Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 517.983

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ ТРЕТЬЕГО РОДА

В. Б. Коротков

Аннотация: Устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых оператор в пространстве всех квадратично суммируемых функций представляется в виде суммы оператора умножения на ограниченную функцию и интегрального оператора.

Ключевые слова: оператор умножения, интегральный оператор, ядро интегрального оператора, интегральный оператор третьего рода.

Пусть (X, μ) — пространство с конечной положительной мерой μ, не имеющей атомов, $L_0 = L_0(X, \mu)$ — пространство всех определенных на X μ-измеримых μ-п. в. конечных функций (с обычным отождествлением функций, отличающихся одна от другой лишь на множестве μ-меры 0), $L_2 = L_2(X, \mu)$ — пространство всех $f \in L_0$ с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int\limits_X |f(t)|^2 \, d\mu(t) \right)^{1/2}.$$

Определение 1. Линейный непрерывный оператор A в L_2 называется *оператором умножения на функцию* $a \in L_\infty$, если $(Af)(s) = a(s)f(s)$ для всех $f \in L_2$.

Лемма. *Линейный непрерывный оператор τ в L_2 является оператором умножения на функцию $a \in L_\infty$ тогда и только тогда, когда для любого μ-измеримого множества $e \subset X$ выполняется равенство $P_e \tau P_{X \setminus e} = 0$; здесь $P_E f = \chi_E f$, $f \in L_2$, χ_E — характеристическая функция множества E.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Для любого μ-измеримого множества $e \subset X$ получим $P_e \tau (1 - P_e) = 0$; здесь 1 — тождественный оператор в L_2. Следовательно, $P_e \tau = P_e \tau P_e$. Пусть $\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная 1, и пусть $a = \tau \mathbf{1}$. Имеем $\chi_e a = \chi_e \tau \chi_e$. Пусть $s \in e$, тогда $(\tau \chi_e)(s) = \chi_e(s) a(s)$. Так как $P_{X \setminus e} \tau P_e = 0$, то $\tau P_e = P_e \tau P_e$. Пусть $s \in X \setminus e$. Отсюда вытекает, что $(\tau \chi_e)(s) = 0$. Значит, $(\tau \chi_e)(s) = a(s) \chi_e(s)$.

Покажем, что $a \in L_\infty$. Если $\tau = 0$, то $a = 0$. Пусть $\tau \neq 0$. Предположим противное: $a \notin L_\infty$. Тогда найдется множество E, $\mu E > 0$, такое, что $|a(s)| \geq 2\|\tau\|$ для всех $s \in E$. Поэтому

$$\|\tau\| \geq \left\| \tau \frac{\chi_E}{\sqrt{\mu E}} \right\| \geq 2\|\tau\| \left\| \frac{\chi_E}{\sqrt{\mu E}} \right\| = 2\|\tau\|$$

и $\|\tau\| = 0$, что невозможно.

Пусть ω — ступенчатая функция: $\omega(t) = \sum_n \alpha_n \chi_{e_n}(t)$. Так как $\tau\chi_e = a\chi_e$, то $\tau\omega = a\omega$. Для произвольной функции φ из L_2 найдется последовательность ступенчатых функций $\{\omega_m\}$, сходящаяся к φ по норме L_2. Имеем при $m \to \infty$

$$\|\tau\varphi - a\varphi\| \leq \|\tau\|\,\|\varphi - \omega_m\| + \|a\|_{L_\infty}\|\omega_m - \varphi\| \to 0.$$

Следовательно, $\tau\varphi = a\varphi$.

Определение 2. Линейный оператор $V : L_2 \to L_0$ называется *интегральным*, если существует определенная на $X \times X$ $(\mu \times \mu)$-измеримая $(\mu \times \mu)$-п. в. конечная функция $K(s,t)$ такая, что для всех $f \in L_2$

$$Vf(s) = \int_X K(s,t) f(t)\, d\mu(t)$$

для μ-п. в. $s \in X$; интеграл понимается в лебеговом смысле. Функция $K(s,t)$ называется *ядром* интегрального оператора V.

Определение 3 [1, с. 5]. Линейный оператор $W : L_2 \to L_0$ называется *интегральным оператором* 3-*го рода*, если W — сумма оператора умножения на функцию из L_∞ и интегрального оператора.

Используемое ниже понятие модуля оператора см. в [2, с. 46].

Теорема. *Линейный непрерывный оператор $T : L_2 \to L_2$ является интегральным оператором 3-го рода тогда и только тогда, когда найдется интегральный оператор $Z : L_2 \to L_0$ с неотрицательным ядром $Z(s,t)$ такой, что для любого множества e, $\mu e > 0$, оператор $P_e T P_{X\setminus e}$ регулярен как оператор из L_2 в L_0 и $|P_e T P_{X\setminus e}| \leq Z$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $Tf = Af + Kf$, $f \in L_2$, где $Af = af$, $a \in L_\infty$, и $K : L_2 \to L_0$ — интегральный оператор с ядром $K(s,t)$. В качестве Z можно выбрать интегральный оператор с ядром $|K(s,t)|$.

Достаточность. Рассмотрим квадрат $X \times X$. Разбив X на два непересекающихся множества Δ и δ с равными мерами, получим два диагональных квадрата $\Delta \times \Delta$ и $\delta \times \delta$ и два недиагональных квадрата $\Delta \times \delta$ и $\delta \times \Delta$. Разбивая аналогично диагональные квадраты $\Delta \times \Delta$ и $\delta \times \delta$, получим четыре диагональных квадрата и четыре недиагональных квадрата. Продолжая неограниченно процедуру разбиения всех диагональных квадратов, получим последовательность попарно не пересекающихся недиагональных квадратов $\{e_i \times g_i,\ i = 1, 2, 3, \dots\}$ со свойствами

$$(\mu \times \mu)\left\{X \times X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}(e_i \times g_i)\right\} = 0, \quad e_i \cap g_i = \varnothing,\ i = 1, 2, 3, \dots,$$

здесь $\varnothing$ — пустое множество.

Пусть $\tau_i : L_2 \to L_0$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots,$ — линейные операторы. Будем говорить, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i$ *σ-слабо сходится к оператору* τ_0, если найдется разбиение множества X на попарно не пересекающиеся μ-измеримые множества G_j, $j = 1, 2, 3, \dots$, такое, что для всех $i, j = 1, 2, 3, \dots$ отображения $P_{G_j}\tau_0 : L_2 \to L_2$, $P_{G_j}\tau_i : L_2 \to L_2$ суть линейные непрерывные операторы и для всех $j = 1, 2, 3, \dots$ и $f, g \in L_2$

$$\lim_{m\to\infty}\left(P_{G_j}\sum_{i=1}^{m}\tau_i f, g\right) = (P_{G_j}\tau_0 f, g),$$

здесь

$$(u, v) = \int\limits_X u(t)\overline{v(t)}\, d\mu(t).$$

Так как $Z : L_2 \to L_0$ — положительный линейный оператор, то по теореме 4 из [3, с. 150] найдется разбиение множества X на попарно не пересекающиеся μ-измеримые множества G_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$, такое, что $P_{G_j} Z : L_2 \to L_2$ — линейный непрерывный оператор для всех $j = 1, 2, 3, \ldots$. Так как при этом для $(\mu\times\mu)$-п. в. (s, t)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{e_i}(s)\chi_{g_i}(t) = 1,$$

то по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, в данном случае под знаком интеграла по $X \times X$ с мажорирующей функцией

$$\chi_{G_j}(s)Z(s,t)|f(t)|\,|g(s)|,$$

следует, что для любого $j = 1, 2, 3, \ldots$ и любых $f, g \in L_2$

$$\lim_{m\to\infty} \left(P_{G_j} \sum_{i=1}^{m} P_{e_i} Z P_{g_i} f, g \right) = (P_{G_j} Z f, g).$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P_{e_i} Z P_{g_i}$ σ-слабо сходится к Z.

Поскольку $|P_{e_i} T P_{g_i}| \leq P_{e_i} Z P_{g_i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, то по теореме 2.4 из [2] $P_{e_i} T P_{g_i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, — интегральный оператор, причем его ядро обращается в 0 вне $e_i \times g_i$. Отсюда и из σ-слабой сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P_{e_i} Z P_{g_i}$ следует, что ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P_{e_i} T P_{g_i}$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |P_{e_i} T P_{g_i}|$ σ-слабо сходятся, при этом

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i} T P_{g_i} \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |P_{e_i} T P_{g_i}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i} Z P_{g_i} = Z.$$

Отсюда и из [2, теорема 2.4] вытекает интегральность оператора

$$K = \sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i} T P_{g_i}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} P_e(T-K)P_{X\setminus e} &= P_e T P_{X\setminus e} - P_e K P_{X\setminus e} \\ &= P_e T P_{X\setminus e} - P_e \left(\sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i} T P_{g_i} \right) P_{X\setminus e} = P_e T P_{X\setminus e} - \sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i} P_e T P_{X\setminus e} P_{g_i}. \end{aligned} \tag{1}$$

По условию теоремы $|P_e T P_{X\setminus e}| \leq Z$, следовательно, по теореме 2.4 из [2] оператор $P_e T P_{X\setminus e}$ интегральный. Пусть K_e — его ядро. Так как для $(\mu \times \mu)$-п. в. (s, t)

$$K_e(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{e_i}(s)\chi_{g_i}(t)\chi_e(s)\chi_{X\setminus e}(t)K_e(s,t),$$

то из (1) следует, что для всех e, $\mu e > 0$, будет

$$P_e(T - K)P_{X\setminus e} = 0. \tag{2}$$

В силу того, что $K : L_2 \to L_0$ — интегральный оператор, по теореме о регулярной и компактной факторизации [4, с. 46] существует разбиение $\{E_j\}$ множества X на попарно не пересекающиеся μ-измеримые множества такое, что $P_{E_j}K : L_2 \to L_2$ — интегральный вполне непрерывный оператор при каждом $j = 1, 2, 3, \dots$. Покажем, что $T - K$ — оператор умножения на функцию из L_∞. В силу (2) имеем

$$P_e(P_{E_j}T - P_{E_j}K)P_{X\setminus e} = 0$$

для любого μ-измеримого множества e. Отсюда и из того, что $P_{E_j}(T-K) : L_2 \to L_2$ — линейный непрерывный оператор, получим по лемме, что $P_{E_j}(T - K)f = a_jf$, $f \in L_2$, для всех $j = 1, 2, 3, \dots$. Положим $a = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j\chi_{E_j}$ и покажем, что $a \in L_\infty$. Предположим противное. Тогда найдется множество E_0, $\mu E_0 > 0$, такое, что $|a(s)| \geq 3\|T\|$ для всех $s \in E_0$. Пусть j_0 — индекс такой, что $\mu(E_0 \cap E_{j_0}) > 0$. Положим $e_0 = E_0 \cap E_{j_0}$. Рассмотрим ортонормированную систему $\{\psi_n\}$, все функции которой обращаются в 0 вне e_0. Поскольку $P_{e_0}K : L_2 \to L_2$ — вполне непрерывный оператор, найдется номер n_0 такой, что $\|P_{e_0}K\psi_n\| \leq \|T\|$ для всех $n \geq n_0$. Тогда для всех $n \geq n_0$

$$\|T\| \geq \|T\psi_n\| \geq \|P_{e_0}a\psi_n + P_{e_0}K\psi_n\| \geq \|a\psi_n\| - \|P_{e_0}K\psi_n\| \geq 3\|T\| - \|T\| = 2\|T\|,$$

что невозможно.

Итак, оператор $(Af)(s) = a(s)f(s)$ — линейный непрерывный оператор в L_2. Следовательно, $T = A + K$ — линейный непрерывный интегральный оператор 3-го рода в L_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. М.: Наука, 1985.
2. *Бухвалов А. В.* Приложения методов теории порядково ограниченных операторов к теории операторов в пространствах L^p // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, № 6. С. 37–83.
3. *Никишин Е. М.* Резонансные теоремы и надлинейные операторы // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 6. С. 129–191.
4. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.

Статья поступила 27 сентября 2002 г., окончательный вариант — 25 июня 2003 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090