Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 515.146

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ В КАТЕГОРИИ b–ПРОСТРАНСТВ

Б. Аксу

Аннотация: Для ядерного b-пространства N показано, что если Ω — пространство с конечной или σ-конечной мерой и $1 \leq p \leq \infty$, то функторы $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, N\varepsilon\cdot)$ и $N\varepsilon L^p(\Omega, \cdot)$ изоморфны в категории b-пространств Вальбрука.

Ключевые слова: εb-пространство, ε-произведение, L^p-пространство.

1. Введение

Пусть N — ядерное b-пространство. Наша цель — доказать, что если Ω — пространство с конечной или σ-конечной мерой и $1 \leq p \leq \infty$, то функторы $L^p(\Omega, N\varepsilon\cdot)$ и $N\varepsilon L^p(\Omega, \cdot)$ совпадают в категории b-пространств **b**.

Так как N — ядерное b-пространство, известно, что функторы $N\varepsilon.$ и $N\otimes_{\pi_b}.$ изоморфны в категории **b** [1]. Этот результат тем самым верен и для функтора проективного тензорного произведения $\otimes_{\pi_b}$. Достаточно доказать указанные изоморфизмы, когда E — банахово пространство, и мы будем рассматривать ядерное b-пространство N как объединение банаховых пространств N_B, где каждое N_B изоморфно банахову пространству l^p.

Введем обозначения и напомним некоторые определения, необходимые далее в этой статье. Пусть **EV** — категория векторных пространств и линейных отображений над полем скаляров $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и **Ban** — подкатегория банаховых пространств и ограниченных линейных отображений.

1.1. Пусть E — вещественное или комплексное векторное пространство и B — абсолютно выпуклое множество в E. Будем говорить, что $E_B = \bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda B$ — *векторное пространство, порожденное множеством* B. Функционал Минковского B является полунормой на E_B. Он будет нормой в том и только в том случае, если B не содержит ненулевого подпространства в E. Множество B *наполняющее*, если его функционал Минковского является банаховой нормой.

Ограниченная структура β на векторном пространстве E определяется посредством совокупности «ограниченных» подмножеств в E, обладающей следующими свойствами:

(1) каждое конечное множество в E ограничено,

(2) объединение двух ограниченных множеств ограничено,

(3) каждое подмножество ограниченного множества ограничено,

(4) гомотетический образ ограниченного множества ограничен,

(5) каждое ограниченное подмножество содержится в наполняющем ограниченном множестве.

b-Пространство (E, β_E) является векторным пространством E с ограниченностью β_E. Подпространство F b-пространства E *борнологически замкнуто*,

© 2003 Аксу Б.

если для каждого наполняющего ограниченного B в E множество $F \cap E_B$ замкнуто в E_B.

Если (E, β_E) и (F, β_F) — два b-пространства, то линейное отображение $u : E \to F$ ограничено, если оно отображает подмножества из E в ограниченные подмножества в F. Отображение $u : E \to F$ *борнологически сюръективно*, если для любого $B' \in \beta_F$ найдется $B \in \beta_E$ такое, что $u(B) = B'$.

Обозначим через $\mathbf{b}(E_1, E_2)$ пространство всех ограниченных линейных отображений $E_1 \to E_2$ и через $\mathbf{b}$ — категорию b-пространств и ограниченных линейных отображений. Дальнейшую информацию о b-пространствах можно найти в [1, 2].

1.2. Если E, F — банаховы пространства, то ε-произведение E и F — это банахово пространство линейных отображений $E' \to F$, ограничения которых на замкнутый единичный шар $B_{E'}$ в E' $\sigma(E', E)$-непрерывны. Это банахово пространство относительно нормы равномерной сходимости на $B_{E'}$, будем обозначать его через $E\varepsilon F$. ε-Произведение симметрично, т. е. банаховы пространства $E\varepsilon F$ и $F\varepsilon E$ изометрически изоморфны (см. [3, предложение 2]). Если E_i и F_i — банаховы пространства и $u_i : E_i \longrightarrow F_i$ — ограниченные линейные отображения $(i = 1, 2)$, то ε-произведение u_1 и u_2 — это непрерывное линейное отображение $u_1 \varepsilon u_2 : E_1 \varepsilon E_2 \to F_1 \varepsilon F_2$, $f \longmapsto u_2 \circ f \circ u_1'$, где u_1' — двойственное к u_1 отображение. Ясно, что $u_1 \varepsilon u_2$ инъективно, когда u_1 и u_2 инъективны. Если G — банахово пространство и F — замкнутое подпространство банахова пространства E, то $G\varepsilon F$ — замкнутое подпространство в $G\varepsilon E$. Более подробно об ε-произведении изложено в [4] или [3].

1.3. Банахово пространство E является $\mathscr{L}_{p,\lambda}$-пространством, $1 \le p \le \infty$, $\lambda \ge 1$, тогда и только тогда, когда каждое конечномерное подпространство F в E содержится в конечномерном подпространстве F_1 в E таком, что $d\big(F_1, l_n^p\big) \le \lambda$, где $n = \dim F_1$, и l_n^p есть $\mathbf{K}^n$ ($\mathbf{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с нормой $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, где $d(X, Y) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\|,\ T : X \to Y$ — изоморфизм$\}$ — расстояние Банаха — Мазура между X и Y. Банахово пространство E является $\mathscr{L}_p$-пространством, если оно $\mathscr{L}_{p,\lambda}$-пространство при некотором $\lambda \ge 1$. Любое дополняемое подпространство $\mathscr{L}_p$-пространства будет $\mathscr{L}_p$-пространством. Детальнее об $\mathscr{L}_p$-пространствах см. в [5].

1.4. Пусть E, F — банаховы пространства. Ограниченное линейное отображение $u : E \to F$ будет ядерным, если существуют $(x_n')_n \subset E'$, $(y_n)_n \subset F$ и $(\lambda_n)_n \subset l^1$ такие, что для всех $x \in E$ выполняется соотношение

$$u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n'(x) y_n.$$

b-Пространство G ядерное, если каждое ограниченное наполняющее B в G содержится в ограниченном наполняющем A в G таком, что вложение $i_{AB} : G_B \to G_A$ является ядерным отображением. Подробнее о ядерных b-пространствах см. в [1].

2. Предварительные сведения

Пусть G — b-пространство и E — банахово пространство. Определим $G\varepsilon E$ как объединение $\bigcup\limits_B G_B \varepsilon E$. Это b-пространство, которое мы будем называть

ε-произведением G и E. Ясно, что если F — борнологически замкнутое подпространство в G, то $F\varepsilon E$ — борнологически замкнутое подпространство в $G\varepsilon E$.

В [6] определен класс ε-пространств, полезный для ε-произведения. Банахово пространство является ε-пространством, если непрерывное линейное отображение $\mathrm{Id}_G\,\varepsilon u : G\varepsilon E \to G\varepsilon F$ сюръективно, когда $u : E \to F$ — сюръективное непрерывное линейное отображение между банаховыми пространствами. В [6] показано, что банахово пространство будет ε-пространством в том и только в том случае, если оно является $\mathscr{L}_\infty$-пространством.

Согласно [7] банахово пространство G является $\mathscr{L}_\infty$-пространством тогда и только тогда, когда для каждого ограниченного борнологически сюръективного линейного отображения $u : X \to Y$ ограниченное линейное отображение $\mathrm{Id}_G\,\varepsilon u : G\varepsilon X \to G\varepsilon Y$ борнологически сюръективно, где X и Y суть b-пространства.

b-Пространство G является εb-пространством, если борнологически ограниченное линейное отображение $\mathrm{Id}_G\,\varepsilon u : G\varepsilon E \to G\varepsilon F$ сюръективно, когда $u : E \to F$ — сюръективное ограниченное линейное отображение между банаховыми пространствами.

Если G и E — b-пространства, то ε-произведение G и E будет b-пространством $G\varepsilon E = \bigcup\limits_{B,C} G_B\varepsilon E_C$, где B и C соответственно пробегают совокупности ограниченных наполняющих подмножеств b-пространств G и E.

Ясно, что b-пространство G будет εb-пространством в том и только в том случае, если для каждого борнологически сюръективного ограниченного линейного отображения $u : X \to Y$ отображение $\mathrm{Id}_G\,\varepsilon u : G\varepsilon X \to G\varepsilon Y$ борнологически сюръективно, где X и Y — b-пространства.

Комплекс $(u, v) : F \longrightarrow E \longrightarrow G$ в категории $\mathbf{b}$ точный, если $v \circ u = 0$ и для любого B, ограниченного в E, такого, что $v(B) = \{0\}$, существует ограниченное A в F такое, что $u(A) = B$. Если $0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 0$ — точный комплекс в категории $\mathbf{b}$, то F изоморфно борнологически замкнутому подпространству в E и $G \simeq E/F$.

Предложение 2.1. *Если G — εb-пространство, то функтор $G\varepsilon. : \mathbf{b} \to \mathbf{b} : E \to G\varepsilon E$ точный.*

Доказательство. Если

$$(0, i, \pi, 0) : 0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

— точный комплекс в категории $\mathbf{b}$, то отображение $\mathrm{Id}_G\,\varepsilon i : G\varepsilon F \to G\varepsilon E$ инъективно и отображение $\mathrm{Id}_G\,\varepsilon\pi : G\varepsilon E \to G\varepsilon H$ борнологически сюръективно. Остается показать, что образ $G\varepsilon F$ при $\mathrm{Id}_G\,\varepsilon i$ совпадает (векторно и борнологически) с ядром $\mathrm{Id}_G\,\varepsilon\pi$. Рассматриваемое как отображение из F в $\pi^{-1}(\{0\})$ ограниченное линейное отображение i борнологически сюръективно, поэтому отображение $\mathrm{Id}_G\,\varepsilon i : G\varepsilon F \to G\varepsilon(\pi^{-1}(\{0\}))$ борнологически сюръективно. Поскольку $(\mathrm{Id}_G\,\varepsilon\pi^{-1})(\{0\}) = (\mathrm{Id}_G\,\varepsilon\pi)^{-1}(\{0\})$, последовательность

$$(0, \mathrm{Id}_G\,\varepsilon i, \mathrm{Id}_G\,\varepsilon\pi, 0) : 0 \longrightarrow G\varepsilon F \longrightarrow G\varepsilon E \longrightarrow G\varepsilon H \longrightarrow 0$$

точна в $\mathbf{b}$.

Предложение 2.2. *Если* b*-пространство G является индуктивным пределом $\mathscr{L}_\infty$-пространств, то G будет ε*b*-пространством.*

Доказательство. В самом деле, если $G = \bigcup\limits_B G_B$, где каждое G_B является $\mathscr{L}_\infty$-пространством, то каждое отображение $\mathrm{Id}_{G_B}\,\varepsilon u : G_B\varepsilon E \to G_B\varepsilon F$ борнологически сюръективно, когда $u : E \to F$ — сюръективное ограниченное линейное отображение между банаховыми пространствами. Так как функтор индуктивного предела точен в категории **b** [8], ограниченное линейное отображение

$$\mathrm{Id}_G\,\varepsilon u = \varinjlim_B(\mathrm{Id}_{G_B}\,\varepsilon u) : \varinjlim_B(G_B\varepsilon E) \to \varinjlim_B(G_B\varepsilon F)$$

борнологически сюръективно.

Следствие 2.3. *Каждое ядерное* b*-пространство будет* εb*-пространством.*

Доказательство. Действительно, каждое ядерное b-пространство является индуктивным пределом $\mathscr{L}_\infty$-пространств. На самом деле, если G — ядерное b-пространство, то существует базис $(B_{0,i})_{i\in I}$ ограниченности в G такой, что $G_{B_{0,i}}$ изометрически изоморфно c_0 и $G = \bigcup\limits_{i\in I} G_{B_{0,i}}$ (борнологически) [1]. Поскольку банахово пространство c_0 (пространство сходящихся к нулю последовательностей) является $\mathscr{L}_\infty$-пространством [5], приходим к требуемому.

Пример 2.4. Пусть $r \in \mathbb{N}^*$ и X — компактное многообразие размерности ≥ 2. Согласно [9] пространство $C^r(X)$ не будет $\mathscr{L}_\infty$-пространством. Возьмем

$$C^{r+0}(X) = \bigcup_{\varepsilon} C^{r+\varepsilon}(X),$$

где $0 < \varepsilon < 1$ и $C^{r+\varepsilon}(X)$ — банахово пространство функций класса C^r на X таких, что для каждого $k \in \mathbb{N}^n$, $|k| \leq r$, производные $D^k f$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем ε. На $C^{r+0}(X)$ зададим следующую ограниченность b-пространства: $B \subset C^{r+0}(X)$ ограничено, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что B ограничено в $C^{r+\varepsilon}(X)$. Пространство $C^{r+0}(X)$ является индуктивным пределом (борнологически) индуктивной системы $(C^{r+\varepsilon}(X))_{\varepsilon>0}$, где каждое $C^{r+\varepsilon}(X)$ является $\mathscr{L}_\infty$-пространством [10]. Пространство $C^{r+0}(X)$ будет тогда εb-пространством.

3. Результаты

Мы предполагаем, что читатель знаком с результатами об измеримых по Бохнеру функциях со значениями в банаховых пространствах, см. [11].

Если $(\Omega, \Re, \mu)$ — пространство с конечной или σ-конечной полной мерой и E — банахово пространство, то $L^0(\Omega, E)$ — пространство (классов эквивалентности) измеримых по Бохнеру функций $\Omega \longrightarrow E$. Это вполне метризуемое топологическое векторное пространство, так что $L^0(\Omega, \cdot)$ — функтор **Ban** $\longrightarrow$ **EV**. Поскольку линейное отображение $L^0(\Omega, u)$ инъективно, когда $u : E \longrightarrow F$ — инъективное ограниченное линейное отображение, мы распространяем функтор $L^0(\Omega, \cdot)$ стандартным образом на категорию **b**.

Определение 3.1. Пусть $(\Omega, \Re, \mu)$ — пространство с полной конечной или σ-конечной мерой и E — b-пространство. Тогда $L^0(\Omega, E)$ — индуктивный предел векторных пространств $L^0(\Omega, E_B)$, где B пробегает совокупность всех ограниченных наполняющих подмножеств E. Если $u : E \longrightarrow F$ — ограниченное линейное отображение между b-пространствами, то $L^0(\Omega, u)$ — индуктивный предел линейных отображений $L^0(\Omega, u|_{E_B}) : L^0(\Omega, E_B) \longrightarrow L^0(\Omega, F_{u(B)})$.

Если E — банахово пространство, то $L^p(\Omega, E)$ — пространство измеримых отображений $f : \Omega \longrightarrow E$ таких, что $\|f(\cdot)\| \in L^p(\Omega, \mu)$. Норма функции $f \in L^p(\Omega, E)$ определяется как норма в $L^p(\Omega, \mu)$ функции $\|f(\cdot)\|$. Она обозначается через $\|f\|_{L^p(\Omega,E)} = \|\,\|f(\cdot)\|_E\|_{L^p(\Omega,\mu)}$. Тем самым определено банахово пространство $L^p(\Omega, E)$.

Определение 3.1$'$. Пусть $(\Omega, \Re, \mu)$ — пространство с полной конечной или σ-конечной мерой и E — b-пространство. Положим $L^p(\Omega, E) \simeq \bigcup\limits_B L^p(\Omega, E_B)$, где B пробегает совокупность всех наполняющих ограниченных подмножеств E.

Сначала мы обобщим теорему Бартла — Грейвса [12] на L^0-пространства. Аналогичный результат установлен в [7] для непрерывных функций.

Теорема 3.2. *Пусть $(\Omega, \Re, \mu)$ — пространство с полной конечной или σ-конечной мерой и $u : E \longrightarrow F$ — борнологически сюръективное ограниченное линейное отображение между* b*-пространствами. Тогда линейное отображение $L^0(\Omega, u) : L^0(\Omega, E) \longrightarrow L^0(\Omega, F)$, $f \longrightarrow u \circ f$, сюръективно.*

Доказательство. Поскольку индуктивный предел является точным функтором в категории **b** [8], будем рассматривать только случай, когда E и F — банаховы пространства. Для доказательства сюръективности линейного отображения $L^0(\Omega, u)$ поднимем произвольную функцию $g \in L^0(\Omega, F)$ на $f \in L^0(\Omega, E)$ так, что $g = L^0(\Omega, u)(f) = u \circ f$. Будем использовать тот факт, что существует константа $A > 0$ такая, что $\|x\| \le A\|u(x)\|$ для любого $x \in F$.

Функция g принимает значения почти всюду в сепарабельном банаховом подпространстве F_1 в F. Поскольку F_1 сепарабельно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно построить измеримое разбиение F_1 на множества $Y_{n,k}$ диаметра, меньшего чем $\frac{1}{2^n}$ (начинаем со счетного измеримого покрытия F_1 подмножествами $X_{n,k}$ диаметра, меньшего чем $\frac{1}{2^n}$, и полагаем $Y_{n,1} = X_{n,1}$ и $Y_{n,k} = X_{n,k} \setminus X_{n,1} \cup \dots \cup X_{n,k-1}$ для $k > 1$; пустые множества $Y_{n,k}$ опускаем).

Разбиение $(Y_{n,k})_k$ используем для построения по индукции ряда $\sum f_i$ измеримых функций из Ω в E, сходящегося почти всюду к функции f такой, что $g = u \circ f$.

Сначала построим функцию f_0. Для каждого k положим $\Omega_{0,k} = g^{-1}(Y_{0,k})$ и выберем $x_{0,k} \in u^{-1}(Y_{0,k})$. Функция $f_0 = \sum\limits_k 1_{\Omega_{0,k}} x_{0,k}$ измерима и действует из Ω в E. Для почти всех $x \in \Omega_{0,k}$ выполнены соотношения $g(x) \in Y_{0,k}$ и $u(f_0(x)) = u(x_{0,k}) \in Y_{0,k}$. Тем самым $\|g(x) - u \circ f_0(x)\| \le 1$.

Предположим, что определены измеримые функции $f_0, f_1, \dots, f_n$ со значениями в E такие, что для любого $i = 0, \dots, n$ и для почти всех $x \in \Omega$

$$\|g(x) - u(f_0(x) + \dots + f_i(x))\| \le \frac{1}{2^i}.$$

Тогда рассмотрим функцию $h = g - u \circ (f_0 + \dots + f_n)$ и положим $\Omega_{n+1,k} = h^{-1}(Y_{n+1,k})$ (мы сохраняем только значения k такие, что $h(\Omega) \cap Y_{n+1,k} \ne \varnothing$). Для такого k выберем также $x_{n+1,k} \in u^{-1}(Y_{n+1,k})$.

Заметим, что $\|x_{n+1,k}\| \le A\|u(x_{n+1,k})\|$ и

1) $u(x_{n+1,k}) \in Y_{n+1,k}$;

2) $Y_{n+1,k} \cap h(\Omega) \ne \varnothing$;

3) для почти всех $x \in \Omega$ выполнено неравенство $\|h(x)\| \le \frac{1}{2^n}$;

4) диаметр $Y_{n+1,k}$ меньше чем $\frac{1}{2^{n+1}}$.

Заключаем, что

$$\|u(x_{n+1,k})\| \le \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \|x_{n+1,k}\| \le A\frac{1}{2^{n-1}}$$

для каждого k. Положим

$$f_{n+1} = \sum_k 1_{\Omega_{n+1,k}} x_{n+1,k}.$$

Очевидно, что выполнены следующие свойства.

1. Для любого x
$$\|f_{n+1}(x)\| \leq \frac{A}{2^{n+1}}.$$

2. Для почти всех x
$$\|h(x) - u \circ f_{n+1}(x)\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Из первого свойства вытекает, что ряд $\sum\limits_n f_n$ сходится к функции $f \in L^0(\Omega, E)$, а из второго — что для почти всех x будет $g(x) = u(f(x))$, т. е. отображение $L^0(\Omega, u)$ сюръективно.

Следствие 3.3. *Пусть $(\Omega, \Re, \mu)$ — пространство с полной конечной или σ-конечной мерой. Функтор $L^0(\Omega, \Re, \mu; \cdot) : \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{EV}$ точный.*

Доказательство. Согласно предложению 3.2 достаточно доказать, что функтор $L^0(\Omega, \cdot) : \mathbf{Ban} \longrightarrow \mathbf{EV}$ точный. Пусть $(0, v, w, 0) : 0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$ — короткий точный комплекс в $\mathbf{Ban}$. Докажем точность последовательности
$$(0, L^0(\Omega, v), L^0(\Omega, w), 0) : 0 \longrightarrow L^0(\Omega, E) \longrightarrow L^0(\Omega, F) \longrightarrow L^0(\Omega, G) \longrightarrow 0$$
в категории $\mathbf{EV}$. Отображение $L^0(\Omega, v)$ инъективно. Действительно, пусть $f \in L^0(\Omega, E)$ такова, что $L^0(\Omega, v)(f) = 0$. Тогда $v(f(x)) = 0$ для почти всех $x \in \Omega$. Так как v инъективно, функция f почти всюду нулевая.

Остается показать, что образ $L^0(\Omega, v)$ совпадает с ядром $L^0(\Omega, w)$. Но это ясно, поскольку, как установлено при доказательстве теоремы 3.2, образ $L^0(\Omega, v)$ есть $L^0(\Omega, v(E))$. Однако это пространство совпадает с $L^0(\Omega, w^{-1}(0))$, очевидно, являющимся ядром $L^0(\Omega, w)$.

Отсюда вытекает

Следствие 3.4. *Пусть $(\Omega, \Re, \mu)$ — пространство с полной конечной или σ-конечной мерой. Если E — $\mathfrak{b}$-пространство и F — борнологически замкнутое подпространство в E, то $L^0(\Omega, E/F) = L^0(\Omega, E)/L^0(\Omega, F)$.*

Обращаясь к функтору $L^p(\Omega, \cdot) : \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{b} : E \longrightarrow L^p(\Omega, E)$, можно показать его точность. Пространство $L^p(\Omega, E)$ является банаховым пространством или $\mathfrak{b}$-пространством соответственно природе E. Здесь можно сделать некоторые добавления. Мы рассмотрим только случай $p \neq \infty$.

Пусть Ω и Ω' — два пространства с мерой, $\Omega \times \Omega'$ — пространство с мерой. Согласно теореме Фубини [11] если E — банахово пространство и $f \in L^p(\Omega \times \Omega', E)$, то почти для всех $x \in \Omega$ функция $f(x, \cdot) : \Omega' \longrightarrow E : y \mapsto f(x, y)$ принадлежит $L^p(\Omega', E)$ и функция $f(\cdot, \cdot) : \Omega \longrightarrow L^p(\Omega', E) : x \mapsto f(x, \cdot)$ находится в $L^p(\Omega, L^p(\Omega', E))$. Тем самым $L^p(\Omega \times \Omega', E) \simeq L^p(\Omega, L^p(\Omega', E))$ для произвольного банахова пространства E. Этот изоморфизм непосредственно распространяется на случай $\mathfrak{b}$-пространств.

Итак, мы получаем

Предложение 3.5. *Если Ω и Ω' суть пространства с мерой, то функторы $L^p(\Omega \times \Omega', \cdot) : \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{b}$ и $L^p(\Omega, L^p(\Omega', \cdot)) : \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{b}$ изоморфны.*

Доказательство. Банахово пространство l^p естественно изоморфно банахову пространству $L^p(\mathbb{N}, \Re(\mathbb{N}), \#)$, где $\Re(\mathbb{N})$ — σ-алгебра всех подмножеств

$\mathbb{N}$ и $\#$ — мера на $\Re(\mathbb{N})$, считающая число элементов. Если $1 \leq p < \infty$, то $l^p(L^p(\Omega, E)) \simeq L^p(\Omega, l^p(E))$.

Рассмотрим также пространства локально p-суммируемых функций. Если использовать только банаховы пространства, то можно ограничиться пространствами с конечной мерой. При изучении общих b-пространств полезна σ-конечность меры.

Определение 3.6. Пусть E — b-пространство и $(\Omega, \Re, \mu)$ — пространство с σ-конечной мерой. Если $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — разбиение Ω такое, что $\mu(\Omega_n) < +\infty$ для каждого n, то $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$ — *прямое произведение* $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} L^p(\Omega_n, E)$.

В случае, когда E — b-пространство, из этого определения вытекает, что множество значений $f(\Omega)$ функции $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$ не обязано содержаться в каком-либо банаховом подпространстве E_B в E.

Предложение 3.5 распространяется на случай локально p-суммируемых функций.

Предложение 3.7. *Если Ω и Ω' — пространства с σ-конечной мерой, то функторы $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \Omega', \cdot) : \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{b}$ и $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega', \cdot)) : \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{b}$ изоморфны.*

Один из основных результатов настоящей работы составляет

Теорема 3.8. *Если Ω — пространство с конечной мерой, E — банахово пространство и N — ядерное* b*-пространство, то* b*-пространства $L^p(\Omega, N\varepsilon E)$ и $N\varepsilon L^p(\Omega, E)$ изоморфны при $1 \leq p \leq \infty$.*

Доказательство. Поскольку N — ядерное b-пространство, мы можем рассматривать его как объединение банаховых пространств N_i, где каждое N_i изоморфно l^p с $1 \leq p < \infty$. Тогда

$$L^p(\Omega, N_i\varepsilon E) \simeq L^p(\Omega, l^p\varepsilon E) \simeq L^p(\Omega, l^p(E)) \simeq l^p(L^p(\Omega, E)).$$

Таким образом,

$$L^p(\Omega, N_i\varepsilon E) \simeq l^p\varepsilon L^p(\Omega, E) \simeq N_i\varepsilon L^p(\Omega, E).$$

Для каждого $i \in I$ существует $k \in I$ такое, что $N_i \subset N_k$ и включение $N_i \longrightarrow N_k$ ядерное. Это включение задается инъективной матрицей u, которая определяет естественное отображение $u_E : N_i(E) \longrightarrow N_k(E)$. Так как отображение u_E также инъективно, индуктивный предел банаховых пространств $N_i(E)$ будет b-пространством. Более того, в каждом случае индуктивный предел есть не что иное, как пространство $N\varepsilon E$.

b-Пространство $N\varepsilon E$ — это объединение банаховых пространств $N_i\varepsilon E$. Пусть u_{ji} — вложение $N_i \longrightarrow N_j$ и u_i — вложение $N_i \longrightarrow N$. Имеем $u_i = u_j \circ u_{ji}$. Поскольку функтор $L^p(\Omega, \cdot) : \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{b}$ точный, b-пространство $L^p(\Omega, N\varepsilon E)$ является объединением банаховых пространств $L^p(\Omega, N_i\varepsilon E)$ и мы имеем вложения

$$L^p(\Omega, u_{ji}\varepsilon \operatorname{Id}_E) : L^p(\Omega, N_i\varepsilon E) \longrightarrow L^p(\Omega, N_j\varepsilon E)$$

и

$$L^p(\Omega, u_i\varepsilon \operatorname{Id}_E) : L^p(\Omega, N_i\varepsilon E) \longrightarrow L^p(\Omega, N\varepsilon E).$$

Иными словами, b-пространство $N\varepsilon L^p(\Omega, E)$ есть объединение банаховых пространств $N_i\varepsilon L^p(\Omega, E)$, и мы имеем вложения

$$u_{ji}\varepsilon \operatorname{Id}_{L^p(\Omega,E)} : N_i\varepsilon L^p(\Omega, E) \longrightarrow N_j\varepsilon L^p(\Omega, E)$$

и

$$u_i\varepsilon\,\mathrm{Id}_{L^p(\Omega,E)} : N_i\varepsilon L^p(\Omega,E) \longrightarrow N\varepsilon L^p(\Omega,E).$$

Тогда для каждого i имеем ограниченное инъективное линейное отображение $v_i : L^p(\Omega, N_i\varepsilon E) \longrightarrow N_i\varepsilon L^p(\Omega,E)$. Рассматривая индуктивный предел, приходим к инъективному ограниченному линейному отображению $v : L^p(\Omega, N\varepsilon E) \to N\varepsilon L^p(\Omega,E)$ такому, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L^p(\Omega, N_i\varepsilon E) & \xrightarrow{v_i} & N_i\varepsilon L^p(\Omega,E) \\ {\scriptstyle L^p(\Omega,u_i\varepsilon\,\mathrm{Id}_E)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle u_i\varepsilon\,\mathrm{Id}_{L^p(\Omega,E)}} \\ L^p(\Omega, N\varepsilon E) & \xrightarrow{v} & N\varepsilon L^p(\Omega,E) \end{array}$$

коммутативна.

Так как N — ядерное b-пространство, для каждого i найдется $j \geq i$ такое, что вложение $u_{ji} : N_i \longrightarrow N_j$ ядерно. Тогда существует каноническое инъективное ограниченное линейное отображение $N_i\varepsilon L^p(\Omega,E) \longrightarrow N_j\varepsilon L^p(\Omega,E)$. Возьмем инъективное отображение

$$N_j\varepsilon L^p(\Omega,E) \longrightarrow L^p(\Omega, N_j\varepsilon E)$$

и составим композицию его с предыдущим отображением. Таким образом мы получаем инъективное ограниченное линейное отображение

$$w_i : N_i\varepsilon L^p(\Omega,E) \longrightarrow L^p(\Omega, N_i\varepsilon E).$$

Переходя к индуктивному пределу, приходим к ограниченному линейному инъективному отображению $w : N\varepsilon L^p(\Omega,E) \longrightarrow L^p(\Omega, N\varepsilon E)$ такому, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} N_i\varepsilon L^p(\Omega,E) & \xrightarrow{w_i} & L^p(\Omega, N_i\varepsilon E) \\ {\scriptstyle u_i\varepsilon\,\mathrm{Id}_{L^p(\Omega,E)}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle L^p(\Omega,u_i\varepsilon\,\mathrm{Id}_E)} \\ N\varepsilon L^p(\Omega,E) & \xrightarrow{w} & L^p(\Omega, N\varepsilon E) \end{array}$$

коммутативна.

Остается доказать, что отображения v и w взаимно обратны. Заметим, что имеют место эквивалентности

$$\begin{aligned} w\circ v = \mathrm{Id}_{L^p(\Omega,N\varepsilon E)} &\iff (\forall i) w\circ v\circ L^p(\Omega, u_i\varepsilon\,\mathrm{Id}_E) = L^p(\Omega, u_i\varepsilon\,\mathrm{Id}_E) \\ &\iff (\forall i) w\circ (u_i\varepsilon L^p(\Omega, \mathrm{Id}_E))\circ v_i = L^p(\Omega, u_i\varepsilon\,\mathrm{Id}_E) \\ &\iff (\forall i) L^p(\Omega, u_i\varepsilon\,\mathrm{Id}_E)\circ w_i\circ v_i = L^p(\Omega, u_i\varepsilon\,\mathrm{Id}_E). \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что

$$v\circ v = \mathrm{Id}_{N\varepsilon L^p(\Omega,E)} \iff (\forall i)(u_i\varepsilon L^p(\Omega,\mathrm{Id}_E))\circ v_i\circ w_i = (u_i\varepsilon L^p(\Omega,\mathrm{Id}_E)).$$

Очевидно, достаточно показать, что

$$w_i\circ v_i = L^p(\Omega, u_i\varepsilon\,\mathrm{Id}_E), \quad v_i\circ w_i = u_i\varepsilon L^p(\Omega,\mathrm{Id}_E).$$

Следствие 3.9. *Пусть Ω — пространство с конечной мерой, N — ядерное* b*-пространство, E —* b*-пространство и F — борнологически замкнутое подпространство в E. Тогда $L^p(\Omega, N\varepsilon(E/F)) = N\varepsilon L^p(\Omega, E/F)$.*

Доказательство. Поскольку N — εb-пространство, имеем $N\varepsilon(E/F) = (N\varepsilon E)/(N\varepsilon F)$. Иными словами,

$$L^p(\Omega, N\varepsilon(E/F)) = L^p(\Omega, (N\varepsilon E)/(N\varepsilon F)) = L^p(\Omega, N\varepsilon E)/L^p(\Omega, N\varepsilon F) \\ = (N\varepsilon L^p(\Omega, E))/(N\varepsilon L^p(\Omega, F)) = N\varepsilon L^p(\Omega, E/F).$$

Напомним, что для b-пространств E и F борнологическое проективное тензорное произведение $E \otimes_{\pi_b} F$ определяется как $\varinjlim_{B,C}(E_B \otimes_\pi F_C)$, где B и C пробегают совокупности ограниченных наполняющих подмножеств в E и F соответственно и индуктивный предел берется в категории **b**. Борнология b-пространства $E \otimes_{\pi_b} F$ называется *проективной ограниченностью.*

Отметим, что структурные отображения $E_{B_1} \otimes_\pi F_{C_1} \longrightarrow E_{B_2} \otimes_\pi F_{C_2}$ могут не быть инъективными. Для того чтобы структурные отображения были инъективными, достаточно, чтобы одно из b-пространств E, F было объединением аппроксимирующих банаховых пространств.

Следствие 3.10. *Пусть Ω — пространство с конечной мерой, N — ядерное* b*-пространство, E —* b*-пространство и F — борнологически замкнутое подпространство в E. Тогда*

$$L^p(\Omega, N\widehat{\otimes}_{\pi_b}(E/F)) = N\widehat{\otimes}_{\pi_b} L^p(\Omega, E/F).$$

Для следующего утверждения напомним определение прямого произведения в категории b-пространств.

Пусть $(E_i)_{i\in I}$ — семейство b-пространств. На прямом произведении $\prod\limits_{i\in I} E_i$ зададим следующую ограниченность (прямую ограниченность): $B \subset \prod\limits_{i\in I} E_i$ ограничено, если для каждого $i \in I$ множество $p_i(B) = \{p_i(x),\ x \in B\}$ ограничено в E_i, где $p_j : \prod\limits_{i\in I} E_i \longrightarrow E_j$ — каноническая проекция.

Очевидно, что все канонические проекции $p_j : \prod\limits_{i\in I} E_i \longrightarrow E_j$ ограничены, если мы задаем на пространстве $\prod\limits_{i\in I} E_i$ прямую ограниченность.

В доказательстве теоремы 3.12 нам понадобится следующее

Предложение 3.11. *Пусть N — ядерное* b*-пространство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть E_n —* b*-пространство. Тогда* b*-пространства $N\varepsilon\left(\prod\limits_{n=0}^{\infty} E_n\right)$ и $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(N\varepsilon E_n)$ изоморфны.*

Доказательство. Если пространства E_n суть общие b-пространства, то произведение $\prod\limits_{n=0}^{\infty} E_n$ будет индуктивным пределом произведений банаховых пространств $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(E_n)_{B_n}$, где B_n пробегает совокупность ограниченных наполняющих подмножеств в E_n. Тем самым доказательство сводится к случаю, когда все E_n — банаховы пространства.

Если E — банахово пространство и M — строго положительное вещественное число, то обозначим через $M.E$ банахово пространство, имеющее те же элементы, что и E, но с нормой $\|x\|_{M.E} = \frac{1}{M}\|x\|$.

Пусть $l^\infty((E_n)_n)$ — пространство последовательностей $(x_n)_n$ таких, что $(\forall n)$ $x_n \in E_n$ и существует $M > 0$ такое, что $(\forall n)$ $\|x_n\| \le M$. Это банахово пространство с нормой $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$.

Если $(E_n)_n$ — последовательность банаховых пространств и B ограничено в прямом произведении $\prod\limits_{n=0}^{\infty} E_n$, то найдется последовательность $(M_n)_n \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ такая, что B содержится в единичном шаре $l^\infty((M_n.E_n)_n)$.

Завершение доказательства упрощается, если мы будем именовать индексы, что позволит нам переставлять их. Мы трактуем индекс подобно неопределенной переменной в алгебре.

Если E — банахово пространство и $\ddot{m}$ — индекс, то обозначим через $l^\infty_{\ddot{m}}(E)$ пространство ограниченных последовательностей элементов из E с индексом m.

Для последовательности банаховых пространств $(E_{\ddot{n}})_{\ddot{n}}$ определим банаховы пространства $l^\infty_{\ddot{n}}(E_{\ddot{n}})$ и $l^\infty_{\ddot{m}}(l^\infty_{\ddot{n}}(E_{\ddot{n}}))$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим банахово пространство $l^\infty_{\ddot{m}}(E_n)$. Это пространство последовательностей элементов из E_n с индексом $\ddot{m}$.

Рассмотрим также банахово пространство $l^\infty_{\ddot{n}}(l^\infty_{\ddot{m}}(E_{\ddot{n}}))$. Ясно, что банаховы пространства $l^\infty_{\ddot{n}}(l^\infty_{\ddot{m}}(E_{\ddot{n}}))$ и $l^\infty_{\ddot{m}}(l^\infty_{\ddot{n}}(E_{\ddot{n}}))$ естественно изоморфны (переменой индексов).

Рассмотрим (частично упорядоченное) множество $(\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ и изоморфизмы

$$l^\infty_{\ddot{n}}\big(l^\infty_{\ddot{m}}(M_n.E_{\ddot{n}})\big) \longrightarrow l^\infty_{\ddot{n}}\big(l^\infty_{\ddot{m}}(M'_n.E_{\ddot{n}})\big).$$

Вспомним, что $l^\infty(E_n)$ получается из $N_\infty(E_n)$ (где N_∞ изоморфно l^∞), и если $u : N_{\infty,i} \longrightarrow N_{\infty,j}$ получается из матрицы, например при ядерном u, то можно определить $u_E : N_{\infty,i}(E) \longrightarrow N_{\infty,j}(E)$. Напомним, что N — ядерное b-пространство.

В итоге имеем естественный изоморфизм

$$N\varepsilon\left(\prod_{n=0}^{\infty} E_n\right) \simeq \prod_{n=0}^{\infty}(N\varepsilon E_n),$$

если N — ядерное b-пространство и $(E_n)_n$ — последовательность банаховых пространств. Предложение доказано.

Теорема 3.12. *Пусть N — ядерное* b*-пространство, E —* b*-пространство и Ω — пространство с σ-конечной мерой. Тогда $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, N\varepsilon E) \simeq N\varepsilon L^p(\Omega, E)$ для $1 \le p \le \infty$.*

Доказательство. Пусть $\Omega = \bigcup\limits_n \Omega_n$ — пространство с σ-конечной мерой. Пусть $\Omega'_0 = \Omega_0$ для каждого $n > 1$, $\Omega'_n = \Omega_n \backslash \Omega_{n-1}$. Тогда для любого p, $1 \le p \le \infty$,

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, E) \simeq \prod_{n=0}^{\infty} L^p(\Omega'_n, E)$$

и по предложению 3.11 и теореме 3.8

$$N\varepsilon L^p(\Omega, E) \simeq N\varepsilon\left(\prod_{n=0}^{\infty} L^p(\Omega'_n, E)\right) \simeq \prod_{n=0}^{\infty} N\varepsilon L^p(\Omega'_n, E)$$

и

$$L^p(\Omega, N\varepsilon E) \simeq \prod_{n=0}^{\infty} L^p(\Omega'_n, N\varepsilon E) \simeq \prod_{n=0}^{\infty} N\varepsilon L^p(\Omega'_n, E).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hogbe-Nlend H.* Théorie des bornologies et applications. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1971. (Lecture Notes in Math.; 213).
2. *Waelbroeck L.* Topological vector spaces and algebras. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1971. (Lectures Notes in Math.; 230).
3. *Waelbroeck L.* Duality and the injective tensor product // Math. Ann. 1966. Bd 163. S. 122–126.
4. *Jarchow H.* Locally convex spaces. Stuttgart: B. G. Teubner, 1981.
5. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1973. (Lecture Notes in Math.; 338).
6. *Kaballo W.* Lifting theorems for vector valued functions and the ε-product // Proc. of the First Poderborn Conf. on Functional Analysis. 1977. V. 27. P. 149–166.
7. *Aqzzouz B.* Généralisations du Théorème de Bartle–Graves // C. R. Acad. Sci. Paris. 2001. V. 333, N 10. P. 925–930.
8. *Séminaire* Banach / Ed. Houzel C. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1972. (Lecture Note in Math.; 277)
9. *Хенкин Г. М.* Отсутствие равномерного гомеоморфизма между пространствами гладких функций от одного и от n переменных ($n \geq 2$) // Мат. сб. 1967. Т. 74, № 4. С. 595–607.
10. *Frampton J., Tromba A.* On the classification of spaces of Hölder continuous functions // J. Funct. Anal. 1972. V. 10. P. 336–345.
11. *Diestel J., Uhl J.* Vector measures. Providence: AMS, 1985. (Math. Surveys; 15).
12. *Bartle R. G., Graves L. M.* Mappings between function spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72. P. 400–413.

Статья поступила 13 ноября 2002 г.

Belmesnaoui Aqzzouz
Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques et informatique,
Equipe d'Analyse Fonctionnelle, B.P. 133,
Kénitra, Morocco
baqzzouz@hotmail.com