Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 517.956

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ОСКОЛКОВА

Г. А. Свиридюк, В. О. Казак

Аннотация: Показано, что фазовым пространством задачи Коши — Дирихле для уравнения

$$u_t - \varkappa \Delta u_t = \nu \Delta u - K(u) + f$$

является простое банахово C^∞-многообразие.

Ключевые слова: полулинейное уравнение соболевского типа, фазовое пространство.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу Коши — Дирихле

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{0.1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \tag{0.2}$$

для уравнения

$$u_t - \varkappa \Delta u_t = \nu \Delta u - K(u) + f, \tag{0.3}$$

где функция $u \in C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, такова, что $K(0) = 0$, $\langle K(u), u \rangle \geq 0$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L^2(\Omega)$). Свободный член $f = f(x)$ будет определен позже.

Уравнение (0.3) моделирует широкий класс процессов, главным участником которых являются вязкоупругие жидкости [1]. В частности, нелинейный член в (0.3) может иметь вид $K(u) = u^{2m+1}$ или $K(u) = \operatorname{sh} u$. Вообще говоря, нелинейность может быть представлена рядом

$$K(u) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m u^{2m+1}, \quad a_m \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

В [2] задача (0.1)–(0.3) изучена при условии $\varkappa, \nu \in \mathbb{R}_+$. Однако в [3] отмечено, что отрицательные значения параметра $\varkappa$ не противоречат физическому смыслу модели.

Нашей целью является изучение задачи (0.1)–(0.3) при $\varkappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$. Как хорошо известно [4], в этом случае задача (0.1)–(0.3) разрешима не при всех начальных данных $u_0(x)$. Поэтому в центре нашего внимания описание множества допустимых начальных данных, понимаемого нами как фазовое пространство задачи (0.2), (0.3) [5]. Для этого мы редуцируем задачу (0.1)–(0.3) к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \tag{0.4}$$

для полулинейного операторного уравнения соболевского типа [6]

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{0.5}$$

Как абстрактное уравнение (0.5), так и его конкретные интерпретации вида (0.3) изучаются сейчас в различных аспектах (см. монографии [7–9] и библиографию там). В отличие от цитированных методов наш подход основан на теории вырожденных (полу)групп операторов [10]. Суть его заключается в расщеплении уравнения (0.5) на сингулярную и регулярную составляющие и отдельном изучении каждой из них.

Статья состоит из четырех пунктов. Первые два носят пропедевтический характер — в них содержатся результаты из [10–12], представленные в удобном для наших целей виде. В третьем пункте проводится редукция задачи (0.1)–(0.3) к задаче (0.4), (0.5). Четвертый пункт посвящен морфологии (т. е. строению, структуре) фазового пространства задачи (0.2), (0.3). Впервые вопрос о морфологии был поставлен в [5, 13]. В [14, 15] показано, что фазовым пространством соответствующих задач является простое банахово C^∞-многообразие, моделируемое образом разрешающей (полу)группы. Основной результат статьи — доказательство простоты фазового пространства задачи (0.2), (0.3).

В заключение условимся о следующем. Все рассмотрения проводятся в вещественных банаховых пространствах, но при рассмотрении «спектральных» вопросов вводится их естественная комплексификация. Все контуры ориентированы движением «против часовой стрелки» и ограничивают области, лежащие «слева» при таком движении. Символами $\mathbb{O}$ и $\mathbb{I}$ обозначены соответственно «нулевой» и «единичный» операторы, области определения которых ясны из контекста. Символом const обозначены различные, вообще говоря, константы.

1. Относительно σ-ограниченные операторы

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства. Обозначим через $\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ пространства линейных непрерывных и линейных замкнутых плотно определенных операторов соответственно. Пусть $L \in \mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M.

Определение 1.1. Оператор M называется *спектрально ограниченным* относительно оператора L (короче, (L,σ)-*ограниченным*), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \,\forall \mu \in \mathbb{C}\ (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Заметим, что в случае, когда существует $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, оператор M (L,σ)-ограничен точно тогда, когда ограничен оператор $L^{-1}M$ (или оператор ML^{-1}).

Лемма 1.1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда следующие операторы являются проекторами:*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}), \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma L^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}).$$

Здесь $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ — правая, а $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ — левая L-резольвенты оператора M, $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

Следствие 1.1. *В условиях леммы* 1.1 *для любого* $u \in \operatorname{dom} M$ *имеет место включение* $Pu \in \operatorname{dom} M$.

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} Q$. Через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ ($\mathfrak{U}^k \cap \operatorname{dom} M$), $k = 0, 1$.

Теорема 1.1. *Пусть оператор* M (L,σ)*-ограничен. Тогда*
(i) $L_k \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;
(ii) $M_0 \in Cl(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $M_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$;
(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

В условиях теоремы 1.1 построим операторы $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^0)$, $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1)$.

Следствие 1.2. *В условиях теоремы* 1.1 *при всех* $\mu \in \rho^L(M)$ *имеет место представление*

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q.$$

Определение 1.2. Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Точка ∞ называется *устранимой особой точкой, полюсом порядка* $p \in \mathbb{N}$, *существенно особой точкой* L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M, если соответственно $H \equiv \mathbb{O}$, $H^p \neq \mathbb{O}$ и $H^{p+1} = \mathbb{O}$, $H^q \neq \mathbb{O}$ при всех $q \in \mathbb{N}$.

В дальнейшем устранимую особую точку удобно называть *полюсом порядка нуль*.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$. Тогда, немного отходя от стандарта, любой вектор $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ будем называть *собственным* вектором. Пусть $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$, упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ называется *цепочкой* M*-присоединенных векторов* вектора φ_0, если

$$L\varphi_{q+1} = M\varphi_q, \quad q \in \{0\} \cup \mathbb{N}; \ \varphi_q \notin \ker L \setminus \{0\}, \ q \in \mathbb{N}.$$

Цепочка может быть бесконечной, в частности, может быть заполнена нулями, если $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$. Однако она обязательно конечна, если существует такой M-присоединенный вектор φ_p, что либо $\varphi_p \notin \operatorname{dom} M$, либо $M\varphi_p \notin \operatorname{im} L$. Мощность конечной цепочки называется ее *длиной.*

Теорема 1.2. *Пусть* $L, M \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, *причем оператор* L *фредгольмов* (*т. е.* $\operatorname{ind} L = 0$). *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *Оператор* M (L,σ)*-ограничен, причем* ∞ — *полюс порядка* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ L*-резольвенты оператора* M.

(ii) *Длины всех цепочек* M*-присоединенных векторов ограничены числом* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

2. Квазистационарные траектории

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства; $L, M \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $N \in C^k(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, причем оператор M (L,σ)-ограничен, а ∞ — полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Вектор-функцию $u \in C^k((-T,T); \mathfrak{U})$ назовем *решением уравнения* (0.5), если она при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет этому уравнению. Решение $u = u(t)$ уравнения (0.5) назовем *решением задачи* (0.4), (0.5), если оно удовлетворяет условию (0.4).

Пример 2.1. Пусть $\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{F} \equiv \mathbb{R}^2_{(\xi,\eta)}$, операторы L, M и N зададим формулами

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \mathbb{I}, \quad N : u \to \begin{pmatrix} 0 \\ -\xi^2 \end{pmatrix}, \quad u = (\xi, \eta).$$

Тогда задача (0.4), где $u_0 = (0,0)$, для уравнения (0.5) будет иметь два решения: $(0,0)$ и $(t/2, t^2/4)$.

Простой пример показывает необходимость сужения понятия решения уравнения (0.5). В силу теоремы 1.1 мы можем редуцировать уравнение (0.5) к эквивалентной системе

$$H\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N(u), \tag{2.1}$$

$$\dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1}QN(u), \tag{2.2}$$

где $u^1 = Pu$, $u^0 = u - u^1$.

Определение 2.1. Решение $u = u(t)$ задачи (0.4), (0.5) называется *квазистационарной траекторией уравнения* (0.5), *проходящей через точку* u_0, если $H\dot{u}(t) \equiv 0$ при всех $t \in (-T, T)$.

Очевидно, что любое стационарное решение задачи (0.4), (0.5) является квазистационарной траекторией, однако обратное, как мы покажем далее, неверно. В примере 2.1 квазистационарной траекторией, проходящей через точку $(0,0)$, является только стационарное решение, и в этом смысле такое решение единственно.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только квазистационарных траекторий. С этой целью введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(Mu + N(u)) = 0\}.$$

В силу теоремы 1.1 и уравнения (2.1) любая квазистационарная траектория $u = u(t)$ лежит в $\mathfrak{M}$, т. е. $u(t) \in \mathfrak{M}$ при всех $t \in (-T, T)$.

Пусть $u_0 \in \mathfrak{M}$, положим $u_0^1 = Pu_0 \in \mathfrak{U}^1$. Немного отходя от стандарта [16], будем говорить, что множество $\mathfrak{M}$ в точке u_0 является *банаховым C^k-многообразием*, если существуют окрестности $\mathfrak{O}_0^{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{O}_0^1 \subset \mathfrak{U}^1$ точек u_0 и u_0^1 соответственно и C^k-диффеоморфизм $\delta : \mathfrak{O}_0^1 \to \mathfrak{O}_0^{\mathfrak{M}}$ такой, что δ^{-1} равен сужению проектора P на $\mathfrak{O}_0^{\mathfrak{M}}$. Множество $\mathfrak{M}$ называется *банаховым C^k-многообразием, моделируемым пространством* $\mathfrak{U}^1$, если оно является банаховым C^k-многообразием в каждой своей точке. Связное банахово C^k-многообразие называется *простым*, если любой его атлас эквивалентен атласу, содержащему единственную карту.

Теорема 2.1. *Пусть в точке u_0 множество $\mathfrak{M}$ является банаховым C^k-многообразием. Тогда существует единственная квазистационарная траектория уравнения* (0.5), *проходящая через точку u_0.*

Приведем набросок доказательства. Обозначим через δ'_{u^1} производную Фреше C^k-диффеоморфизма δ в точке $u^1 \in \mathfrak{O}_0^1$. Очевидно, $\delta'_{u^1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1; T_u\mathfrak{M})$, где $T_u\mathfrak{M}$ — касательное пространство в точке $u \in \delta(u^1)$. Подействовав оператором δ'_{u^1} на обе части уравнения (2.2), получим

$$\dot{u} = F(u), \tag{2.3}$$

где $F = \delta'_{u^1}(S + L_1^{-1}QN\delta)P : u \to T_u\mathfrak{M}$, $u = \delta(u^1)$. Однозначная разрешимость задачи (0.4), (2.3) для некоторого $T \in \mathbb{R}_+$ — классическая теорема Коши [16].

Замечание 2.1. Если ∞ — существенно особая точка L-резольвенты оператора M, то теорема 2.1 неверна даже в линейном случае [10].

3. Постановка задачи

Для того чтобы редуцировать задачу (0.1)–(0.3) к задаче (0.4), (0.5), положим $\mathfrak{U} = W_2^{m+2} \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1$, $\mathfrak{F} = W_2^m$ (здесь и далее $W_2^k = W_2^k(\Omega)$ — пространство Соболева). Операторы L и M определим формулами $L = 1 - \varkappa\Delta$, $M = \nu\Delta$. Очевидно, $L, M \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем оператор L фредгольмов при всех $\varkappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Лемма 3.1. *При всех $\varkappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ оператор M (L, σ)-ограничен, причем ∞ — полюс порядка нуль L-резольвенты оператора M.*

Доказательство. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ множество собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ в области Ω, занумерованное по невозрастанию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k\}$ — ортонормированное (в смысле L_2) множество соответствующих собственных функций. Тогда

$$\ker L = \begin{cases} \{0\}, & \text{если} \quad \varkappa^{-1} \notin \{\lambda_k\}, \\ \operatorname{span}\{\varphi_l : \varkappa^{-1} = \lambda_l\}. \end{cases}$$

В случае $\ker L = \{0\}$ существует оператор $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$, и поэтому оператор $M \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (L, σ)-ограничен. В другом случае возьмем вектор $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$, т. е.

$$\varphi = \sum_{\varkappa^{-1} = \lambda_l} a_l \varphi_l, \quad a_l \in \mathbb{R}, \quad \sum_{\varkappa^{-1} = \lambda_l} |a_l| > 0.$$

Поскольку

$$M\varphi = \nu \sum_{\varkappa^{-1} = \lambda_l} \lambda_l a_l \varphi_l \notin \operatorname{im} L,$$

вектор φ не имеет M-присоединенных векторов, и утверждение вытекает из следствия 1.1.

Прежде чем определить оператор N, напомним один результат из приложения в [17].

Лемма 3.2. *Пусть $f \in C^\infty(\Omega)$ и $m > n/2$. Тогда $F \in C^\infty\big(W_2^m\big)$, где $F : u \to f(u)$.*

В силу этого при любом векторе $f \in \mathfrak{F}$, $m + 2 > n/2$ и любой функции $K \in C^\infty(\Omega)$ оператор $N : u \to K(u) - f$ принадлежит классу $C^\infty(\mathfrak{U})$, а ввиду непрерывности вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ также и классу $C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Редукция задачи (0.1)–(0.3) к задаче (0.4), (0.5) закончена.

По лемме 1.1 построим проектор

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если} \quad \varkappa^{-1} \notin \{\lambda_l\}, \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\varkappa^{-1} = \lambda_l} \langle \cdot, \varphi_l \rangle \varphi_l, \end{cases}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в L^2. Проектор Q имеет тот же вид, но определен на пространстве $\mathfrak{F}$. Фиксируем $f \in \mathfrak{F}$, $m \geq n/2 - 2$ и построим множество

$$\mathfrak{M}_f = \begin{cases} \mathfrak{U}, & \text{если} \quad \varkappa^{-1} \notin \{\lambda_l\}, \\ \{u \in \mathfrak{U} : \langle Mu - N(u), \varphi_l \rangle = 0, \ \varkappa^{-1} = \lambda_l\}. \end{cases}$$

В случае $\varkappa^{-1} \notin \{\lambda_l\}$ множество $\mathfrak{M}_f$ с очевидностью является гладким банаховым C^∞-многообразием. В случае $\varkappa^{-1} \in \{\lambda_l\}$ это еще предстоит доказать. Однако в обоих случаях справедлива

Теорема 3.1. (i) *При любых* $\varkappa^{-1} \notin \{\lambda_k\}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$, $m > n/2 - 2$, $f \in \mathfrak{F}$, $u_0 \in \mathfrak{U}$ *и некотором* $T \in \mathbb{R}_+$ *существует единственное решение* $u \in C^\infty((-T,T);\mathfrak{U})$ *задачи* (0.1)–(0.3).

(ii) *Пусть при* $\varkappa \in \{\lambda_k\}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$, $m > n/2 - 2$, $f \in \mathfrak{F}$ *множество* $\mathfrak{M}_f$ *в точке* u_0 *является банаховым* C^∞*-многообразием. Тогда при некотором* $T \in \mathbb{R}_+$ *существует единственное решение* $u \in C^\infty((-T,T);\mathfrak{M}_f)$ *задачи* (0.1)–(0.3).

Теорема 3.1 непосредственно вытекает из теоремы 2.1. Отметим лишь, что в нашем случае $H \equiv \mathbb{O}$ и поэтому в силу (2.1) любое решение задачи (0.1)–(0.3) с необходимостью оказывается квазистационарной траекторией.

4. Фазовое пространство

Вернемся к задаче (0.4), (0.5).

Определение 4.1. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (0.5), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (0.5) лежит в $\mathfrak{U}$, т. е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при всех $t \in (-T,T)$;

(ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ и некотором $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение задачи (0.4), (0.5).

Из теоремы 3.1(i) вытекает, что в случае $\varkappa^{-1} \notin \{\lambda_k\}$ множество $\mathfrak{M}_f$ является фазовым пространством уравнения (0.5). В случае $\varkappa^{-1} \in \{\lambda_k\}$ любое решение уравнения (0.5) является квазистационарной траекторией и поэтому лежит в $\mathfrak{M}_f$. Осталось найти условия, при которых множество $\mathfrak{M}_f$ является простым банаховым C^∞-многообразием.

Определение 4.2. Оператор $A \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ называется *s-монотонным*, если

$$\langle A'_u v, v\rangle > 0 \quad \forall u, v \in \mathfrak{U} \setminus \{0\},$$

и *сильно коэрцитивным*, если

$$\lim_{||v||_{L^2}\to\infty} \frac{\langle A(u+v), v\rangle}{||v||_{L^2}} = +\infty \quad \forall u \in \mathfrak{U}.$$

Как нетрудно видеть, сильно коэрцитивный оператор является коэрцитивным [18], а s-монотонный — строго монотонным, т. е.

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle > 0 \quad \forall u, v \in \mathfrak{U}, \quad u \neq v.$$

Теорема 4.1. *Пусть* $\varkappa^{-1} \in \{\lambda_k\}$, *оператор* $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *s-монотонен и сильно коэрцитивен. Тогда при любых* $\nu \in \mathbb{R}_+$, $f \in \mathfrak{F}$ *множество* $\mathfrak{M}_f \setminus \{0\}$ *является простым банаховым* C^∞*-многообразием, моделируемым пространством* $\mathfrak{U}^1$.

Доказательство. Покажем сначала непустоту множества $\mathfrak{M}_f$. Для этого фиксируем $\nu \in \mathbb{R}_+$, $f \in \mathfrak{F}$, $u^1 \in \mathfrak{U}^1$ и докажем, что система уравнений

$$\langle M(u^1 + u^0) - N(u^1 + u^0), \varphi_l\rangle = 0, \quad \varkappa^{-1} = \lambda_l \tag{4.1}$$

имеет одно решение $u^0 \in \mathfrak{U}^0 \equiv \ker L$.

Положим

$$u^0 = \sum_{\varkappa^{-1}=\lambda_l} a_l \varphi_l$$

и по (4.1) построим оператор $K : \ker L \to \ker L$,

$$A(u^0) = \mathrm{col}(-\nu\lambda_l a_l \varphi_l + \langle N(u^1 + u^0), \varphi_l\rangle\varphi_l), \quad \varkappa^{-1} = \lambda_l.$$

Оператор A s-монотонен. Действительно,

$$\langle A'_{u^0} v^0, v^0\rangle = -\nu \sum_{\varkappa^{-1}=\lambda_l} \lambda_l b_l^2 + \langle N'_{u^0} v^0, v^0\rangle,$$

где

$$v^0 = \sum_{\varkappa^{-1}=\lambda_l} b_l \varphi_l, \quad b_l \in \mathbb{R}, \quad \sum_{\varkappa^{-1}=\lambda_l} |b_l| > 0.$$

Кроме того, очевидно, что оператор K коэрцитивен. Отсюда в силу теоремы Вишика — Минти — Браудера [18] следует существование единственного решения системы (4.1).

Теперь пусть $u \in \mathfrak{M}_f$, положим $u^1 = Pu$. В силу s-монотонности оператора K и теоремы о неявной функции из (4.1) вытекает существование окрестностей $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{M}_f$, $\mathfrak{O}^1 \subset \mathfrak{U}^1$ точек u, u^1 соответственно и оператора $\delta \in C^\infty(\mathfrak{O}^1; \mathfrak{O})$ такого, что $\delta^{-1} \subset P$.

Замечание 4.1. При условии $K(0) = 0$ точка 0 принадлежит $\mathfrak{M}_f$ точно тогда, когда $f = 0$.

Замечание 4.2. Условия s-монотонности и сильной коэрцитивности более обременительны, чем условия в [2]. Однако они выполняются в случае

$$K(u) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m u^{2m+1}, \quad a_m \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осколков А. П.* Неустойчивые течения вязкоупругих жидкостей // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 159. С. 103–131.
2. *Котсиолис А. А., Осколков А. П., Шадиев Р. Д.* Нелокальные задачи для класса нелинейных диссипативных уравнений типа С. Л. Соболева // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1992. Т. 199. С. 91–113.
3. *Войткунский Я. И., Амфилохиев В. Б., Ходорковский Я. С.* Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств // Тр. Ленингр. кораблестроительного ин-та. 1970. Т. 69. С. 16–24.
4. *Coleman B. D., Duffin R. J., Mizel V. J.* Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. V. 19. P. 100–116.
5. *Свиридюк Г. А., Сукачева Т. Г.* Фазовые пространства одного класса полулинейных уравнений типа Соболева // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 2. С. 250–258.
6. *Свиридюк Г. А.* Задача Коши для линейного сингулярного операторного уравнения типа Соболева // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 12. С. 2169–2171.
7. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
8. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1999.
9. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
10. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 4. С. 47–74.
11. *Федоров В. Е.* Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 3. С. 173–200.
12. *Свиридюк Г. А.* Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57, № 3. С. 192–207.

13. *Свиридюк Г. А., Сукачева Т. Г.* Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 5. С. 101–119.
14. *Свиридюк Г. А., Якупов М. М.* Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 11. С. 1538–1543.
15. *Свиридюк Г. А., Казак В. О.* Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 2. С. 292–297.
16. *Лект С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. Волгоград: Платон, 1996.
17. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.
18. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

Статья поступила 27 апреля 2002 г.

Свиридюк Георгий Анатольевич, Казак Владимир Олегович
Челябинский гос. университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454021
`ridyu@csu.ru`, `kazak@csu.ru`