Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 517.49

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА И ИХ ОДНО ПРИЛОЖЕНИЕ

Аг. Х. Ханмамедов

Аннотация: Построены операторы преобразования с условиями на бесконечности для возмущенного уравнения Хилла. Показано одно применение оператора преобразования при исследовании решений некоторого нелинейного разностного уравнения.

Ключевые слова: разностное уравнение Хилла, возмущенное разностное уравнение Хилла, оператор преобразования, цепочка Тоды, быстро убывающее решение

В работе [1] В. Э. Лянце построил оператор преобразования с условием на бесконечности для некоторого разностного уравнения второго порядка. После этой работы для разностных уравнений, коэффициенты которых сходятся на бесконечности, появились новые виды операторов преобразования, которые использовались при исследовании обратных задач [2, 3]. Вместе с тем для разностного уравнения второго порядка с расходящимися коэффициентами операторы преобразования не изучались. В настоящей работе на примере возмущенного разностного уравнения Хилла мы изучим этот вопрос. Более того, будет показано одно применение оператора преобразования к исследованию некоторого нелинейного уравнения.

В первой части работы рассмотрено возмущенное разностное уравнение Хилла

$$(\hat{a}_{n-1} + a_{n-1})y_{n-1} + (\hat{b}_n + b_n)y_n + (\hat{a}_n + a_n)y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \tag{0.1}$$

в котором λ — комплексный параметр, а вещественные коэффициенты $\hat{a}_n, \hat{b}_n$, a_n, b_n удовлетворяют условиям

$$\hat{a}_{n+N} = \hat{a}_n > 0,\ \hat{b}_{n+N} = \hat{b}_n,\ \hat{a}_n + a_n > 0,\ n = 0, \pm, \dots, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|(|a_n| + |b_n|) < \infty, \tag{0.2}$$

где N — натуральное число. Построены операторы преобразования с условиями на бесконечности, т. е. операторы, переводящие решения невозмущенного уравнения

$$\hat{a}_{n-1}y_{n-1} + \hat{b}_n y_n + \hat{a}_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \tag{0.3}$$

в решения уравнения (0.1) с той же асимптотикой на бесконечности. При $N = 1$ эта задача рассматривалась в работах [2, 4, 5], и поэтому всюду ниже предполагается, что $N > 1$. При наличии последнего условия задача становится значительно сложнее, и основная трудность заключается в нахождении специальных решений уравнения (0.3) с условиями на бесконечности и уравнений для ядер операторов преобразования.

Отметим, что подобная задача для возмущенного уравнения Шредингера с периодическим потенциалом изучалась в работах [6].

Во второй части работы дано одно приложение операторов преобразования в физике нелинейных явлений. Точнее, рассмотрена задача Коши для цепочки Тоды

$$\dot{a}_n = a_n(b_{n+1} - b_n), \quad a_n = a_n(t) > 0,\ n = 0, \pm 1, \dots, \quad \dot{b}_n = 2\big(a_{n-1}^2 - a_n^2\big), \quad (0.4)$$

где точка означает производную по t, с начальными данными

$$a_{2n+j}(0) \to A_{j+1} > 0, \quad b_{2n+j}(0) \to B_{j+1}, \quad n \to \pm\infty, \quad j = 0, 1. \quad (0.5)$$

При этом исследуется быстро убывающее решение задачи (0.4), (0.5), т. е. при $T > 0$ удовлетворяющее условию

$$\sup_{0<t<T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|(|a_{2n+j} - A_{j+1}| - |b_{2n+j} - B_{j+1}|) < \infty, \quad j = 0, 1. \quad (0.6)$$

Известно [4, 7], что при условиях $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ задача (0.4), (0,5) имеет быстро убывающее решение, если начальные данные достаточно быстро стремятся к своим пределам. С помощью результатов, полученных в первой части работы, доказано, что при нарушении одного из этих условий быстро убывающее решение отсутствует.

Автор благодарен М. М. Лаврентьеву за полезные обсуждения и И. М. Гусейнову за ценные замечания.

1. Операторы преобразования

1. Для дальнейших исследований нам понадобятся предварительные сведения, относящиеся к невозмущенному уравнению (0.3). Рассмотрим уравнение (0.3) и сделаем замены:

$$\hat{a}_{nN+j} = \hat{a}_j \stackrel{\text{def}}{=} A_{j+1}, \quad \hat{b}_{nN+j} = \hat{b}_j \stackrel{\text{def}}{=} B_{j+1}, \quad y_{nN+j} = y_{j+1,n}, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Тогда

$$\begin{cases} B_1 y_{1,n} + A_1 y_{2,n} + A_N y_{N,n-1} = \lambda y_{1,n}, \\ A_1 y_{1,n} + B_2 y_{2,n} + A_2 y_{3,n} = \lambda y_{2,n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{N-2} y_{N-2,n} + B_{N-1} y_{N-1,n} + A_{N-1} y_{N,n} = \lambda y_{N-1,n}, \\ A_N y_{1,n+1} + A_{N-1} y_{N-1,n} + B_N y_{N,n} = \lambda y_{N,n}, \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \dots. \quad (1.1)$$

Ищем решение системы разностных уравнений (1.1) в виде

$$y_{j,n} = e_j z^n, \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.2)$$

где $e_1, \dots, e_n, z$ — величины, подлежащие определению. Подставляя в (1.1) вместо $y_{j,n}$, $j = 1, \dots, N$, их выражения (1.2) через $e_1, e_2, \dots, e_N$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (B_1 - \lambda) z e_1 + A_1 z e_2 + A_N e_N = 0, \\ A_1 e_1 + (B_2 - \lambda) e_2 + A_2 e_3 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{N-2} e_{N-2} + (B_{N-1} - \lambda) e_{N-1} + A_{N-1} e_N = 0, \\ A_N z e_1 + A_{N-1} e_{N-1} + (B_N - \lambda) e_N = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Ясно, что система уравнений (1.3) имеет нетривиальное решение лишь тогда, когда определитель ее основной матрицы $\mathbb{A}$ равен нулю. Легко убедиться в том, что

$$\det \mathbb{A} = (-1)^{N-1} A_1 A_2 \dots A_N z^2 + \mu z + (-1)^{N-1} A_1 A_2 \dots A_N,$$

где

$$\mu = \Delta^{\pm} \pm (-1)^N 2 A_1 A_2 \dots A_N,$$

$$\Delta^{\pm} = \begin{vmatrix} B_1 - \lambda & A_1 & \dots & 0 & \pm A_N \\ A_1 & B_2 - \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{N-1} - \lambda & A_{N-1} \\ \pm A_N & 0 & \dots & A_{N-1} & B_N - \lambda \end{vmatrix}.$$

Из условия $\det \mathbb{A} = 0$ находим, что

$$z = z(\lambda) = \frac{(-1)^N \mu}{2 A_1 A_2 \dots A_N} + \sqrt{\left(\frac{(-1)^N \mu}{2 A_1 A_2 \dots A_N}\right)^2 - 1}.$$

Обозначим через $\lambda_1^+ \le \lambda_2^+ \le \dots \le \lambda_N^+$ и $\lambda_1^- \le \lambda_2^- \le \dots \le \lambda_N^-$ корни многочленов Δ^+ и Δ^- соответственно. Как известно [5, 8], эти корни взаимно перемежаются, и их можно расположить в одну строку, а именно

$$\lambda_1^+ < \lambda_1^- \le \lambda_2^- < \lambda_2^+ \le \lambda_3^+ < \dots < \lambda_{N-1}^+ \le \lambda_N^- < \lambda_N^+, \quad \text{если } N \text{ четно},$$

$$\lambda_1^- < \lambda_1^+ \le \lambda_2^+ < \lambda_2^- \le \lambda_3^+ < \dots < \lambda_{N-1}^+ \le \lambda_N^- < \lambda_N^+, \quad \text{если } N \text{ нечетно}.$$

Пусть Γ — комплексная λ-плоскость с разрезами по отрезкам $I_1, I_2, \dots, I_N$, где концы отрезка I_j находятся в точках $\lambda_j^{\pm}$, $j = 1, \dots, N$. В плоскости Γ выберем регулярную ветвь функции $z(\lambda)$ такую, что $z(\infty) = 0$. Поскольку при таком выборе z выполняется равенство $\det \mathbb{A} = 0$, в системе (1.3) вычеркнем последнюю строку. Полагая $e_N \equiv 1$, по правилу Крамера находим, что

$$\begin{aligned} e_m = (z\sigma(1,N))^{-1} \{ &(-1)^{N-m} A_m A_{m+1} \dots A_{N-1} \sigma(1,m) z \\ &+ (-1)^m A_1 \dots A_{m-1} A_N \sigma(m+1, N) \}, \quad m = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\sigma(1,1) = \sigma(N,N) = 1$,

$$\sigma(m,s) = \begin{vmatrix} B_m - \lambda & A_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_m & B_m - \lambda & A_{m+1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{s-2} - \lambda & A_{s-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{s-2} & B_{s-1} - \lambda \end{vmatrix}, \quad s \ge m+1.$$

Таким образом, система уравнений (1.1) имеет специальное решение в виде $(e_1, \dots, e_{N-1}, 1) z^n$. Аналогично доказывается, что она обладает также решением $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{N-1}, 1) z^{-n}$, где

$$\begin{aligned} e_m = \sigma^{-1}(1,N) \{ &(-1)^{N-m} A_m A_{m+1} \dots A_{N-1} \sigma(1,m) \\ &+ (-1)^m A_1 \dots A_{m-1} A_N \sigma(m+1, N) z \}, \quad m = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Многочлен $\sigma(1,N)$ имеет $N-1$ простых вещественных нулей ν_j, $j = 1, \dots, N$. Известно [8], что они расположены между отрезками I_j и I_{j+1}, $j = 1, \dots, N-1$. Более того, векторы $(e_1, \dots, e_{N-1}, 1)$ и $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{N-1}, 1)$ регулярны в области Γ, за исключением точек ν_j, $1, \dots, N$, и непрерывны вплоть до границы $\partial\Gamma$ этой области. Если $\nu_k \notin \{\lambda_j^{\pm}\}_{j=1}^N$, то в точке ν_k один из этих векторов регулярен, а другой имеет простой полюс.

Из вышеуказанных рассуждений вытекает, что уравнение (0.3) имеет специальные решения $\psi_n = \psi_n(\lambda)$ и $\bar{\psi}_n = \bar{\psi}_n(\lambda)$, где

$$\psi_{nN+j} = e_j z^n, \quad \bar{\psi}_{nN+j} = \bar{e}_{j+1} z^{-n}, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad e_N = \bar{e}_N = 1. \tag{1.6}$$

Введем обозначение

$$\rho(\lambda) = (-1)^N A_1 A_2 \dots A_N \sigma^{-1}(1, N)(z^{-1} - z).$$

Используя определение функции $z(\lambda)$, как и в [9, гл. 4, с. 172], можно доказать, что

$$z(\lambda) = \frac{A_1 A_2 \dots A_N}{\lambda^N} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right), \quad \lambda \to \infty. \tag{1.7}$$

Воспользовавшись формулами (1.5)–(1.7) и теоремой о вычетах, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Gamma} \rho(\lambda) \psi_n \bar{\psi}_m \, d\lambda = \delta_{nm}, \quad n, m = 0, \pm 1, \dots, \tag{1.8}$$

где $i = \sqrt{-1}$, δ_{nm} — символ Кронекера.

2. Рассмотрим теперь возмущенное уравнение (0.1). Нас будет интересовать решение $f_n = f_n(\lambda)$ уравнения (0.1), удовлетворяющее условию

$$\lim_{n \to \infty} (f_n - \psi_n) = 0.$$

Перепишем уравнение (0.1) в виде

$$\hat{a}_{n-1} y_{n-1} + \hat{b}_n y_n + \hat{a}_n y_{n+1} - \lambda y_n = -(a_{n-1} y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1}).$$

Очевидно, что ψ_n и $\bar{\psi}_n$ при $\lambda \notin \{\lambda_j^{\pm}\}_{j=1}^N$ являются линейно независимыми решениями уравнения (0.3). Поэтому, считая правую часть последнего уравнения известной, для отыскания решения f_n этого уравнения можно применить метод вариации произвольных постоянных. В результате придем к уравнению

$$f_n = \psi_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Phi(n, k, \lambda)(a_{k-1} f_{k-1} + b_k f_k + a_k f_{k+1}), \tag{1.9}$$

равносильному уравнению (0.1) с граничным условием $\lim\limits_{n \to \infty} (f_n - \psi_n) = 0$, где

$$\Phi(n, k, \lambda) = \rho(\lambda)(\psi_k \bar{\psi}_n - \psi_n \bar{\psi}_k).$$

Введем теперь в рассмотрение функцию

$$F(n, k, m, l) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Gamma} \rho(\lambda) \Phi(n, k, \lambda) \psi_m \bar{\psi}_l \, d\lambda, \quad k > n. \tag{1.10}$$

При исследовании уравнения (1.9) нам понадобятся некоторые свойства $F(n, k, m, l)$.

Лемма 1.1. *Имеют место равенства*

$$F(n,k,m,l)=0 \quad \text{при } \pm l \geq \pm(m \pm (k-n)).$$

Кроме того, $F(n,k,m,l)$ *равномерно ограничена, т. е.*

$$|F(n,k,m,l)|<C \quad \text{при всех } n,k,m,l.$$

Доказательство. Из определения функции $\Phi(n,k,\lambda)$ и теоремы о вычетах следует, что

$$F(n,k,m,l)=\operatorname*{res}_{\lambda=\infty}\rho^2(\lambda)\psi_k\bar{\psi}_n\psi_m\bar{\psi}_l-\operatorname*{res}_{\lambda=\infty}\rho^2(\lambda)\bar{\psi}_n\psi_k\psi_m\bar{\psi}_l.$$

Пусть $l \leq m-(k-n)$. Предположим, что $k=k_1N+k_2-1$, $n=n_1N+n_2-1$, $m=m_1N+m_2-1$, $l=l_1N+l_2-1$, где числа k_2, n_2, m_2, l_2 меняются от 1 до N. Согласно (1.6)

$$\psi_n=e_{n_2}z^{n_1}, \quad \bar{\psi}_k=\bar{e}_{k_2}z^{-k_1}, \quad \psi_m=e_{m_2}z^{m_1}, \quad \bar{\psi}_l=\bar{e}_{l_2}z^{-l_1}.$$

С другой стороны, с точностью до постоянного множителя

$$e_jz^s \sim \lambda^{-sN}\cdot\lambda^{N-j}, \quad \bar{e}_jz^{-s}\sim\lambda^{sN}\cdot\lambda^{j-N}, \quad \lambda\to\infty,\ j=1,\dots,N.$$

Следовательно, $\psi_n\bar{\psi}_k\psi_m\bar{\psi}_l \sim \lambda^{k-n+l-m}$, $\lambda\to\infty$. Далее, в силу определения функции $\rho(\lambda)$ имеем

$$\rho^2(\lambda)\sim\frac{1}{\lambda^2}, \quad \lambda\to\infty.$$

Учитывая, что $k-n+l-m\leq 0$, из последних двух соотношений заключаем, что

$$\operatorname*{res}_{\lambda=\infty}\rho^2(\lambda)\psi_n\bar{\psi}_k\psi_m\bar{\psi}_l=0.$$

Поскольку условие $k-n+l-m\leq 0$ влечет за собой условие $n-k+l-m\leq 0$, аналогично получим

$$\operatorname*{res}_{\lambda=\infty}\rho^2(\lambda)\psi_k\bar{\psi}_n\psi_m\bar{\psi}_l=0.$$

Таким образом,

$$F(n,k,m,l)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma}\rho^2(\lambda)\{\psi_k\bar{\psi}_n\psi_m\bar{\psi}_l-\psi_n\bar{\psi}_k\psi_m\bar{\psi}_l\}\,d\lambda=0$$

при $l\leq m-(k-n)$. Так как при $\lambda\in\partial\Gamma$ функция $\rho^2(\lambda)$ принимает действительные значения, а ψ_s и $\bar{\psi}_s$ являются комплексно сопряженными, то, переходя в последней формуле к сопряженным выражениям, приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma}\rho^2(\lambda)\{\psi_k\bar{\psi}_n\psi_l\bar{\psi}_m-\psi_n\bar{\psi}_k\psi_l\bar{\psi}_m\}\,d\lambda=0,$$

т. е. $F(n,k,l,m)=0$ при $m\geq l+(k-n)$. Следовательно,

$$F(n,k,m,l)=0 \quad \text{при } l\geq m+(k-n).$$

Теперь докажем ограниченность $F(n,k,m,l)$. Легко проверить, что выражение $F(n,k,m,l)-\widehat{F}(n,k,m,l)$, где

$$\widehat{F}(n,k,m,l)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma}\rho^2(\lambda)e_{k_2}\bar{e}_{n_2}e_{m_2}\bar{e}_{l_2}\left(z^{k_1-n_1+m_1-l_1}-z^{n_1-k_1+m_1-l_1}\right)d\lambda,$$

равномерно ограничено. Для определенности предположим, что $s_1 = k_1 - n_1 + m_1 - l_1$ и $s_2 = n_1 - k_1 + m_1 - l_1$ являются четными числами. Запишем $\widehat{F}(n,k,m,l)$ в виде

$$\widehat{F}(n,k,m,l) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma} \rho^2(\lambda)c(\lambda)(z^{s_1} - z^2)\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma} \rho^2(\lambda)c(\lambda)(z^{s_2} - z^2)\,d\lambda, \quad (1.11)$$

где $c(\lambda) = e_{k_2}\bar{e}_{n_2}e_{m_2}\bar{e}_{l_2}$.

Докажем, что каждое выражение, стоящее в правой части (1.11), равномерно ограничено. Если s_j $(j = 1,2)$ — положительное число, то равномерная ограниченность выражения

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma} \rho^2(\lambda)c(\lambda)(z^{s_j} - z^2)\,d\lambda$$

следует из теоремы о вычетах.

Пусть s_j отрицательно. Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma} \rho^2(\lambda)c(\lambda)(z^{s_j} - z^2)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma} (z^{-1} - z)\rho^2(\lambda)c(\lambda)z^{s_j+1}\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma} \rho^2(\lambda)c(\lambda)(z^{s_j+2} - z^2)\,d\lambda.$$

Интегрируя дважды по частям, находим, что

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma} \rho^2(\lambda)c(\lambda)(z^{-1} - z)z^{s_j+1}\,d\lambda\right| \le \frac{M}{(s_j - 1)^2},$$

где M — постоянная. Из предыдущего равенства следует, что

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma} \rho^2(\lambda)c(\lambda)(z^{s_j} - z^2)\,d\lambda\right| \le M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = M_1.$$

Из этих рассуждений и (1.11) вытекает, что выражение $\widehat{F}(n,k,m,l)$ равномерно ограничено.

В случае, когда s_j $(j = 1,2)$ служат нечетными числами, в (1.11) вместо z^2 следовало бы подставить z.

Так как разность $F(n,k,m,l) - \widehat{F}(n,k,m,l)$ равномерно ограничена, то и $F(n,k,m,l)$ равномерно ограничена.

Лемма доказана.

Из доказанной леммы и формулы (1.8) следует, что имеет место равенство

$$\Phi(n,k,\lambda)\psi_m = \sum_{j=m-(k-n)+1}^{m+(k-n)-1} F(n,k,m,j)\psi_j. \quad (1.12)$$

3. Изучим теперь вопрос о существовании операторов преобразования и найдем виды операторов преобразования. Рассмотрим уравнение (0.1) и введем обозначения

$$\xi(n) = \sum_{k=n}^{\infty}(2|a_k| + |b_k|), \quad \xi_1(m,n) = \sum_{k=m}^{\infty}(2k - 2n + 1)(2|a_k| + |b_k|).$$

Пусть $[x]$ — целая часть x.

Теорема 1.1. *При условиях* (0.2) *уравнение* (0.1) *имеет решение* $f_n = f_n(\lambda)$, *представимое в виде*

$$f_n = \alpha_n \left(\psi_n + \sum_{m=n+1}^{\infty} K(n,m)\psi_m \right), \quad n = 0, \pm 1, \ldots . \tag{1.13}$$

Величины α_n, $K(n,m)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\alpha_n > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1, \quad |K(n,m)| \leq M\xi\left(n + \left[\frac{m}{2}\right]\right)\exp\{\xi(n+1,n)\}), \tag{1.14}$$

где M — *постоянная.*

Доказательство. Достаточно доказать, что f_n, представленное в виде (1.13), удовлетворяет уравнению (1.9). Подставляя в (1.9) вместо f_n его представление в виде (1.13) и учитывая (1.12), получаем, что равенство (1.9) выполняется, если α_n и $A(n,m) = \alpha_n K(n,m)$ удовлетворяют уравнениям

$$\alpha_n = \frac{\hat a_n}{\hat a_n + a_n} + \frac{\hat a_n}{\hat a_n + a_n} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k F(n,k+1,k,n)\alpha_k, \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} A(n,n+1) &= \frac{\hat a_n}{\hat a_n + a_n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \{a_k F(n,k+1,k,n+1) + b_k F(n,k,n,n+1)\}\,\alpha_k \\ &+ \frac{\hat a_n}{\hat a_n + a_n} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k A(k,k+1) F(n,k+1,k+1,n+1) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\alpha) + \varphi(A), \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} A(n,n+2) = \frac{\hat a_n}{\hat a_n + a_n} \Bigg\{ &\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (F(n,k+1,k,n+2)\alpha_k \\ &+ F(n,k,k+1,n+2)\alpha_{k+1}) + \sum_{k=n+2}^{\infty} b_k F(n,k,k,n+2) \\ &+ \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \sum_{j=k+1}^{k+2} A(k,j) F(n,k+1,j,n+2) \Bigg\} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\alpha) + \varphi(A), \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} A(n,m) = \frac{\hat a_n}{\hat a_n + a_n} \Bigg\{ &\sum_{k=[\frac{m+n+1}{2}]}^{\infty} a_k (F(n,k+1,k,m)\alpha_k + F(n,k,k+1,m)\alpha_{k+1}) \\ &+ \sum_{k=1+[\frac{m+n}{2}]}^{\infty} b_k F(n,k,k,m)\alpha_k \Bigg\} \\ + \frac{\hat a_n}{\hat a_n + a_n} \Bigg\{ &\sum_{k=n+1}^{[\frac{m+n-1}{2}]} a_k \Bigg(\sum_{j=m-(k-n)}^{m+(k-n)} A(k,j) F(n,k+1,j,m) \\ &+ \sum_{j=m-(k-n)+1}^{m+(k-n)-1} A(k+1,j) F(n,k,j,m) \Bigg) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=n+1}^{[\frac{m+n}{2}]} b_k \sum_{j=m-(k-n)+1}^{m+(k-n)-1} A(k,j)F(n,k,j,m)\\
&+\sum_{k=[\frac{m+n+1}{2}]}^{\infty} a_k \Bigg(\sum_{j=k+1}^{m+k-n} A(k,j)F(n,k+1,j,m)\\
&\qquad+\sum_{j=k+2}^{m+(k-n)-1} A(k+1,j)F(n,k,j,m)\Bigg)\\
&+\sum_{k=1+[\frac{m+n}{2}]}^{\infty} b_k \sum_{j=k+1}^{m+k-n-1} A(k,j)F(n,k,j,m)\Bigg\} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\alpha)+\varphi(A), \quad m \geq n+3.
\end{aligned} \tag{1.18}
$$

Покажем, что при выполнении условий (0.2) уравнения (1.15)–(1.18) могут быть решены с помощью метода последовательных приближений.

Рассмотрим уравнение (1.15). Ясно, что величина $\frac{\hat{a}_n}{\hat{a}_n+a_n}$ ограничена:

$$\left|\frac{\hat{a}_n}{\hat{a}_n+a_n}\right| \leq M.$$

Кроме того, согласно лемме имеем $|F(n,k,m,l)| \leq C$. Далее, положим

$$\alpha_n^{(0)}=\frac{\hat{a}_n}{\hat{a}_n+a_n}, \quad \alpha_n^{(l)}=\frac{\hat{a}_n}{\hat{a}_n+a_n}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k F(n,k+1,k,n)\alpha_k^{(l-1)}.$$

Заметим, что $\left|\alpha_n^{(0)}\right| \leq M, \quad \alpha_n^{(1)} \leq MC\xi_0(n+1)$, где

$$\xi_0(n)=\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|.$$

Тогда

$$\left|\alpha_n^{(2)}\right| \leq (MC)^2\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|\xi_0(k+1)=(MC)^2\sum_{k=n+1}^{\infty}\{\xi_0(k)-\xi_0(k+1)\}\xi_0(k+1).$$

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty}\{\xi_0(k)-\xi_0(k+1)\}\xi_0(k+1) &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\{\xi_0(k)-\xi_0(k+1)\}\xi_0(k)\\
&=\xi_0^2(n+1)-\sum_{k=n+1}^{\infty}\{\xi_0(k)-\xi_0(k+1)\}\xi_0(k+1).
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\{\xi_0(k)-\xi_0(k+1)\}\xi_0(k+1) \leq \frac{\xi_0^2(n+1)}{2},$$

т. е.

$$\left|\alpha_n^{(2)}\right| \leq \frac{(C_1\xi_0(n+1))^2}{2}, \quad C_1=MC.$$

По индукции доказывается, что

$$\left|\alpha_n^{(l)}\right| \le \frac{(C_1\xi_0(n+1))^l}{l!}.$$

Поэтому ряд $\alpha_n = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \alpha_n^{(l)}$ сходится и удовлетворяет уравнению (1.15), причем

$$|\alpha_n| \le \exp\{C_1\xi_0(n+1)\} \le M.$$

Из этой оценки и (1.15) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$. Таким образом, уравнение (1.15) разрешимо.

Теперь рассмотрим уравнения (1.16)–(1.18). Ищем $A(n,m)$ в виде

$$A(n,m) = \sum_{l=0}^{\infty} A^{(l)}(n,m), \tag{1.19}$$

где $A^{(0)}(n,m) = \varphi(\alpha)$, $A^{(l)}(n,m) = \varphi(A^{(l-1)})$. Из определения $A^{(l)}(n,m)$ следует, что

$$|A^{(0)}(n,m)| \le M_1 C_1 \xi\left(\left[\frac{n+m}{2}\right]\right),$$

$$\begin{aligned}|A^{(1)}(n,m)| \le M_1 C_1^2 \xi\left(\left[\frac{n+m}{2}\right]\right)&\left\{\sum_{k=n+1}^{[\frac{m+n-1}{2}]} 2(2k-2n+1)|a_k|\right.\\
&+\sum_{k=[\frac{m+n+1}{2}]}^{\infty} 2(m-n)|a_k| + \sum_{k=1}^{[\frac{m+n}{2}]}(2k-2n+1)|b_k|\\
&\left.+\sum_{k=1+[\frac{m+n}{2}]}^{\infty}(m-n-1)|b_k|\right\} \le M_1 C_1^2 \xi\left(\left[\frac{n+m}{2}\right]\right)\xi_1(n+1,n).\end{aligned}$$

Предположим, что

$$|A^{(l-1)}(n,m)| \le M_1 \xi\left(\left[\frac{n+m}{2}\right]\right)\frac{C_1^l \xi_1^{l-1}(n+1,n)}{(l-1)!}.$$

Тогда из равенства $A^{(l)}(n,m) = \varphi(A^{(l-1)})$ получим

$$|A^{(l)}(n,m)| \le M_1 \xi\left(\left[\frac{n+m}{2}\right]\right)\frac{C_1^{l-1}}{(l-1)!}\sum_{k=n+1}^{\infty}(2k-2n+1)(2|a_k|+|b_k|)\xi_1^{l-1}(k+1,k). \tag{1.20}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty}&(2k-2n+1)(2|a_k|+|b_k|)\xi_1^{l-1}(k+1,k)\\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty}\{\xi_1(k,n)-\xi_1(k+1,n)\}\xi_1^{l-1}(k+1,k)\\
&\le \sum_{k=n+1}^{\infty}\{\xi_1(k,n)-\xi_1(k+1,n)\}\xi_1^{l-1}(k+1,n). \qquad (1.21)\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\{\xi_1(k,n)-\xi_1(k+1,n)\}\xi_1^{l-1}(k+1,n)$$
$$\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\{\xi_1(k,n)-\xi_1(k+1,n)\}\xi_1^{l-1}(k,n)$$
$$=\xi_1^l(n+1,n)-\sum_{k=n+1}^{\infty}\big\{\xi_1^{l-1}(k,n)-\xi_1^{l-1}(k+1,n)\big\}\xi_1(k+1,n)$$
$$\le\xi_1^l(n+1,n)-(l-1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\{\xi_1(k,n)-\xi_1(k+1,n)\}\xi_1^{l-1}(k+1,n),$$

откуда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\{\xi_1(k,n)-\xi_1(k+1,n)\}\xi_1^{l-1}(k+1,n)\le\frac{\xi_1^l(n+1,n)}{l}. \tag{1.22}$$

Из (1.20)–(1.22) заключаем, что

$$|A^{(l)}(n,m)|\le M_1C_1\xi\left(\left[\frac{n+m}{2}\right]\right)\frac{(C_1\xi_1(n+1,n))^l}{l!}.$$

В силу последней оценки ряд (1.19) сходится, а его сумма $A(n,m)$ является решением уравнений (1.16)–(1.18).

Таким образом, уравнение (1.9) и, следовательно, уравнение (0.1) имеет решение f_n, представленное в виде (1.13). Подставляя в (0.1) вместо f_n его выражение в виде (1.13) и учитывая (1.8), находим, что

$$\alpha_n^{-1}=\prod_{k=n}^{\infty}\frac{\hat a_k+a_k}{\hat a_k}>0.$$

Принимая во внимание, что $K(n,m)=\alpha_n^{-1}A(n,m)$, придем к соотношениям (1.14).

Теорема доказана.

Замечание 1.1. Согласно определению функции $z(\lambda)$ справедливо неравенство $|z(\lambda)|\le 1$ при $\lambda\in\Gamma$. Поэтому в силу (1.6) и (1.14) ряд, стоящий в правой части формулы (1.13), сходится.

Аналогично доказывается

Теорема 1.2. *При условиях* (0.2) *уравнение* (0.1) *имеет решение* $g_n=g_n(\lambda)$, *представимое в виде*

$$g_n=\beta_n\left(\bar\psi_n+\sum_{m=-\infty}^{n-1}\mathscr{L}(n,m)\bar\psi_m\right).$$

Величины β_n *и* $\mathscr{L}(n,m)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\beta_n>0,\quad \lim_{n\to-\infty}\beta_n=1,\quad |\mathscr{L}(n,m)|\le\mathscr{L}\tilde\xi\left(\left[\frac{n+m}{2}\right]\right)\exp\{\tilde\xi_1(n-1,n)\},$$

где

$$\widetilde\xi(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}(2|a_k|+|b_k|),\quad \widetilde\xi_1(n,m)=\sum_{k=-\infty}^{m}(2n-2k+1)(2|a_k|+|b_k|),$$

$\mathscr{L}$ *— постоянная.*

2. Приложение оператора преобразования

Предположим, что в условиях (0.2), в частности, $N = 2$. Беря в уравнении (0.1)

$$\hat{a}_{2n+j} + a_{2n+j} = a_{j+1,n}, \quad \hat{b}_{2n+j} + b_{2n+j} = b_{j+1,n}, \quad y_{2n+j} = y_{j+1,n}, \quad j = 0, 1,$$

придем к системе уравнений

$$\begin{cases} a_{1,n}y_{2,n} + a_{2,n-1}y_{2,n-1} + b_{1,n}y_{1,n} = \lambda y_{1,n}, \\ a_{1,n}y_{1,n} + a_{2,n}y_{1,n+1} + b_{2,n}y_{2,n} = \lambda y_{2,n}, \end{cases} \quad n = 0, \pm, \dots. \tag{2.1}$$

Эта система уравнений является разностным аналогом одномерной системы Дирака. Согласно (0.2)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|(|a_{j,n} - A_j| + |b_{j,n} - B_j|) < \infty, \quad j = 1, 2. \tag{2.2}$$

Рассмотрим формулу (1.13). Введем обозначения

$$\alpha_{2n+j} = \alpha_{j+1}(n), \quad j = 0, 1.$$

$$K_{nm}^{sj} = \begin{cases} K(2n + s - 1, 2(n + m) + j - 1), & 1 \le j \le s, \\ K(2n + s - 1, 2(n + m) + j + 1), & s + 1 \le j \le 2. \end{cases}$$

Из теоремы 1.1 и формулы (1.6) вытекает

Следствие. *При условиях* (2.2) *система уравнений* (2.1) *имеет решение* $(f_{1,n}, f_{2,n})$, *представимое в виде*

$$\begin{aligned} f_{1,n} &= \alpha_1(n)z^n \left\{ e_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(K_{nm}^{11} e_1 z^m + K_{nm}^{12} z^{m-1} \right) \right\}, \\ f_{2,n} &= \alpha_2(n)z^n \left\{ e_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(K_{nm}^{21} e_1 z^m + K_{nm}^{22} z^m \right) \right\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ядра K_{nm}^{sj} *удовлетворяют оценкам*

$$|K_{nm}^{sj}| = O\left(\sum_{k=n+[\frac{m}{2}-1]}^{\infty} \sum_{r=1}^{2} \{|a_{r,k} - A_r| + |b_{r,k} - B_r|\} \right), \quad n + m \to \infty. \tag{2.4}$$

Воспользовавшись этим следствием, легко проверить, что коэффициенты $a_{j,n}, b_{j,n}$ системы (2.1) и ядра K_{nm}^{sj} связаны равенствами

$$b_{1,n} - B_1 = A_1 K_{n1}^{12} - A_2 K_{n-1,1}^{21}, \quad b_{2,n} - B_2 = A_2 K_{n1}^{21} - A_1 K_{n1}^{12}, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{1,n}^2}{A_1} &= A_1 + A_2 \left(K_{n1}^{11} - K_{n-1,1}^{22} \right) + (B_2 - b_{1,n}) K_{n1}^{12}, \\ \frac{a_{2,n}^2}{A_2} &= A_2 + A_1 \left(K_{n1}^{22} - K_{n1}^{11} \right) + (B_1 - b_{2,n}) K_{n1}^{21}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Теперь рассмотрим задачу (0.4), (0.5). Полагая $a_{2n+j} = a_{j+1,n}$, $b_{2n+j} = b_{j+1,n}$, $j = 0, 1$, приведем ее к виду

$$\begin{aligned} \dot{a}_{1,n} &= a_{1,n}(b_{2,n} - b_{1,n}), \quad \dot{a}_{2,n} = a_{2,n}(b_{1,n+1} - b_{2,n}), \\ \dot{b}_{1,n} &= 2\left(a_{2,n-1}^2 - a_{1,n}^2\right), \quad \dot{b}_{2,n} = 2\left(a_{1,n}^2 - a_{2,n}^2\right), \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$a_{j,n}(0) \to A_j > 0, \quad b_{j,n} \to B_j > 0, \quad j = 1, 2, \quad n \to \infty. \tag{2.8}$$

В силу (0.6) быстро убывающее решение задачи (2.7), (2.8) удовлетворяет условиям

$$\sup_{0<t<T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|(|a_{j,n} - A_j| + |b_{j,n} - B_j|) < \infty, \quad j = 1, 2. \tag{2.9}$$

Теорема 2.1. *При нарушении одного из условий* $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ *задача* (0.4), (0.5) *не имеет быстро убывающего решения.*

Доказательство. Для определенности будем предполагать, что $A_1 \neq A_2$. Допустим противное. Тогда задача (2.7), (2.8) имеет быстро убывающее решение.

Рассмотрим систему уравнений (2.1), где коэффициенты $a_{j,n}, b_{j,n}$ зависят от t и образуют быстро убывающее решение задачи (2.7), (2.8). В силу (2.9) справедливы равенства (2.5). Используя (2.4), из (2.5) находим, что

$$K_{n1}^{21} = \frac{1}{A_2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \{(B_1 - b_{1,k}) + (B_2 - b_{2,k})\}.$$

Из последних двух уравнений системы (2.7), условий (2.9) и последнего равенства следует, что K_{n1}^{21} дифференцируемо по t и $\dot{K}_{n1}^{21} \to 0$ при $n \to \infty$. Аналогично получаем, что ядро K_{n1}^{12} дифференцируемо по t и $\dot{K}_{n1}^{12} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда из первого равенства (2.5) заключаем, что $\dot{b}_{1,n} \to 0$ при $n \to \infty$. С другой стороны, согласно (2.7)

$$\dot{b}_{1,n} \to 2\big(A_2^2 - A_1^2\big) \neq 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Полученное противоречие показывает, что быстро убывающее решение отсутствует.

Случай $B_1 \neq B_2$ исследуется аналогичными рассуждениями и использованием формулы (2.6).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лянце В. Э.* Несамосопряженный разностный оператор // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 6. С. 1260–1263.
2. *Case K. M., Kac M.* A discrete version of the inverse scattering problem // J. Math. Phys. 1973. V. 14, N 5. P. 594–603.
3. *Гусейнов И. М., Ханмамедов А. Х.* Асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для цепочки Тоды с начальными данными типа ступеньки // Теорет. и мат. физика. 1999. Т. 119, № 3. С. 429–440.
4. *Манаков С. В.* О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1974. Т. 67, № 2. С. 543–555.
5. *Тода М.* Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.
6. *Фирсова Н. Е.* О решении задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриза с начальными данными, являющимися суммой периодической и быстро убывающей функций // Мат. сб. 1988. Т. 135, № 2. С. 261–268.
7. *Flaschka H.* On the Toda lattice. Inverse transform solution // Prag. Theor. Phys. 1974. V. 51, N 3. P. 703–716.
8. *Ханмамедов Аг. Х.* К спектральной теории разностного уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами // Вестн. БГУ. 2001. Т. 1. С. 124–130.
9. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.

Статья поступила 6 августа 2002 г.

Ханмамедов Агил Ханмамед оглы
Бакинский гос. университет, факультет прикладной математики и кибернетики, ул. З. Халилова, 23, Баку 370148, Азербайджан
agil-khanmamedov@yahoo.com