*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5*

*УДК 514.1*

# ОБ ОДНОМ ЭКВИВАЛЕНТНОМ УСЛОВИИ ПЛОСКОЙ МЕТРИКИ

**Х. Ким, Дж. Ким**

**Аннотация:** Доказано, что на 8-мерном многообразии с нулевой эйлеровой характеристикой каждая семиплоская метрика должна быть плоской.

**Ключевые слова:** 8-мерное многообразие, нулевая эйлерова характеристика, семиплоская метрика, плоская метрика.

## 1. Введение

Локальная геометрия многообразия дает информацию о его глобальной топологии. Так, обобщенная теорема Гаусса — Бонне [1, 2] утверждает, что эйлерова характеристика $\chi$ компактного ориентированного риманова многообразия $M^{4k}$ может быть представлена интегралом

$$\chi = \frac{2}{V}\frac{[(2k)!]^2}{4k}\int\limits_M \operatorname{trace}(*R_{2k} * R_{2k})\, dV,$$

где $V$ — объем евклидовой единичной $4k$-сферы, $dV$ — элемент объема на $M$, звездочка означает $*$-оператор Ходжа и $R_{2k}$ — $2k$-оператор кривизны. Если $R_{2k}$ коммутирует с $*$, т. е. $R_{2k}* = *R_{2k}$, то будем говорить, что *выполнено условие Торпа*, метрику называть *торповой метрикой* или *метрикой Торпа*, а многообразие — *торповым многообразием* или *многообразием Торпа.* В 4-мерном случае торпова метрика эйнштейнова [3, 4], и в размерности $4k$, более высокой, чем 4, торповы многообразия изучались в [4]. С другой стороны, если $R_{2k}$ антикоммутирует с $*$, т. е. $R_{2k}* = - * R_{2k}$, будем называть это условие *антиусловием Торпа*, метрику — *антиторповой метрикой*, а многообразие — *антиторповым многообразием.* Будем в дальнейшем риманову метрику называть *полуплоской*, если она скалярно-плоская и конформно-плоская, иными словами, ее скалярная кривизна и тензор Вейля равны нулю. В частности, в размерности 4 антиторпова метрика полуплоская, верно и обратное. В размерности $4k$, более высокой, чем 4, однако, антиторпова метрика не обязательно будет полуплоской, и обратно. Пусть, например, $T^{2k+1}$ — плоский тор и $M^{2k-1}$ — компактное ориентированное неплоское риманово многообразие. Тогда риманово произведение $T^{2k+1} \times M^{2k-1}$ будет антиторповым многообразием. Однако, вообще говоря, метрика произведения не будет полуплоской. С другой стороны, пусть $S^{4k}$ — стандартная $4k$-сфера и $H^{4k}$ — стандартное $4k$-гиперболическое многообразие. Тогда метрика произведения $S^{4k}$ и $H^{4k}$ полуплоская, но вместе с тем не антиторпова. Риманову метрику на компактном ориентированном многообразии $M^{4k}$

The authors wish to acknowledge the financial support of the Korea Research Foundation made in the program year of 1998.

назовем *семиплоской*, если она удовлетворяет условию полуплоской метрики и антиусловию Торпа. Семиплоская метрика не обязательно плоская. Например, метрика произведения $S^{4k+2}$ и $H^{4k+2}$ будет семиплоской, но не плоской метрикой. Цель настоящей работы — исследовать, когда семиплоская метрика будет плоской.

**Теорема 1.** *На компактном ориентированном* 8*-мерном многообразии с* $\chi = 0$ *всякая семиплоская метрика будет плоской.*

Важным составляющим в доказательстве этой теоремы является

**Лемма 1.** *Пусть* $(M, g)$ *— риманово многообразие размерности* 8*. Тогда*

$$\operatorname{trace} R_4 = \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{30}{56}s^2 - \frac{10}{3}\left|\mathrm{ric}_o\right|^2 + 4\left|W\right|^2\right\},$$

*где* $s$ *— скалярная кривизна* $\mathrm{ric}_o$*, — тензор Риччи с нулевым следом, т. е.* $\mathrm{ric}_o = \mathrm{ric} - \frac{s}{8}g$*, и* $W$ *— тензор Вейля.*

Из леммы 1 можно получить, что $\operatorname{trace} R_4$ неположителен, если метрика полуплоская.

## 2. $p$-Оператор кривизны

Пусть $M$ — риманово многообразие размерности $n$. Через $\bigwedge^p(M)$ обозначим связку $p$-векторов из $M$. Это риманово векторное расслоение с внутренним произведением на слое $\bigwedge^p(x)$ над точкой $x$ [2]. Пусть $R$ означает ковариантный тензор кривизны $M$. Для каждого четного $p > 0$ определим $p$-тензор кривизны $R_p$ на $M$ как ковариантное тензорное поле порядка $2p$, задаваемое так:

$$\begin{aligned}&R_p(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p)\\ &= \frac{1}{2^{p/2}p!}\sum_{\alpha,\beta \in S_p}\varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta)R(u_{\alpha(1)}, u_{\alpha(2)}, v_{\beta(1)}, v_{\beta(2)})\cdots R(u_{\alpha(p-1)}, u_{\alpha(p)}, v_{\beta(p-1)}, v_{\beta(p)}),\end{aligned}$$

где $u_i, v_j \in T_xM$, $S_p$ — группа перестановок на $(1, \dots, p)$ и $\varepsilon(\alpha)$ для $\alpha \in S_p$ — знак перестановки $\alpha$.

Тензор $R_p$ обладает следующими свойствами. Он альтернирующий по первым $p$ переменным, альтернирующий по последним $p$ переменным и инвариантен относительно операции перестановки первых $p$ переменных с последними $p$ переменными. Однако для каждой точки $x \in M$ можно рассматривать $R_p$ как симметричную билинейную форму на $\bigwedge^p(x)$. Используя внутреннее произведение на $\bigwedge^p(x)$, можно $R_p$ в $x$ отождествить с самосопряженным линейным оператором $R_p$ на $\bigwedge^p(x)$. Такое отождествление дается формулой

$$\langle R_p(u_1 \wedge \dots \wedge u_p), v_1 \wedge \dots \wedge v_p\rangle \equiv R_p(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p),$$

где $u_i, v_j \in T_xM$. В дальнейшем мы будем использовать одно и то же обозначение для $p$-операторов кривизны и для $p$-тензоров кривизны. Для $p = n$ пространство $\bigwedge^n(x)$ одномерно, и тем самым самосопряженный линейный оператор $R_n : \bigwedge^n(x) \longrightarrow \bigwedge^n(x)$ представляет собой умножение скаляра на тождественный оператор. Точнее, гомоморфизм линейных расслоений $R_n : \bigwedge^n(M) \longrightarrow \bigwedge^n(M)$ есть

$$R_n = KI,$$

где $I$ — тождественный автоморфизм на $\bigwedge^n(M)$ и $K$ — кривизна Липшица — Киллинга на $M$ [5]. Более того, для $x \in M$

$$K(x) = R_n(e_1, \ldots, e_n, e_1, \ldots, e_n),$$

где $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормальный базис на $T_xM$.

Обобщенная теорема Гаусса — Бонне [1] дает выражение эйлеровой характеристики $\chi$ компактного ориентированного риманова многообразия четной размерности $n$ через интеграл:

$$\chi = \frac{2}{c_n} \int\limits_M K\, dV,$$

где $K$ — кривизна Липшица — Киллинга на $M$, $c_n$ — мера евклидовой $n$-мерной сферы и $dV$ — элемент объема на $M$.

Покажем, что кривизна Липшица — Киллинга $K$ на $M$ может быть выражена в терминах $R_p$ и оператора Ходжа $*$.

Пусть $M$ — ориентированное риманово многообразие четной размерности $n$. Тогда согласно [2] кривизна Липшица — Киллинга $K$ на $M$ может также быть представлена как функция, значение которой в точке $x \in M$ находится по формуле

$$\frac{p!(n-p)!}{n!} \operatorname{trace}(*R_{n-p} * R_p),$$

где $p = 2, 4, 6, \ldots, (n-2)$. Для ориентированного риманова многообразия размерности $n = 4k$ можно рассмотреть оператор средней кривизны $R_{2k}$, и если он удовлетворяет антиусловию Торпа

$$R_{2k}* = - * R_{2k},$$

то, поскольку $*^2 = \mathrm{Id}$, формула следа для $K$ сводится к такой:

$$K = -\frac{[(2k)!]^2}{(4k)!} \operatorname{trace} R_{2k}^2 \leq 0,$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда $R_{2k}= 0$. Из предыдущих утверждений легко выводится необходимое условие существования антиторповой метрики.

**Теорема 2.** *Пусть $M$ — компактное ориентируемое $4k$-мерное риманово многообразие, допускающее антиторпову метрику. Тогда*

$$\chi \leq 0,$$

*где $\chi$ — эйлерова характеристика $M$. Более того, $\chi = 0$ тогда и только тогда, когда $R_{2k} \equiv 0$.*

Далее мы увидим, что в 4-мерном случае антиторпова метрика полуплоская, верен также и обратный факт.

**Теорема 3.** *На 4-мерном римановом многообразии $(M, g)$ метрика $g$ будет полуплоской тогда и только тогда, когда $g$ — антиторпова метрика.*

Доказательство. Рассматривая $R_{2k} \equiv R$ в $S^2 \bigwedge^2 T^*M^4$ как линейное отображение на $\bigwedge^2 T^*M^4$ и записывая разложение

$$\bigwedge^2 T^*M^4 = \bigwedge^+ T^*M^4 \oplus \bigwedge^- T^*M^4,$$

где $\bigwedge^+ T^*M^4$ — $(+1)$-собственное (автодуальное) пространство, $\bigwedge^- T^*M^4$ — $(-1)$-собственное (антиавтодуальное) пространство $*$-оператора Ходжа соответственно, приходим к следующему выражению для $R$ [3]:

$$\begin{array}{ccc} & \text{автодуальное} \quad \text{антиавтодуальное} & \\ R = & \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \frac{s}{12}\,\mathrm{Id} & \mathrm{ric}_o \\ \hline {}^t\,\mathrm{ric}_o & W^- + \frac{s}{12}\,\mathrm{Id} \end{array}\right) & \begin{array}{l}\text{автодуальное}\\ \text{антиавтодуальное}\end{array} \end{array}$$

где $W^+$, $W^-$ — автодуальная и антиавтодуальная части тензора Вейля $W$ соответственно.

Нетрудно заметить, что антиусловие Торпа влечет одновременно $R$ (автодуальное пространство) $=$ антиавтодуальное пространство и $R$ (антиавтодуальное пространство) $=$ автодуальное пространство. Отсюда вытекает, что антиусловие Торпа равносильно одновременному обращению в нуль скалярной кривизны и тензора Вейля, так что любая антиторпова метрика полуплоская и обратно. Это завершает доказательство.

## 3. Эквивалентное условие плоской метрики

Метрика риманова произведения $S^{4k+2}$ и $H^{4k+2}$ полуплоская, но не плоская. С другой стороны, мы докажем, что на компактном ориентированном многообразии размерности 8 с $\chi = 0$ каждая полуплоская метрика плоская.

Следующая лемма вносит существенный вклад в доказательство основного результата.

**Лемма 1.** *Пусть $(M, g)$ — риманово многообразие размерности 8. Тогда*

$$\operatorname{trace} R_4 = \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{30}{56}s^2 - \frac{10}{3}|\,\mathrm{ric}_o\,|^2 + 4|W|^2\right\},$$

*где $s$ — скалярная кривизна, $\mathrm{ric}_o$ — тензор Риччи с нулевым следом, т. е. $\mathrm{ric}_o = \mathrm{ric} - \frac{s}{8}g$ и $W$ — тензор Вейля.*

Доказательство. Для 4-формы $\{e_a \wedge e_b \wedge e_c \wedge e_d\}$ с учетом эйнштейнова суммирования имеем

$$\operatorname{trace} R_4 = \frac{1}{2^2} R^{[ab}_{[ab}\ R^{cd]}_{cd]} = \frac{1}{2^2} R^{ab}_{[ab}\ R^{cd}_{cd]} = \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{6}\right)\{R^{ab}_{ab}\ R^{cd}_{cd} + R^{ab}_{ac}\ R^{cd}_{db} + R^{ab}_{ad}\ R^{cd}_{bc} + R^{ab}_{bc}\ R^{cd}_{ad} + R^{ab}_{bd}\ R^{cd}_{ca} + R^{ab}_{cd}\ R^{cd}_{ab}\},$$

где $[\ ]$ — кососимметризация и $\{e_k\}_{k=1}^{8}$ — ортонормальный репер. Проанализируем члены этой суммы по отдельности:

(i) $R^{ab}_{ab}\ R^{cd}_{cd} = \frac{30}{56}s^2 - \frac{10}{3}\,\mathrm{ric}^c_{oc}\,\mathrm{ric}^c_{oc} + 2W^{cd}_{cd}\ W^{cd}_{cd}$;

(ii) $R^{ab}_{ac}\ R^{cd}_{db} = -\frac{5}{6}\,\mathrm{ric}^b_{oc}\,\mathrm{ric}^c_{ob} + W^{db}_{dc}\ W^{dc}_{db}$;

(iii) $R^{ab}_{cd}\ R^{cd}_{ab} = W^{ab}_{cd}\ W^{cd}_{ab}$,

откуда

$$\operatorname{trace} R_4 = \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{30}{56}s^2 - \frac{10}{3}\,\mathrm{ric}^c_{oc}\,\mathrm{ric}^c_{oc} - \frac{10}{3}\,\mathrm{ric}^b_{oc}\,\mathrm{ric}^c_{ob} + 2W^{cd}_{cd}\ W^{cd}_{cd} + 4W^{db}_{dc}\ W^{dc}_{db} + W^{ab}_{cd}\ W^{cd}_{ab}\right\},$$

что завершает доказательство.

**Теорема 4.** *На компактном ориентированном многообразии размерности* 8 *с* $\chi = 0$ *каждая полуплоская метрика плоская.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что $R_4 = 0$, в частности, $\operatorname{trace} R_4 = 0$, откуда легко вытекает, что тензор Риччи будет нулевым тензором при выполнении условия полуплоской метрики и леммы 1. Теорема доказана.

**Следствие 1.** *На торе размерности* 8 *каждая семиплоская метрика будет плоской.*

**Следствие 2.** *На произведении сфер* $S^p \times S^q$ *с нечетным* $p$ *и* $p + q = 8$ *не существует семиплоской метрики.*

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Chern S. S.* A simple intrinsic proof of the Gauss–Bonnet theorem for closed Riemannian manifolds // Ann. Math. 1944. V. 45. P. 747–752.
2. *Thorpe J. A.* Some remarks on the Gauss–Bonnet integral // J. Math. Mech. 1969. V. 18. P. 779–786.
3. *Besse A. L.* Einstein manifolds. Berlin etc.: Springer Verl., 1986.
4. *Kim J. m.* Einstein–Thorpe manifolds: PhD Thes. in S.U.N.Y at stony brook, 1998.
5. *Kuiper H. N.* On conformally flat spaces in the large // Ann. Math. 1949. V. 50. P. 916–924.


*Статья поступила 28 июля 2002 г.*

*Hobum Kim,* *Jaeman Kim*
*Department of mathematics, Yonsei University, Shinchon 134, Seoul, Korea*
kimbh@math.yonsei.ac.kr, jaeman@math.yonsei.ac.kr