = (\mathrm{Id}+n^{-1}T)^{-1}\cdot(\mathrm{Id}+T^2)^{1/2}$$

справедливо на подпространстве $\mathrm{Dom}(\mathrm{Id}+T^2)^{1/2}$. Кроме того, отображение $(\mathrm{Id}+T^2)^{1/2}$ продолжается до изометрических изоморфизмов пространств $H_T^{\sqrt{\lambda}}(X)$ и X на пространства X и $H_T^{1/\sqrt{\lambda}}(X)$ соответственно. Таким образом, диаграмма (2.11) коммутативна, и операторы T^w и T^u нормально разрешимы одновременно.

Далее, как показано ранее, $\mathrm{Dom}(T) = \mathrm{Dom}(\mathrm{Id}+T^2)^{1/2}$. Кроме того, нормы $\|\cdot\|_{H_T^{\sqrt{\lambda}}(X)}$ и $\|\cdot\|_{\mathrm{Dom}(T)}$ эквивалентны на $\mathrm{Dom}(T)$. Поэтому $\mathrm{Im}\,T = \mathrm{Im}\,T^w$ и нормальная разрешимость оператора T^w эквивалентна нормальной разрешимости оператора T. Случай, когда функция f удовлетворяет условию (v), доказывается аналогично. Предложение доказано.

Предложение 2.5. *Пусть функция* $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ *удовлетворяет условиям* (i), (ii), (vi) *и, кроме того, для* $\sqrt{\lambda}f(\lambda)$ *выполнено условие* (v). *Тогда диаграмма*

$$\begin{tikzcd} H_T^{\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda)}(X) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "(\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)"'] & H_T^f(X) \arrow[d, "(\sqrt{\lambda}\cdot f(\lambda))(\mathrm{Id}+T^2)"] \\ X \arrow[r, "T"'] & H_T^{1/\sqrt{\lambda}}(X), \end{tikzcd} \tag{2.12}$$

вертикальные стрелки которой являются изометрическими изоморфизмами, коммутативна.

Доказательство аналогично доказательству коммутативности диаграмм предыдущего предложения.

Предложение 2.6. *Пусть функции* $f,g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ *удовлетворяют условиям* (i)–(iii) *и, кроме того, функция* f *удовлетворяет одному из условий* (v), (vi). *Тогда отображение* $\varepsilon_g^f:H_T^f(X)\to H_T^g(X)$ *является вложением.*

Доказательство. Если f удовлетворяет условию (v), то по лемме 1.5.2 пространство $\operatorname{Dom} f(\mathrm{Id}+T^2)$ полно в норме $\|f(\mathrm{Id}+T^2)\cdot\|$ и, следовательно, $\operatorname{Ker}\varepsilon_g^f=0$. Если f удовлетворяет условию (vi), то диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varepsilon^0_{g/f}"] \arrow[d, "(1/f)(\mathrm{Id}+T^2)"'] & H_T^{g/f}(X) \arrow[d, "(1/f)(\mathrm{Id}+T^2)"] \\ H_T^f(X) \arrow[r, "\varepsilon_g^f"'] & H_T^g(X) \end{tikzcd}$$

коммутативна и ее вертикальные стрелки являются изометрическими изоморфизмами. Действительно, по лемме 2.4 отображение $(1/f)(\mathrm{Id}+T^2)$ осуществляет изометрические изоморфизмы X на $H_T^f(X)$ и $H_T^{g/f}(X)$ на $H_T^g(X)$. Коммутативность диаграммы очевидна.

Поэтому отображение $(1/f)(\mathrm{Id}+T^2)$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства $\operatorname{Ker}\varepsilon^0_{g/f}$ на $\operatorname{Ker}\varepsilon_g^f$. Пространство X полно в норме $\|\cdot\|_X$, так что $\operatorname{Ker}\varepsilon^0_{g/f}=0$. Но тогда $\operatorname{Ker}\varepsilon_g^f=0$. Предложение доказано.

3. Гильбертовы комплексы.

Определение 3.1. Последовательность $\mathscr{A}=\big(A^i,d_A^i\big)_{i\in\mathbb{Z}}$ гильбертовых пространств A^i и их линейных отображений $d_A^i:A^i\to A^{i+1}$ называется *гильбертовым комплексом*, если для каждого $i\in\mathbb{Z}$ операторы d_A^i замкнуты и плотно определены, причем $\operatorname{Im} d_A^{i-1}\subset\operatorname{Ker} d_A^i$.

Скалярное произведение в пространстве A^i будем обозначать через $(\cdot,\cdot)_{A^i}$.

Определение 3.2. Пусть $\mathscr{A}=(A^i,d_A^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ — гильбертов комплекс. *Оператором Лапласа* на пространстве A^i называется оператор

$$\Delta_{A^i}=\big(d_A^i\big)^*d_A^i+d_A^{i-1}\big(d_A^{i-1}\big)^*$$

с областью определения

$$\operatorname{Dom}(\Delta_{A^i})=\big\{x\in\operatorname{Dom}\big(d_A^i\big)\cap\operatorname{Dom}\big(\big(d_A^{i-1}\big)^*\big) \\ \mid d_A^i x\in\operatorname{Dom}\big(\big(d_A^i\big)^*\big),\ \big(d_A^{i-1}\big)^*x\in\operatorname{Dom}\big(d_A^{i-1}\big)\big\}.$$

Предложение 3.1 [7]. *Если операторы d_A^i, d_A^{i-1} замкнуты и плотно определены, то оператор Δ_{A^i} замкнут и плотно определен. Если операторы d_A^i, d_A^{i-1} нормально (компактно) разрешимы, то оператор Δ_{A^i} нормально (компактно) разрешим.*

Для гильбертова комплекса $\mathscr{A} = \bigl(A^i, d_A^i\bigr)_{i\in\mathbb{Z}}$ введем следующие обозначения:

$$\overline{H}^i\mathscr{A} \rightleftharpoons \operatorname{Ker} d_A^i/\overline{\operatorname{Im} d_A^{i-1}}, \quad \mathscr{H}^i\mathscr{A} \rightleftharpoons \operatorname{Ker} d_A^i \cap \operatorname{Ker}\bigl(d_A^{i-1}\bigr)^*.$$

Пространства $\overline{H}^i\mathscr{A}$ каноническим образом изоморфны пространствам $\operatorname{Ker} d_A^i \cap \bigl(\operatorname{Im} d_A^{i-1}\bigr)^{\perp} = \mathscr{H}^i\mathscr{A}$ и называются *редуцированными когомологиями комплекса* $\mathscr{A}$.

Лемма 3.1. $\mathscr{H}^i\mathscr{A} = \operatorname{Ker}\Delta_{A^i}$.

Доказательство. Ясно, что $\mathscr{H}^i\mathscr{A} \subset \operatorname{Ker}\Delta_{A^i}$. Обратно, если $x \in \operatorname{Ker}\Delta_{A^i}$, то

$$(\Delta_{A^i}x, x)_{A^i} = \bigl\|d_A^i x\bigr\|^2_{A^{i+1}} + \bigl\|\bigl(d_A^{i-1}\bigr)^* x\bigr\|^2_{A^{i-1}} = 0.$$

Отсюда $x \in \mathscr{H}^i\mathscr{A}$.

Лемма 3.2 (разложение Ходжа). *Для любого гильбертова комплекса $\mathscr{A} = \bigl(A^i, d_A^i\bigr)_{i\in\mathbb{Z}}$ выполнено равенство*

$$A^i = \overline{\operatorname{Im} d_A^{i-1}} \oplus \overline{\operatorname{Im}(d_A^i)^*} \oplus \mathscr{H}^i\mathscr{A}.$$

Для каждого $i \in \mathbb{Z}$ в гильбертовом комплексе $\mathscr{A}$ операторы $\operatorname{Id} + \Delta_{A^i}$ плотно определены, самосопряженны и строго положительны: $((\operatorname{Id} + \Delta_{A^i})x, x)_{A^i} \geq (x, x)_{A^i}$ для любого $x \in \operatorname{Dom}(\operatorname{Id} + \Delta_{A^i})$.

Пусть функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям 2(i) и 2(ii). Тогда для каждого $i \in \mathbb{Z}$ определены пространства $H^{f,i}(\mathscr{A})$, представляющие собой пополнения $\operatorname{Dom} f(\operatorname{Id} + \Delta_{A^i})$ в норме $\|f(\operatorname{Id} + \Delta_{A^i}) \cdot\|_{A^i}$.

Говорят, что гильбертово пространство X является *ортогональной суммой* семейства своих замкнутых подпространств $(X_\nu | \nu \in \mathbb{N})$, если эти подпространства попарно ортогональны и линейная оболочка множества $\bigcup\limits_{\nu\in\mathbb{N}} X_\nu$ плотна в X. Для ортогональной суммы семейства $(X_\nu \mid \nu \in \mathbb{N})$ будем использовать обозначение $\bigoplus\limits_{\nu\in\mathbb{N}} X_\nu$. Будем говорить, что ортогональные разложения $X = \bigoplus\limits_{\nu\in\mathbb{N}} X_\nu$ и $Y = \bigoplus\limits_{\nu\in\mathbb{N}} Y_\nu$ *приводят оператор* $T : X \to Y$, если $P'_\nu \cdot T \subset T \cdot P_\nu$, где $P_\nu : X \to X$, $P'_\nu : Y \to Y$ — ортогональные проекторы на X_ν, Y_ν соответственно. Обозначим через $T_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ сужение оператора T с $\operatorname{Dom}(T_\nu) = X_\nu \cap \operatorname{Dom}(T)$. Ясно, что $\operatorname{Dom}(T_\nu) = P_\nu(\operatorname{Dom}(T))$.

Если ортогональные разложения $X = \bigoplus\limits_{\nu\in\mathbb{N}} X_\nu$ и $Y = \bigoplus\limits_{\nu\in\mathbb{N}} Y_\nu$ приводят оператор $T : X \to Y$, то будем писать $T = \bigoplus\limits_{\nu\in\mathbb{N}} T_\nu$.

Лемма 3.3 [8]. *Если ортогональные разложения $X = \bigoplus\limits_{\nu\in\mathbb{N}} X_\nu$ и $Y = \bigoplus\limits_{\nu\in\mathbb{N}} Y_\nu$ приводят замкнутый оператор T, то $\operatorname{Dom}(T) = \bigoplus\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom}(T_\nu)$, т. е. $x \in \operatorname{Dom}(T)$ тогда и только тогда, когда $P_\nu x \in \operatorname{Dom}(T_\nu)$ для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ и $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \|T_\nu P_\nu x\|_Y < \infty$; кроме того, $Tx = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} T_\nu P_\nu x$ для любого $x \in \operatorname{Dom}(T)$.*

Если в гильбертовом комплексе $\mathscr{A} = \left(A^i, d_A^i\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ каждый член A^i разложен в ортогональную сумму своих подпространств $A^i = \bigoplus\limits_{\nu\in\mathbb{N}} A^i_\nu$, причем эти разложения приводят операторы d_A^i, то будем говорить, что комплекс $\mathscr{A}$ *разложен в ортогональную сумму* своих подкомплексов $\mathscr{A}_\nu = \left(A^i_\nu, d^i_{A_\nu}\right)_{i\in\mathbb{Z},\nu\in\mathbb{N}}$. Обозначим в гильбертовом комплексе $\mathscr{A}$ символом $C^i(\mathscr{A})$ ортогональное дополнение в пространстве A^i подпространства $Z^i(\mathscr{A}) = \operatorname{Ker} d_A^i$, а символом $\overline{B^i}(\mathscr{A})$ — подпространство $\overline{\operatorname{Im} d_A^{i-1}}$.

В силу лемм 3.2 и 1.3 имеется ортогональное разложение

$$A^i = C^i(\mathscr{A}) \oplus \overline{B^i}(\mathscr{A}) \oplus \overline{H}^i\mathscr{A},$$

позволяющее расщепить комплекс $\mathscr{A}$ в ортогональную сумму комплексов вида

$$\mathscr{A}'(i) : 0 \to \dots \to C^i(\mathscr{A}) \xrightarrow{\hat{d}_A^i} \overline{B^{i+1}}(\mathscr{A}) \to 0 \to \dots \to 0$$

и

$$\mathscr{A}''(i) : 0 \to \dots \to 0 \to \overline{H}^i\mathscr{A} \to 0 \to \dots \to 0,$$

причем $\hat{d}_A^i x = d_A^i x$, $x \in C^i(\mathscr{A})$ и оператор $\hat{d}_A^i$ замкнут, инъективен и имеет плотный образ. Таким образом, редуцированные когомологии комплекса $\mathscr{A}'(i)$ равны нулю во всех степенях, редуцированные когомологии комплекса $\mathscr{A}''(i)$ отличны от нуля лишь в размерности i и совпадают с пространствами $\overline{H}^i\mathscr{A}$.

Легко видеть, что данное разложение приводит оператор $\operatorname{Id} + \Delta_{A^i}$:

$$\operatorname{Id} + \Delta_{A^i} = \left(\operatorname{Id}_{C^i} + \Delta^C_{A^i}\right) \oplus \operatorname{Id}_{\overline{H}^i\mathscr{A}} \oplus \left(\operatorname{Id}_{\overline{B^i}} + \Delta^B_{A^i}\right),$$

где

$$\operatorname{Id}_{C^i} + \Delta^C_{A^i} = \operatorname{Id}_{C^i} + \left(\hat{d}_A^i\right)^* \hat{d}_A^i, \quad \operatorname{Id}_{\overline{B^i}} + \Delta^B_{A^i} = \operatorname{Id}_{\overline{B^i}} + \hat{d}_A^{i-1}\left(\hat{d}_A^{i-1}\right)^*.$$

Но тогда для любой функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющей условиям 2(i) и 2(ii), имеем

$$f(\operatorname{Id} + \Delta_{A^i}) = f\left(\operatorname{Id}_{C^i} + \Delta^C_{A^i}\right) \oplus \rho \operatorname{Id}_{\overline{H}^i\mathscr{A}} \oplus f\left(\operatorname{Id}_{\overline{B^i}} + \Delta^B_{A^i}\right),$$

где $\rho = f(1) > 0$. Поэтому имеется ортогональное разложение

$$H^{f,i}(\mathscr{A}) = H^{f,i}_C(\mathscr{A}) \oplus \overline{H^i}\mathscr{A} \oplus H^{f,i}_B(\mathscr{A}). \tag{3.1}$$

Как показано в предыдущем разделе, для любой пары функций $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условиям (i)–(iii), имеется ограниченное отображение $\varepsilon^{f,i}_g : H^{f,i}(\mathscr{A}) \to H^{g,i}(\mathscr{A})$. Разложение (3.1) приводит оператор $\varepsilon^{f,i}_g$:

$$\varepsilon^{f,i}_g = \varepsilon^{f,i}_{g,C} \oplus \rho \operatorname{Id}_{\overline{H}^i(\mathscr{A})} \oplus \varepsilon^{f,i}_{g,B},$$

где $\varepsilon^{f,i}_{g,C} : H^{f,i}_C(\mathscr{A}) \to H^{g,i}_C(\mathscr{A})$, $\varepsilon^{f,i}_{g,B} : H^{f,i}_B(\mathscr{A}) \to H^{g,i}_B(\mathscr{A})$.

Лемма 3.4 (полярное разложение [9, 10]). *Пусть T — плотно определенный замкнутый оператор, действующий из одного гильбертова пространства X в другое гильбертово пространство Y. Тогда существуют плотно определенный самосопряженный положительный оператор $G : X \to X$ и изометрический оператор $V : \overline{\operatorname{Im} G} \to \overline{\operatorname{Im} T}$ такие, что $T = VG$ и $\operatorname{Dom}(T) = \operatorname{Dom}(G)$.*

Оператор V отображает $\overline{\operatorname{Im} G}$ на $\overline{\operatorname{Im} T}$ и может быть продолжен до ограниченного оператора, действующего из пространства X в пространство Y, если положить $Vx = 0$ при $x \in (\operatorname{Im} G)^{\perp} = \operatorname{Ker} G$. Для сопряженного к T оператора имеем $T^* = GV^*$ и $T^*T = GV^*VG = G^2$. Если оператор T инъективен и имеет плотный образ, то теми же свойствами обладает и оператор G, а V — изометрия X на Y. Рассмотрим теперь полярные разложения операторов $\hat{d}_A^i$ и $\left(\hat{d}_A^{i-1}\right)^*$ в гильбертовом комплексе $\mathscr{A}$:

$$\hat{d}_A^i = V^i Q^i, \quad (\hat{d}_A^{i-1})^* = U^i R^i.$$

Здесь операторы V^i и U^i — изометрии:

$$V^i : C^i(\mathscr{A}) \to \overline{B^{i+1}}(\mathscr{A}), \quad U^i : \overline{B^i}(\mathscr{A}) \to C^{i-1}(\mathscr{A}),$$

а операторы $Q^i : C^i(\mathscr{A}) \to C^i(\mathscr{A})$ и $R^i : \overline{B^i}(\mathscr{A}) \to \overline{B^i}(\mathscr{A})$ плотно определены, самосопряженны, положительны, инъективны и имеют плотные образы.

Таким образом, пространство $H_C^{f,i}(\mathscr{A})$ — это не что иное, как пополнение $\operatorname{Dom} f(\operatorname{Id}_{C^i} + (Q^i)^2)$ по норме $\|f(\operatorname{Id}_{C^i} + (Q^i)^2) \cdot \|_{C^i}$, а пространство $H_B^{f,i}(\mathscr{A})$ — пополнение $\operatorname{Dom} f(\operatorname{Id}_{\overline{B^i}} + (R^i)^2)$ по норме $\|f(\operatorname{Id}_{\overline{B^i}} + (R^i)^2) \cdot \|_{\overline{B^i}}$.

Предложение 3.2. *Для гильбертова комплекса $\mathscr{A} = \left(A^i, d_A^i\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ справедливы следующие утверждения:*

1) *если оператор $d_A^{i_0}$ компактно разрешим, то для любой пары функций $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условиям* (i)–(iv), *операторы $\varepsilon_{g,C}^{f,i_0}$ и $\varepsilon_{g,B}^{f,i_0+1}$ компактны;*

2) *если существует такая пара функций $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, что f и g удовлетворяют условиям* (i)–(iv) *и отображение $\varepsilon_{g,C}^{f,i_0}$ или $\varepsilon_{g,B}^{f,i_0+1}$ компактно, то оператор $d_A^{i_0}$ компактно разрешим.*

Доказательство. Если оператор $d_A^{i_0}$ компактно разрешим, то таков же и оператор $\hat{d}_A^{i_0}$ и, следовательно, операторы Q^{i_0} и R^{i_0+1} компактно разрешимы. Обратно, компактная разрешимость одного из операторов Q^{i_0} или R^{i_0+1} влечет компактную разрешимость оператора $d_A^{i_0}$. Теперь утверждение теоремы следует из предложения 2.2.

Теорема 3.1. *Для гильбертова комплекса $\mathscr{A} = \left(A^i, d_A^i\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ справедливы следующие утверждения:*

1) *если операторы $d_A^{i_0}$, $d_A^{i_0-1}$ компактно разрешимы,* $\dim \overline{H}^{i_0}\mathscr{A} < \infty$, *то для любой пары функций $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условиям* (i)–(iv) *оператор ε_g^{f,i_0} компактен;*

2) *если существует такая пара функций $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, что f и g удовлетворяют условиям* (i)–(iv) *и отображение ε_g^{f,i_0} компактно, то операторы $d_A^{i_0}$, $d_A^{i_0-1}$ компактно разрешимы и* $\dim \overline{H}^{i_0}\mathscr{A} < \infty$.

Плотно определенный замкнутый оператор $T : X \to X$ на гильбертовом пространстве X называется *унитарно эквивалентным плотно определенному замкнутому оператору* $S : Y \to Y$ на гильбертовом пространстве Y, если существует унитарный оператор $U : X \to Y$ такой, что $\operatorname{Im} U = Y$, $SU = UT$ или $S = UTU^{-1} = UTU^*$. Это означает, что $\operatorname{Dom}(S)$ есть в точности образ $\operatorname{Dom}(T)$ при унитарном отображении U и равенство $SUx = UTx$ справедливо для любого $x \in \operatorname{Dom}(T)$.

Рассмотрим оператор $V^{i_0}(\operatorname{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2)(V^{i_0})^* : \overline{B}^{i_0+1} \to \overline{B}^{i_0+1}$. Имеем

$$V^{i_0}(\operatorname{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2)(V^{i_0})^* = V^{i_0}(V^{i_0})^* + V^{i_0}Q^{i_0}Q^{i_0}(V^{i_0})^* = \operatorname{Id}_{\overline{B}^{i_0+1}} + \hat{d}_A^{i_0}\left(\hat{d}_A^{i_0}\right)^*.$$

С другой стороны,

$$(\mathrm{Id}_{\overline{B}^{i_0+1}} + (R^{i_0+1})^2) = \mathrm{Id}_{\overline{B}^{i_0+1}} + R^{i_0+1}(U^{i_0+1})^* U^{i_0+1} R^{i_0+1} = \mathrm{Id}_{\overline{B}^{i_0+1}} + \hat{d}_A^{i_0}\big(\hat{d}_A^{i_0}\big)^*.$$

Таким образом, операторы $V^{i_0}(\mathrm{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2)(V^{i_0})^*$ и $(\mathrm{Id}_{\overline{B}^{i_0+1}} + (R^{i_0+1})^2)$ определены на $\mathrm{Dom}(\mathrm{Id}_{\overline{B}^{i_0+1}} + (R^{i_0+1})^2)$ и на этом подпространстве совпадают. Иначе говоря, поскольку операторы $V^{i_0} : C^{i_0}(\mathscr{A}) \to \overline{B}^{i_0+1}(\mathscr{A})$ и $(V^{i_0})^* : \overline{B}^{i_0+1}(\mathscr{A}) \to C^{i_0}(\mathscr{A})$ представляют собой взаимно обратные унитарные операторы, отображения $(\mathrm{Id}_{\overline{B}^{i_0+1}} + (R^{i_0+1})^2)$ и $V^{i_0}(\mathrm{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2)(V^{i_0})^*$ унитарно эквивалентны. Отсюда

$$V^{i_0}(\mathrm{Dom}(\mathrm{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2)) = \mathrm{Dom}(\mathrm{Id}_{\overline{B}^{i_0+1}} + (R^{i_0+1})^2)$$

и

$$V^{i_0}(\mathrm{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2) = (\mathrm{Id}_{\overline{B}^{i_0+1}} + (R^{i_0+1})^2)V^{i_0}$$

на подпространстве $\mathrm{Dom}(\mathrm{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2)$. Но тогда в силу унитарной эквивалентности имеем

$$V^{i_0} f(\mathrm{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2) = f(\mathrm{Id}_{\overline{B}^{i_0+1}} + (R^{i_0+1})^2)V^{i_0}$$

на подпространстве $\mathrm{Dom}\, f(\mathrm{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2)$ для любой функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющей условиям (i) и (ii).

Унитарный оператор $V^{i_0} : C^{i_0}(\mathscr{A}) \to \overline{B}^{i_0+1}(\mathscr{A})$ осуществляет унитарную изометрию пространства $H_C^{f,i_0}(\mathscr{A})$ на пространство $H_B^{f,i_0+1}(\mathscr{A})$. Действительно,

$$V^{i_0}(\mathrm{Dom}\, f(\mathrm{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2)) = \mathrm{Dom}\, f(\mathrm{Id}_{\overline{B}^{i_0+1}} + (R^{i_0+1})^2),$$

и для любых $x, y \in \mathrm{Dom}\, f(\mathrm{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2)$ имеем

$$\begin{aligned}
&(V^{i_0}x, V^{i_0}y)_{H_B^{f,i_0+1}(\mathscr{A})} \\
&\quad = (f(\mathrm{Id}_{\overline{B}^{i_0+1}} + (R^{i_0+1})^2)V^{i_0}x, f(\mathrm{Id}_{\overline{B}^{i_0+1}} + (R^{i_0+1})^2)V^{i_0}y)_{\overline{B}^{i_0+1}(\mathscr{A})} \\
&\quad\quad = (V^{i_0} f(\mathrm{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2)x, V^{i_0} f(\mathrm{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2)y)_{\overline{B}^{i_0+1}(\mathscr{A})} \\
&\quad\quad\quad = (f(\mathrm{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2)x, f(\mathrm{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2)y)_{C^{i_0}(\mathscr{A})} = (x,y)_{H_C^{f,i_0}(\mathscr{A})}.
\end{aligned}$$

Поэтому V^{i_0} индуцирует на пополнениях унитарную изометрию, которую мы будем обозначать символом V^{f,i_0}.

Из предложения 2.3 следует, что если функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям (i), (ii) и хотя бы одному из условий (v) или (vi), то оператор Q^{i_0}, действующий на $C^{i_0}(\mathscr{A})$, индуцирует ограниченный всюду определенный оператор $Q^{f,i_0} : H_C^{f(\lambda)\sqrt{\lambda},i_0}(\mathscr{A}) \to H_C^{f,i_0}(\mathscr{A})$.

Пусть гильбертов комплекс $\mathscr{A} = (A^i, d_A^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет следующему условию:

(F) $A^i = 0$ при $i < 0$, и существует такое целое $N > 0$, что $A^i = 0$ при $i > N$

Такие комплексы мы будем называть *конечными.*

Пусть теперь $\mathscr{A}$ — конечный гильбертов комплекс и функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяют условиям (i), (ii) и, кроме того, условию:

(G_k) для любого $l \in \{0, \dots, N\}$ функция $\lambda^{\frac{k-l}{2}} f(\lambda)$ удовлетворяет хотя бы одному из условий (v), (vi) для некоторого $k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим комплексы

$$\mathscr{H}'(i_0, f, m) : 0 \to \dots \to H_C^{f(\lambda)\lambda^{\frac{m}{2}},i_0}(\mathscr{A}) \xrightarrow{\hat{d}_{H,f}^{m,i_0}} H_B^{f(\lambda)\lambda^{\frac{m-1}{2}},i_0+1}(\mathscr{A}) \to 0 \to \dots \to 0$$

и

$$\mathscr{H}''(i_0,f,m): 0 \to \dots \to 0 \to \overline{H}^{i_0}\mathscr{A} \to 0 \to \dots \to 0.$$

Здесь

$$\hat{d}^{m,i_0}_{H,f} = V^{f(\lambda)\lambda^{\frac{m-1}{2}},i_0} Q^{f(\lambda)\lambda^{\frac{m-1}{2}},i_0},$$

$$\mathrm{Dom}(\hat{d}^{m,i_0}_{H,f}) = \mathrm{Dom}(Q^{f(\lambda)\lambda^{\frac{m-1}{2}},i_0}) = H_C^{f(\lambda)\lambda^{\frac{m}{2}},i_0}(\mathscr{A}),$$

$$\operatorname{Ker}\hat{d}^{m,i_0}_{H,f} = \operatorname{Ker} Q^{f(\lambda)\lambda^{\frac{m-1}{2}},i_0} = 0,$$

отображение

$$V^{f(\lambda)\lambda^{\frac{m-1}{2}},i_0} : H_C^{f(\lambda)\lambda^{\frac{m-1}{2}},i_0}(\mathscr{A}) \to H_B^{f(\lambda)\lambda^{\frac{m-1}{2}},i_0+1}(\mathscr{A})$$

— унитарная изометрия.

Отметим, что образ оператора $\hat{d}^{1,i_0}_{H,1}$ совпадает с образом оператора $\hat{d}^{i_0}_A$, поскольку оператор $\hat{d}^{1,i_0}_{H,1}$ индуцирован оператором $\hat{d}^{i_0}_A$, т. е. $\hat{d}^{1,i_0}_{H,1}x = \hat{d}^{i_0}_A x$ для любого $x \in H_C^{\lambda^{\frac{1}{2}},i_0}(\mathscr{A})$ и, кроме того,

$$\mathrm{Dom}\big(\hat{d}^{1,i_0}_{H,1}\big) = H_C^{\lambda^{\frac{1}{2}},i_0}(\mathscr{A}) = \mathrm{Dom}((\mathrm{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2)^{1/2}) = \mathrm{Dom}(Q^{i_0}) = \mathrm{Dom}\big(\hat{d}^{i_0}_A\big).$$

Точно так же образ оператора $\hat{d}^{-1,i_0}_{H,1}$ совпадает с образом оператора $\hat{d}^{i_0}_A$. Это следует из коммутативности диаграммы (2.11) и диаграммы

$$\begin{tikzcd}
C^{i_0}(\mathscr{A}) \arrow[r, "V^{i_0}"] \arrow[d, "(\mathrm{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2)^{1/2}"'] & \overline{B}^{i_0+1}(\mathscr{A}) \arrow[d, "(\mathrm{Id}_{C^{i_0}} + (Q^{i_0})^2)^{1/2}"] \\
H_C^{\lambda^{-1/2},i_0}(\mathscr{A}) \arrow[r, "V^{\lambda^{-1/2},i_0}"'] & H_B^{\lambda^{-\frac{1}{2}},i_0+1}(\mathscr{A})
\end{tikzcd}.$$

Поскольку комплекс $\mathscr{A}$ конечен и удовлетворяет условию (G_k) для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, в силу предложений 2.5 и 2.4 операторы $Q^{f(\lambda)\lambda^{\frac{m-1}{2}},i_0}$ имеют плотные в $H_C^{f(\lambda)\lambda^{\frac{m-1}{2}},i_0}(\mathscr{A})$ образы для любого $m \in \{k,\dots,k-N+1\}$ и, следовательно, таковы же и операторы $\hat{d}^{m,i_0}_{H,f}$. Кроме того, ввиду предложения 2.4 и коммутативности диаграмм (2.11) и (2.12) оператор $\hat{d}^{i_0}_A$ нормально разрешим тогда и только тогда, когда нормально разрешим оператор $\hat{d}^{m,i_0}_{H,f}$.

Таким образом, редуцированные когомологии комплекса $\mathscr{H}'(i_0,f,m)$ тривиальны во всех степенях, в то время как редуцированные когомологии комплекса $\mathscr{H}''(i_0,f,m)$ отличны от нуля только в степени i_0 и совпадают с пространствами $\overline{H}^{i_0}\mathscr{A}$.

Поскольку для любой функции $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, для которой выполнены условия (i), (ii), имеется ортогональное разложение (3.1):

$$H^{g,i}(\mathscr{A}) = H_C^{g,i}(\mathscr{A}) \oplus \overline{H^i}\mathscr{A} \oplus H_B^{g,i}(\mathscr{A}),$$

то любому конечному гильбертову комплексу $\mathscr{A}$:

$$0 \to A^0 \xrightarrow{d_A^0} A^1 \to \dots \to A^i \xrightarrow{d_A^i} A^{i+1} \to \dots \to A^N \to 0, \tag{3.2}$$

и функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющей условиям (i), (ii) и условию (G_k), можно поставить в соответствие ассоциированный с (3.2) «соболевский комплекс» $\mathscr{H}_k^f$ с ограниченными всюду определеннными операторами в качестве дифференциалов:

$$0 \to H^{f(\lambda)\lambda^{\frac{k}{2}},0}(\mathscr{A}) \xrightarrow{d_{H,f}^{k,0}} H^{f(\lambda)\lambda^{\frac{k-1}{2}},1}(\mathscr{A}) \to \cdots \to H^{f(\lambda)\lambda^{\frac{k-N}{2}},N}(\mathscr{A}) \to 0, \qquad (3.3)$$

расщепляющийся в ортогональную сумму подкомплексов вида $\mathscr{H}'(i_0, f, m)$ и $\mathscr{H}''(i_0, f, m)$, $m \in \{k, \dots, k-N\}$, причем оператор $d_{H,f}^{m,i_0}$ индуцирует оператор $\hat{d}_{H,f}^{m,i_0}$ на пространстве $H_C^{f(\lambda)\lambda^{\frac{m}{2}},i_0}(\mathscr{A})$ и нулевой оператор на пространстве $\overline{H}^{i_0}\mathscr{A} \oplus H_B^{f(\lambda)\lambda^{\frac{m}{2}},i_0}(\mathscr{A})$. Итогом изложенного выше служит

Теорема 3.2. *Для конечного гильбертова комплекса* $\mathscr{A} = \left(A^i, d_A^i\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ *и функции* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *удовлетворяющей условиям* (i), (ii) *и* (G_k) *для некоторого* $k \in \mathbb{Z}$, *справедливы следующие утверждения:*

1) *оператор* $d_A^{i_0}$ *нормально разрешим тогда и только тогда, когда нормально разрешим оператор* $d_{H,f}^{k-i_0,i_0}$;

2) *редуцированные когомологии* $\overline{H}^{i_0}\mathscr{A}$ *комплекса* $\mathscr{A}$ *совпадают с редуцированными когомологиями комплекса* $\mathscr{H}_k^f$ *в степени* i_0.

В частности, комплексы $\mathscr{A}$ *и* $\mathscr{H}_k^f$ *фредгольмовы одновременно.*

Если комплекс $\mathscr{A}$ *не удовлетворяет условию конечности, то условие* (G_k) *следует заменить условием:*

(G_∞) *для любого* $k \in \mathbb{Z}$ *функция* $\lambda^{\frac{k}{2}} f(\lambda)$ *удовлетворяет хотя бы одному из условий* (v), (vi).

В качестве примера рассмотрим бесконечный комплекс $\mathscr{A} = \left(A^i, d_A^i\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ и функцию $f(\lambda) = \lambda^{\frac{s}{2}}$, где $s \in \mathbb{R}$. Введем обозначения

$$H^{\sigma,i}(\mathscr{A}) = H^{\lambda^{\frac{\sigma}{2}},i}(\mathscr{A}), \quad d_H^{\sigma,i} = d_{H,\lambda^{\frac{s}{2}}}^{\sigma,i},$$

где $\sigma = s+m$, $m \in \mathbb{Z}$. Комбинируя теорему 3.2 и предложения 3.2 и 2.6, выводим

Следствие 3.1. *Для гильбертова комплекса* $\mathscr{A} = \left(A^i, d_A^i\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ *справедливы следующие утверждения.*

1. *Операторы* $\varepsilon_{t,C}^{s,i_0} : H_C^{s,i_0}(\mathscr{A}) \to H_C^{t,i_0}(\mathscr{A})$, $\varepsilon_{t,B}^{s,i_0+1} : H_B^{s,i_0+1}(\mathscr{A}) \to H_B^{t,i_0+1}(\mathscr{A})$ *ограничены для всех пар* $(s,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *таких, что* $s \geq t$, *и являются вложениями.*

2. *Если оператор* $d_A^{i_0}$ *компактно разрешим, то операторы вложения* $\varepsilon_{t,C}^{s,i_0}$ *и* $\varepsilon_{t,B}^{s,i_0+1}$ *компактны для всех пар* $(s,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *таких, что* $s > t$.

3. *Если существует такая пара* $(s,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $s \geq t$, *что вложение* $\varepsilon_{t,C}^{s,i_0}$ *или вложение* $\varepsilon_{t,B}^{s,i_0+1}$ *компактно, то оператор* $d_A^{i_0}$ *компактно разрешим.*

В частности, вложение ε_t^{s,i_0}, *где* $(s,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $s > t$, *компактно тогда и только тогда, когда операторы* $d_A^{i_0-1}$, $d_A^{i_0}$ *компактно разрешимы и* $\dim \overline{H}^{i_0}\mathscr{A} < \infty$.

4. *Оператор* $d_A^{i_0}$ *нормально разрешим тогда и только тогда, когда нормально разрешим оператор* d_H^{s,i_0}, *где* $s \in \mathbb{R}$ *любое.*

5. *Пространство* $\overline{H}^{i_0}\mathscr{A}$ *совпадает с пространством* $\operatorname{Ker} d_H^{s,i_0}/\overline{\operatorname{Im} d_H^{s+1,i_0-1}}$ *для любого* $s \in \mathbb{R}$. *Здесь замыкание берется в пространстве* $H^{s,i_0}(\mathscr{A})$.

В частности, комплексы $\mathscr{A}$ *и* $\mathscr{H}^{\lambda^{s/2}}$ *фредгольмовы одновременно.*

Автор выражает искреннюю благодарность профессору В. И. Кузьминову за постановку задачи и ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bruning J., Lesh M.* Hilbert complexes // J. Funct. Anal. 1992. V. 108. P. 88–132.
2. *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Гомологические аспекты теории банаховых комплексов // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 893–904.
3. *Dodziuk J.* Sobolev spaces of differential forms and de Rham–Hodge isomorphism // J. Differential Geom. 1981. V. 16. P. 63–73.
4. *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Метод разделения переменных в задачах о нормальной и компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 385–396.
5. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О нормальной и компактной разрешимости линейных операторов // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 49–59.
6. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
7. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О нормальной и компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования при однородных краевых условиях // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 4. С. 82–96.
8. *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О разложении в ортогональную прямую сумму комплексов де Рама искривленных произведений римановых многообразий // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 354–368.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
10. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

Статья поступила 10 марта 2003 г.

Глотко Николай Владимирович
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090