*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2003. Том 44, № 4*

*УДК 517.574*

# КРИТЕРИИ (СУБ–)ГАРМОНИЧНОСТИ И ПРОДОЛЖЕНИЕ (СУБ–)ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**Б. Н. Хабибуллин**

**Аннотация:** Получены критерии гармоничности и субгармоничности функции в области из $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, в терминах специальных мер Аренса — Зингера и Йенсена. Также установлен критерий (суб-)гармоничности $\delta$-субгармонической функции в терминах ассоциированного заряда Рисса и специальных функций Аренса — Зингера и Йенсена. При этом используется полученная в работе теорема о продолжении (суб-)гармонических функций на полярные множества.

**Ключевые слова:** гармоническая функция, субгармоническая функция, мера Йенсена, мера Аренса — Зингера

## Введение и основные результаты

Всюду ниже $\Omega$ — область в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$; $|x|$ — евклидова норма точки $x \in \mathbb{R}^d$; $m$ — лебегова мера на $\mathbb{R}^d$; $(\mathbb{R}^d)^* = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация Александрова для $\mathbb{R}^d$.

Через $H(\Omega)$ (соответственно $SH(\Omega)$) обозначаем семейство всех гармонических (соответственно субгармонических локально интегрируемых по $m$) функций на $\Omega$. В частности, функции из $SH(\Omega)$ не могут быть тождественно равны $-\infty$.

Положительность или неотрицательность (соответственно отрицательность или неположительность) всюду понимается как $\geq 0$ (соответственно $\leq 0$).

Пусть $T$ — подмножество в $\Omega$. Через $\mathscr{M}(T)$ (соответственно $\mathscr{M}^+(T)$ или $\mathscr{M}_1^+(T)$) обозначаем класс всех вещественнозначных (соответственно положительных или вероятностных) борелевских мер $\mu$ с компактным в $\mathbb{R}^d$ носителем $\operatorname{supp}\mu \subset T$.

Определение 1 (ср. [1–8]). Меру $\mu \in \mathscr{M}^+(\Omega)$ называем *мерой Йенсена* (соответственно *мерой Аренса — Зингера*) для точки $x \in \Omega$ на $\Omega$, если

$$u(x) \leq \int u\, d\mu \quad \text{для всех } u \in SH(\Omega),$$

соответственно

$$u(x) = \int u\, d\mu \quad \text{для всех } u \in H(\Omega).$$

Работа выполнена при поддержке гранта NSERC–46443–96 ( McGill University, Montreal) и частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00–01–00770).

Класс всех мер Йенсена (соответственно мер Аренса — Зингера) для точки $x \in \Omega$ на $\Omega$ обозначаем через $J_x(\Omega)$ (соответственно $AS_x(\Omega)$). При этом полагаем

$$J_x(\Omega;T) \overset{\text{def}}{=} J_x(\Omega) \cap \mathscr{M}(T), \quad AS_x(\Omega;T) \overset{\text{def}}{=} AS_x(\Omega) \cap \mathscr{M}(T), \quad T \subset \Omega.$$

Очевидны строгие включения $J_x(\Omega) \subset AS_x(\Omega) \subset \mathscr{M}_1^+(\Omega)$.

Тривиальные примеры введенных мер: мера Дирака $\delta_x$, т. е. единичная масса, сосредоточенная в точке $x$; вероятностная мера $s_x^t$, сосредоточенная на сфере достаточно малого радиуса $t$ с центром в точке $x$ и инвариантная относительно вращений с центром в точке $p$, т. е. мера, действующая как усреднение по этой сфере; вероятностная мера $m_x^t$, сосредоточенная на открытом шаре $B(x,t)$ достаточно малого радиуса $t > 0$ с центром в точке $x$ и инвариантная относительно вращений с центром в точке $x$, т. е. мера, действующая как усреднение по этому шару; гармоническая мера $\omega(\cdot,x)$ для относительно компактной области $\omega$ в $\Omega$ в точке $x \in \Omega$. Менее очевидные примеры мер из определения 1 (иногда неявно или косвенно определенных) можно найти в [2–7, 9–11].

Первоначально эти специальные меры возникли в связи с потребностями теории равномерных алгебр и теории аппроксимации на компактах (см., в частности, [1–3]), а позже нашли применение и в различных вопросах теории функций, определенных в фиксированной области (см., в частности, [4–11]).

**Первый критерий (суб-)гармоничности.** *Функция $u$ принадлежит $SH(\Omega)$ (соответственно $H(\Omega)$) тогда и только тогда, когда она полунепрерывна сверху (соответственно непрерывна) в $\Omega$ и для каждой точки $x \in \Omega$ и каждого шара $B(x,1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, найдется мера Йенсена (соответственно Аренса — Зингера) $\mu_x^n \neq \delta_x$ для $x$ на $\Omega$ такая, что $\operatorname{supp}\mu_x^n \subset B(x,1/n)$ и*

$$u(x) \leq \int u\, d\mu_x^n \quad (\textit{соответственно } u(x) = \int u\, d\mu_x^n). \tag{0.1}$$

Конечно, известны и гораздо более тонкие условия гармоничности, если меры $\mu_x^n$ имеют специальный вид. В частности, их может быть всего две или даже одна для каждой точки $x$, но одного и того же вида (см. обзор [12] и особенно серию совместных работ В. Хансена и Н. Надирашвили [9] и др. по проблеме Литтлвуда). В нашем же критерии все меры $\mu_x^n$, вообще говоря, различные и произвольные в $J_x(\Omega)$ (соответственно $AS_x(\Omega)$) для каждого $x \in \Omega$.

Определение 2 (ср. [2, 4, 6, 7]). Функцию $V : (\mathbb{R}^d)^* \setminus \{x\} \to [-\infty, +\infty)$ называем *функцией Аренса — Зингера для точки* $x \in \Omega$ на $\Omega$, если выполнены следующие три условия:

(1) существует компакт $K$ в $\Omega$ такой, что $x \in K$ и $V \equiv 0$ вне компакта $K$;

(2) функция $V$ субгармоническая в $(\mathbb{R}^d)^* \setminus \{x\}$;

(3) выполнено соотношение

$$V(y) \leq -\log|y-x| + O(1), \quad y \to 0, \quad y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x\}, \tag{0.2}$$

$$V(y) \leq |y-x|^{2-d}, \quad y \in \mathbb{R}^d \setminus \{x\}, \quad d > 2. \tag{0.3}$$

Если функция Аренса — Зингера для точки $x \in \Omega$ на $\Omega$ неотрицательна всюду на $(\mathbb{R}^d)^* \setminus \{x\}$ , то называем ее *функцией Йенсена* для точки $x \in \Omega$ на $\Omega$.

Класс всех функций Йенсена (соответственно Аренса — Зингера) для точки $x \in \Omega$ на $\Omega$ обозначаем через $PJ_x(\Omega)$ (соответственно $PAS_x(\Omega)$). Через

$PJ_x(\Omega;T)$ (соответственно $PAS_x(\Omega;T)$), где $T\subset\Omega$, обозначаем классы функций Йенсена (соответственно Аренса — Зингера) для точки $x\in\Omega$ на $\Omega$, тождественно равные нулю вне $T$.

Эти классы функций первоначально появились, по-видимому, в книге Т. Гамелина [2, теоремы 3.2, 3.3] как потенциалы мер Йенсена и Аренса — Зингера (при $d=2$ и в несколько иной форме) в связи с потребностями теории равномерных алгебр, а позже нашли применения в случае $\Omega=\mathbb{C}$ при исследовании различных вопросов теории целых и мероморфных функций [4, 6, 13, 14], а также голоморфных функций в односвязных областях из $\mathbb{C}^n$ [7]. Фактически функции Йенсена или, более общо, Аренса — Зингера есть не что иное, как обобщение продолженных функций Грина для относительно компактных в $\Omega$ областей $D$ с полюсом в точке $x$. Нетрадиционные примеры функций Йенсена, отличных от функций Грина, можно найти, например, в [6, 7].

Следуя [15], $\delta$-субгармоническую функцию $u$ на открытом подмножестве $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$, определяем как разность $u=u_1-u_2$ каких-либо двух субгармонических в $\Omega$ функций $u_1$ и $u_2$. Каждая $\delta$-субгармоническая функция однозначно определена и принимает значения из $[-\infty,+\infty]$ на $\Omega$ вне некоторого полярного множества. Каждой $\delta$-субгармонической функции $u$ однозначно сопоставляется вещественнозначная борелевская мера $\nu_u=\frac{1}{c_d}\cdot\Delta u$, где оператор Лапласа $\Delta$ действует в смысле теории обобщенных функций, $c_d=2\max\{1,d-2\}\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$. Эту меру $\nu_u$ называют (ассоциированным) распределением зарядов Рисса функции $u$.

Следующая теорема дает критерий (суб-)гармоничности $\delta$-субгармонической функции в терминах распределения зарядов Рисса этой функции.

**Второй критерий (суб-)гармоничности.** *Пусть $u$ — $\delta$-субгармоническая функция на открытом подмножестве $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$, с распределением зарядов Рисса $\nu_u$. Функция $u$ продолжается как субгармоническая (соответственно гармоническая) на все $\Omega$ тогда и только тогда, когда для какого-либо полярного множества $E$, вне которого значения функции $u$ определены, выполнены следующие условия:*

(1) *функция $u$ локально ограничена сверху (соответственно локально ограничена) в $\Omega\setminus E$;*

(2) *функция $u$ полунепрерывна сверху в $\Omega\setminus E$;*

(3) *для каждой точки $x\in\Omega\setminus E$ и каждого шара $B(x,1/n)$, $n\in\mathbb{N}$, найдется функция Йенсена $V_x^n$ для точки $x$ на $\Omega$ такая, что $V_x^n\not\equiv 0$ в $\mathbb{R}^d\setminus\{x\}$, $V_x^n\equiv 0$ вне шара $B(x,1/n)$ и выполнено соотношение*

$$\int\limits_{B(x,1/n)\setminus\{x\}} V_x^n\,d\nu_u \geq (\textit{соответственно } =)\ 0,\quad x\in\Omega\setminus E. \tag{0.4}$$

*Это продолжение, если оно существует, единственно.*

Доказательство этого критерия использует теорему о продолжении (суб-)гармонических функций на полярные множества из § 3, обобщающую или дополняющую известные результаты подобного типа (см. [16, теорема 5.18; 17, 1.V.5; 18]) и в определенном направлении уточняющую первый критерий (суб-)гармоничности.

Если во втором критерии «пробные» функции Йенсена $V_x^n$ являются сдвигами одних и тех же функций Йенсена $V^n$, то этот критерий можно рассматривать как критерий положительности заряда.

**Критерий положительности заряда.** *Пусть $\nu$ — заряд, т. е. вещественнозначная борелевская мера, на области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Заряд $\nu$ — положительная мера тогда и только тогда, когда при каждом $n$ найдется функция Йенсена $V^n$ для нуля на шаре $B(0, 1/n)$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что $V^n \not\equiv 0$ на $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ и для почти всех по мере $m$ точек $x \in \Omega$ выполнено*

$$\int V^n(x+y)\,d\nu(y) \geq 0 \quad \text{п. в. по } m, \quad n \geq n(x). \tag{0.5}$$

В первых двух параграфах статьи устанавливаются вспомогательные свойства мер и функций Йенсена и Аренса — Зингера в несколько большей общности, чем необходимо для наших целей. В последнем § 3 доказываются сформулированные выше критерии.

Часть результатов настоящей статьи анонсирована в [19, 20]. Для односвязных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ некоторые утверждения из § 1, 2 установлены и применялись в [6, 7]. Отметим, не останавливаясь здесь на этом подробно, что результаты из § 1, 2 позволяют распространить часть утверждений из [6, 8] на многосвязные области.

Автор выражает глубокую признательность П. Кусису за поддержку, внимание к работе и плодотворные обсуждения, П. Готье и К. Говрисанкарану за полезные консультации, Т. Рансфорду за стимулирующие контакты, Ю. Н. Гололобову за техническое содействие.

## § 1. Двойственность между мерами и функциями Йенсена и Аренса — Зингера

Покажем, что между классами мер Йенсена (соответственно Аренса — Зингера) и классами функций Йенсена (соответственно Аренса — Зингера) существует естественная биекция, соответствующая известной взаимосвязи между гармоническими мерами и функциями Грина.

Замыкание множества $B$ (в соответствующем пространстве) обозначаем через $\overline{B}$. Подмножество $B \subset \Omega$ называется $\Omega$-*ограниченным*, если $\overline{B}$ в $\Omega$ есть компактное подмножество области $\Omega$.

Пусть $F$ — замкнутое подмножество в $\Omega$. *«Дырой»* (hole) в $F$ относительно $\Omega$ будем называть, следуя, например, [21, 22], всякую $\Omega$-ограниченную связную компоненту в $\Omega \setminus F$. В частности, когда в качестве множества $F$ рассматривается компакт $K$ в $\Omega$, то дыра в $K$ (относительно $\Omega$) — это всякая ограниченная в $\mathbb{R}^d$ связная компонента дополнения $\mathbb{R}^d \setminus K$, которая целиком содержится в $\Omega$. Через $\widehat{F}(\Omega)$ обозначаем объединение замкнутого множества $F \subset \Omega$ со всеми дырами в $F$ относительно $\Omega$. Это обозначение часто используется в вопросах гармонической аппроксимации на замкнутых подмножествах в $\Omega$ (см. [21, 22]). Легко показать, что если $K$ — компакт в $\Omega$, то множество $\widehat{K}(\Omega)$ также компакт в $\Omega$ и его дополнение $\mathbb{R}^d \setminus \widehat{K}(\Omega)$ состоит из конечного числа компонент связности [21; 6.3]. Подмножество $F$ называем $\Omega$-*допустимым*, если в дополнении $\Omega \setminus F$ нет дыр. $\Omega$-допустимость подмножества $F$ полностью характеризуется равенством $F = \widehat{F}(\Omega)$. Очевидно, подмножество $F = \Omega$ является $\Omega$-допустимым.

Через $\Omega^* = \Omega \cup \{*\}$ обозначаем одноточечную компактификацию Александрова открытого множества $\Omega$ (для $\mathbb{R}^d$ добавляемую при его одноточечной компактификации идеальную точку $*$ обозначаем как $\infty$). Хотя для компакта $K \subset \Omega$ множество $\mathbb{R}^d \setminus \widehat{K}(\Omega)$, вообще говоря, несвязно, множество $\Omega^* \setminus \widehat{K}(\Omega)$ уже является связным в $(\mathbb{R}^d)^*$ [21; 23, гл. IV, § 1C, лемма].

В контексте рассматриваемых в § 1, 2 вопросов, как правило, неважно, какая точка $x \in \Omega$ в определениях 1, 2 рассматривается. Поэтому в § 1, 2, не умаляя общности, предполагаем, что начало координат $0 \in \Omega$ и $x = 0$. При $x = 0 \in \Omega$ в обозначениях классов мер и функций Йенсена или Аренса — Зингера для нуля на $\Omega$ индекс 0 чаще всего будем опускать и будем говорить просто о мерах и функциях Йенсена (соответственно Аренса — Зингера).

**Предложение 1.1.** *Если $\mu$ — мера Йенсена или Аренса — Зингера для* 0 *на области $\Omega$, то мера $\mu$ соответственно такая же на любой области $\omega$, содержащей компакт $\widehat{K}_\mu(\Omega)$, где*

$$K_\mu = \{0\} \cup \operatorname{supp} \mu \subset \Omega. \tag{1.1}$$

Доказательство. Ввиду связности $\Omega^* \setminus \widehat{K}_\mu(\Omega)$ и компактности $\widehat{K}_\mu(\Omega)$ в $\Omega$ по теоремам о продолжении субгармонических функций (см., например, [21, теорема 6.1; 24, теорема 1] или [22, теорема 16]) для каждой субгармонической в $\Omega$ функции найдется субгармоническая в $\omega$ функция $v$ такая, что $v = u$ на $\widehat{K}_\mu(\Omega)$. Отсюда $u(0) = v(0) \leq \int v\, d\mu = \int u\, d\mu$ для меры $\mu \in J(\Omega)$, т. е. $\mu \in J(\omega)$. Если $u$ гармоническая в $\omega$, то в силу связности множества $\Omega^* \setminus \widehat{K}_\mu(\Omega)$ и компактности $\widehat{K}_\mu(\Omega)$ в $\Omega$ существует последовательность $\{u_n\}$ гармонических функций в $\Omega$ [21, теорема 1.7], которая сходится к $u$ равномерно на компакте $\widehat{K}_\mu(\Omega)$. Отсюда для меры $\mu \in AS(\Omega)$ имеем

$$u(0) = \lim_{n\to\infty} u_n(0) = \lim_{n\to\infty} \int u_n\, d\mu = \int u\, d\mu,$$

т. е. $\mu \in AS(\omega)$.

Определение 3. Пусть $\mu \in \mathscr{M}_1^+(\mathbb{R}^d)$. Функцию

$$V_\mu(y) \overset{\text{def}}{=} \int h(y-x)\, d\mu(x) - h(y), \quad y \neq 0, \quad V_\mu(\infty) \overset{\text{def}}{=} 0,$$

где

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \log|x| & \text{при } d = 2, \\ -|x|^{2-d} & \text{при } d > 2, \end{cases}$$

будем называть $V_\mu$-*потенциалом меры* $\mu$.

По построению $V_\mu$-потенциал меры $\mu \in \mathscr{M}_1^+(\mathbb{R}^d)$ всегда субгармоническая функция в $(\mathbb{R}^d)^* \setminus \{0\}$, гармоническая вне компакта $K_\mu = \operatorname{supp} \mu \cup \{0\}$, в частности, в окрестности точки $\infty$ (см., например, [25, приложение, пп. 24, 26]), и выполнены соотношения (0.2) или (0.3) при $x = 0$ с заменой $V$ на $V_\mu$ (см. [2, 6, 7]). Распределением масс Рисса субгармонической функции $V_\mu$ в $(\mathbb{R}^d)^* \setminus \{0\}$ служит сужение меры $\mu$ на $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, т. е. мера

$$\mu_\infty \overset{\text{def}}{=} \mu - \mu(\{0\})\delta_0. \tag{1.2}$$

**Предложение 1.2** (обобщенная формула Пуассона — Йенсена)**.** *Пусть $\mu$ — мера Аренса — Зингера для нуля на $\Omega$ и компакт $K_\mu$ определен, как в* (1.1). *Тогда для любой субгармонической в открытой окрестности компакта $\widehat{K}_\mu(\Omega) \subset \Omega$ функции $u_\nu$, $u_\nu(0) \neq -\infty$, с распределением масс Рисса $\nu$ имеет место представление*

$$u_\nu(0) = \int u_\nu\, d\mu - \int V_\mu\, d\nu_u. \tag{1.3}$$

Доказательство. По предложению 1.1 $\mu$ — мера Аренса — Зингера для нуля на любой области $\omega \subset \Omega$, содержащей компакт $\widehat{K}_\mu(\Omega)$, замыкание которой — компактное подмножество в $\Omega$.

Из условия $u_\nu(0) \neq -\infty$ и классической формулы Пуассона — Йенсена [16; теорема 3.14], примененной в шаре из $\Omega$ достаточно малого радиуса с центром в нуле, следует, что конечен интеграл

$$\int\limits_{\overline{\omega}} h(y)\, d\nu_u(y). \tag{1.4}$$

Уменьшая при необходимости область $\omega$, можем считать, что граница $\partial\omega$ — гладкая поверхность (см. доказательство в [21, лемма 1.8]). В силу конечности интеграла (1.4) представление Рисса для функции $u_\nu$, субгармонической в некоторой окрестности замыкания $\overline{\omega}$, можем записать в виде

$$u_\nu(x) = \int\limits_{\overline{\omega}} (h(x-y) - h(y))\, d\nu_u(y) + H(x), \quad x \in \omega, \tag{1.5}$$

где $H$ — гармоническая в $\omega$ функция и $H(0) = u_\nu(0)$. Из последнего равенства для меры Аренса — Зингера $\mu$ для нуля на $\omega$ имеем

$$\int\limits_{\omega} H\, d\mu = H(0) = u_\nu(0). \tag{1.6}$$

Кроме того, по теореме Фубини о повторных интегралах [21, теорема 3.5] (она применима в силу конечности интеграла (1.4)) получаем

$$\int\limits_{\omega} \int\limits_{\overline{\omega}} (h(x-y) - h(y))\, d\nu_u(y)\, d\mu(x) = \int V_\mu\, d\nu_u.$$

Интегрируя (1.5) по мере $\mu$, из последнего равенства и из (1.6) получаем (1.3).

**Предложение 1.3** (ср. [2, 6, 7]). *Если $\mu$ — мера Йенсена или, более общо, мера Аренса — Зингера для $0$ на области $\Omega$, то $V_\mu \equiv 0$ на $\mathbb{R}^d \setminus \widehat{K}_\mu(\Omega)$, где компакт $K_\mu$ из* (1.1). *Если $\mu$ — мера Йенсена, то $V_\mu \geq 0$ всюду в $(\mathbb{R}^d)^* \setminus \{0\}$.*

Доказательство. Свойство неотрицательности $V_\mu$ для меры Йенсена сразу следует из субгармоничности функции $h(y-x)$ по $x$ в $\mathbb{R}^d$ и соотношений

$$V_\mu(y) = \int h(y-x)\, d\mu(x) - h(y) \geq h(y) - h(y) = 0.$$

Если $\mu \in AS(\Omega)$ и $y \in \mathbb{R}^d \setminus \widehat{K}_\mu(\Omega)$, то по предложению 1.1 для области $\omega \subset \Omega$, включающей в себя компакт $\widehat{K}_\mu(\Omega)$, $y \notin \omega$, мера $\mu$ принадлежит $AS(\omega)$. Из гармоничности функции $h(y-x)$ по $x$ в $\omega$ получаем

$$V_\mu(y) = \int h(y-x)\, d\mu(x) - h(y) = h(y) - h(y) = 0$$

для всех $y \notin \omega$. Так как $\omega \supset \widehat{K}_\mu(\Omega)$ произвольное, предложение доказано.

Далее рассматриваем отображение $\mathscr{P}$, строящееся по правилу

$$\mathscr{P}(\mu) = V_\mu, \quad \mu \in \mathscr{M}_1^+(\mathbb{R}^d). \tag{1.7}$$

Очевидно, отображение $\mathscr{P}$ аффинное на классе мер Йенсена или Аренса — Зингера в том смысле, что

$$t\mathscr{P}(\mu) + (1-t)\mathscr{P}(\nu) = \mathscr{P}(t\mu + (1-t)\nu), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

**Предложение 1.4.** *Пусть $T$ — замкнутое подмножество области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $0 \in T$, и $V$ — функция Аренса — Зингера или Йенсена для нуля на $\Omega$, тождественно равная нулю вне $T$. Тогда найдется единственная мера $\mu$ такая, что*

(1) $\operatorname{supp}\mu \subset T$ *и* $\mu \in \mathscr{M}_1^+(\Omega)$;

(2) $V = V_\mu = \mathscr{P}(\mu)$;

(3) *функция $V$ тождественно равна нулю вне компакта $\widehat{K}_\mu(\Omega)$;*

(4) *обратное к $\mathscr{P}$ отображение $\mathscr{P}^{-1}$ определяется по правилу*

$$\mathscr{P}^{-1}(V) = \frac{1}{c_d} \cdot \Delta V + \left(1 - \limsup_{y \to 0} \frac{V(y)}{-h(y)}\right) \cdot \delta_0. \tag{1.8}$$

Доказательство. Инъективность $\mathscr{P}$ тривиальна [26, теоремы 1.12, 1.12′].

Укажем теперь построение меры $\mu$. Исключительно для ссылок на известные факты из теории субгармонических функций на плоскости и в пространстве нам удобно перейти к преобразованию Кельвина функции $V$. Полагаем

$$V^\star(y^\star) \overset{\text{def}}{=} |y|^{d-2} V(y), \quad y^\star \overset{\text{def}}{=} y/|y|^2 \in \mathbb{R}^d.$$

Преобразование Кельвина сохраняет субгармоничность. Следовательно, по определению 2 функция $V^\star$, субгармоническая в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяет оценкам

$$V^\star(\zeta) \le \log|\zeta| + O(1), \quad \zeta \to \infty, \ \zeta \in \mathbb{C}, \tag{1.9}$$

$$V^\star(y) \le 1, \quad y \in \mathbb{R}^d, \ d > 2, \tag{1.10}$$

и тождественно равна нулю вне множества

$$T^\star \overset{\text{def}}{=} \{y/|y|^2 : y \in T\} \subset (\mathbb{R}^d)^*, \tag{1.11}$$

а также вне некоторого компактного подмножества из области $\Omega^\star \subset (\mathbb{R}^d)^*$, не включающего определенную открытую окрестность нуля. В частности,

$$V^\star(0) = 0. \tag{1.12}$$

Пусть $\mu^\star_\infty$ — распределение масс Рисса субгармонической функции $V^\star$ в $\mathbb{R}^d$. Тогда при $d = 2$ имеет место представление Адамара для субгармонической на плоскости функции [16, теорема 4.2]

$$V^\star(\zeta) = \int \log\left|1 - \frac{\zeta}{z}\right| d\mu^\star_\infty(z) + C, \quad \zeta, z \in \mathbb{C}, \tag{1.13}$$

где $C = 0$ ввиду (1.12). При этом согласно (1.9) и [27, теорема 6.32] имеем

$$\mu^\star_\infty(\mathbb{C}) \le 1. \tag{1.14}$$

При $d > 2$ для ограниченной ввиду (1.10) субгармонической в пространстве $\mathbb{R}^d$ функции $V^\star$ получим [16, теорема 3.20]

$$V^\star(y) = C - \int |x - y|^{2-d} \, d\mu^\star_\infty(x), \quad d > 2, \tag{1.15}$$

где постоянная $C$ — точная верхняя грань в $\mathbb{R}^d$ этой функции. Вследствие (1.12)

$$C = \int |x|^{2-d} \, d\mu^\star_\infty(x) \le 1, \quad d > 2. \tag{1.16}$$

Мера $\mu^\star_\infty$ по ее определению сосредоточена на пересечении множества $T^\star \setminus \{\infty\}$ и некоторого компактного подмножества из открытого множества $\Omega^\star$, так как функция $V^\star$ тождественно равна нулю вне некоторого компактного подмножества из открытого множества $\Omega^\star \subset (\mathbb{R}^d)^*$, не включающего определенную открытую окрестность нуля.

Применение преобразования Кельвина к функции $V^\star$ дает снова первоначальную субгармоническую в $(\mathbb{R}^d)^* \setminus \{0\}$ функцию $V$ с распределением масс Рисса $\mu_\infty \in \mathscr{M}^+_1(\Omega)$, сосредоточенным на $T \setminus \{0\}$ и определенным через борелевские множества $B \subset (\mathbb{R}^d)^* \setminus \{0\}$ по правилу [26, гл. IV, § 5]

$$\int\limits_B |x|^{2-d}\, d\mu^\star_\infty(x) = \int\limits_{B^\star} d\mu_\infty(x), \tag{1.17}$$

где $B^\star$ определено, как в (1.11).

Ввиду (1.13), где $C = 0$, и в силу (1.15) и (1.16) получим представление

$$V(y) = \int h(y-x)\, d\mu_\infty(x) - \mu_\infty(\mathbb{R}^d)h(y), \quad y \neq 0, \quad V(\infty) = 0, \tag{1.18}$$

причем вследствие (1.17), (1.12) и (1.14) выполнено $\mu_\infty((\mathbb{R}^d)^* \setminus \{0\}) \le 1$. С помощью последнего соотношения и очевидного тождества

$$0 = \int h(y-x)\, d\delta_0(x) - h(y), \quad y \neq 0,$$

для меры

$$\mu \overset{\text{def}}{=} \mu_\infty + (1 - \mu_\infty(\mathbb{R}^d))\delta_0 \in \mathscr{M}^+_1(T) \cap \mathscr{M}^+_1(\Omega) \tag{1.19}$$

из (1.18) по (1.7) получаем $V = V_\mu = \mathscr{P}(\mu)$ и (1.2). Таким образом, для меры $\mu$ установлены свойства (1) и (2) предложения 1.4.

По определению компакта $\widehat{K}_\mu(\Omega)$ в каждой связной компоненте дополнения $\mathbb{R}^d \setminus \widehat{K}_\mu(\Omega)$ есть точки множества из $(\mathbb{R}^d)^* \setminus \Omega$, где функция Аренса — Зингера или Йенсена $V$ обращается в нуль. По определению этих функций в каждой такой связной компоненте есть открытая окрестность, где функция $V$ обращается в нуль. Так как функция $V$ гармоническая вне $K_\mu$, по известной теореме единственности для гармонических в области функций $V$ — тождественный нуль вне $\widehat{K}(\Omega)$, т. е. установлено (3).

Используя представления (1.13) и (1.15) (см. [27, теорема 6.32; 16, 3.10.1]), можно получить, что

$$\mu^\star_\infty(\mathbb{C}) = \limsup_{\zeta\to\infty} \frac{V^\star(\zeta)}{\log|\zeta|} \quad \text{при } d = 2,$$

$$\int |x|^{2-d}\, d\mu^\star_\infty(x) = \limsup_{y\to\infty} V^\star(y) = \sup_{y\in\mathbb{R}^d} V^\star(y) \quad \text{при } d > 2.$$

Отсюда по определению преобразования Кельвина согласно (1.17) имеем

$$\mu_\infty(\mathbb{R}^d) = \limsup_{y\to 0} \frac{V(y)}{-h(y)}.$$

Следовательно, в силу определения распределения масс Рисса через оператор Лапласа по построению (1.19) меры $\mu$ обратное к $\mathscr{P}$ отображение $\mathscr{P}^{-1}$ определяется по правилу (1.8).

**Теорема двойственности.** *Пусть $T$ — замкнутое $\Omega$-допустимое подмножество открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $0 \in T$. Тогда отображение $\mathscr{P}$, определенное в* (1.7), *задает аффинную биекцию $J(\Omega;T)$ на $PJ(\Omega;T)$ и $AS(\Omega;T)$ на $PAS(\Omega;T)$. При этом $\mathscr{P}^{-1}$ определяется по правилу* (1.8).

Доказательство. Из $\Omega$-допустимости $T$, предложения 1.3 и очевидного выполнения по определению 3 соотношения (0.2), (0.3) для $x = 0$ и $V = V_\mu$ следуют включения $\mathscr{P}(AS(\Omega;T)) \subset PAS(\Omega;T)$ и $\mathscr{P}(J(\Omega;T)) \subset PJ(\Omega;T)$. Инъективность отображения $\mathscr{P}$ отмечена в предыдущем предложении.

Меру $\mu = \mathscr{P}^{-1}(V)$ выбираем, как в предложении 1.4. Для доказательства сюръективности отображения $\mathscr{P} : AS(\Omega;T) \to PAS(\Omega;T)$ можно воспользоваться следующей леммой.

**Лемма 1.1** [21, лемма 1.8]. *Пусть $F$ — компактное подмножество в $\mathbb{R}^d$, функция $u$ гармоническая в окрестности $F$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся точки $y_1, y_2, \dots, y_m$ в $\mathbb{R}^d \setminus F$ и постоянные $a_1, a_2, \dots, a_m$ такие, что*

$$\left| u(x) - \sum_{k=1}^{m} a_k h(x - y_k) \right| < \varepsilon, \quad x \in F.$$

Применяя эту лемму к компакту $F = \widehat{K}_\mu(\Omega)$ и функции $u$, гармонической в окрестности $\widehat{K}_\mu(\Omega)$, для произвольного $\varepsilon > 0$ получаем

$$\left| (u(x) - u(0)) - \sum_{k=1}^{m} a_k (h(x - y_k) - h(y_k)) \right| < 2\varepsilon, \quad x \in \widehat{K}_\mu(\Omega),$$

где точки $y_1, y_2, \dots, y_m$ лежат вне $\widehat{K}_\mu(\Omega)$. Отсюда, интегрируя по мере $\mu$ и учитывая, что по предложению 1.4 $V(y_k) = 0$ при $y_k \notin \widehat{K}_\mu(\Omega)$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int (u(x) - u(0))\, d\mu(x) \right| &= \left| \int (u(x) - u(0))\, d\mu(x) - \sum_{k=1}^{m} a_k V(y_k) \right| \\ &= \left| \int (u(x) - u(0))\, d\mu(x) - \sum_{k=1}^{m} a_k \int (h(x - y_k) - h(y_k))\, d\mu(x) \right| \\ &\le \int \left| (u(x) - u(0)) - \sum_{k=1}^{m} a_k \int (h(x - y_k) - h(y_k))\, d\mu(x) \right| \le 2\varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвола в выборе $\varepsilon > 0$ получаем $\int (u(x) - u(0))\, d\mu = 0$, т. е. $\mu$ — мера Аренса — Зингера для нуля на любой области $\omega \supset \widehat{K}_\mu(\Omega)$.

Ввиду очевидного включения $PJ(\Omega;T) \subset PAS(\Omega;T)$ из доказанного следует, что

$$\mathscr{P}^{-1}(PJ(\Omega;T)) \subset AS(\Omega;T). \tag{1.20}$$

Докажем равенство

$$\mathscr{P}^{-1}(PJ(\Omega;T)) = J(\Omega;T). \tag{1.21}$$

Пусть $u$ — субгармоническая непрерывная функция в области, содержащей компактное подмножество $\widehat{K}_\mu(\Omega) \subset T$, и $V = V_\mu \in PJ(\Omega;T)$. Здесь мера $\mu$ попрежнему построена по предложению 1.4 и последнее включение выполнено согласно условию $\Omega$-допустимости для $T$. По обобщенной формуле Пуассона — Йенсена и уже доказанного соотношения (1.20) для меры $\mu \in AS(\Omega;T)$ из (1.3) имеем $u(0) = \int u\,d\mu - \int V\,d\nu$, где $\nu$ — распределение масс Рисса функции $u$. Отсюда ввиду неотрицательности функции Йенсена $V$ сразу вытекает, что

$$u(0) \le \int u\,d\mu \tag{1.22}$$

для любой субгармонической непрерывной в открытой окрестности компакта $\widehat{K}(\Omega)$ функции $u$. Для произвольной функции $u \in SH(\Omega)$ найдется убывающая к $u$ последовательность $\{u_n\}$ субгармонических в окрестности $\widehat{K}(\Omega)$ и непрерывных функций [16, теорема 3.8]. Применяя (1.22) к каждой из функций последовательности $\{u_n\}$ и переходя к пределу по $n \to \infty$, получим (1.22) для произвольной функции $u \in SH(\Omega)$, т. е. $\mathscr{P}^{-1}(V) = \mu \in J(\Omega; T)$.

Соотношение (1.21), а значит, и теорема двойственности доказаны.

Замечание. Отметим топологические свойства отображений $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}^{-1}$, которые продиктованы теоремой двойственности и известными взаимосвязями между сходимостями мер и их потенциалов. Пусть по-прежнему $T$ — замкнутое и $\Omega$-допустимое подмножество области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $0 \in T$.

1. Если последовательность мер $\{\mu_n\}$ содержится в $AS(\Omega; T)$ (соответственно в $J(\Omega; T)$), сходится в слабой топологии в $\mathscr{M}(\Omega)$ (в смысле [26]) к мере $\mu$ и носители всех мер $\mu_n$ содержатся в одном компактном подмножестве из $\Omega$, то квазивсюду, т. е. вне полярного множества,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathscr{P}(\mu_n)(x) = \mathscr{P}(\mu)(x).$$

При этом здесь полунепрерывная сверху регуляризация левой части совпадает всюду вне нуля с правой частью, а также $\mu \in AS(\Omega; T)$ и $\mathscr{P}(\mu) \in PAS(\Omega; T)$ (соответственно $\mu \in J(\Omega; T)$ и $\mathscr{P}(\mu) \in PJ(\Omega; T)$) (см. [26, гл. III, § 3]).

При тех же условиях на последовательность мер $\{\mu_n\}$ последовательность $\mathscr{P}(\mu_n)$ сходится к $\mathscr{P}(\mu_n)$ по $(\alpha+d-2)$-мере Хаусдорфа — Карлесона на каждом компакте из $\Omega$ при любом $\alpha > 0$ (см. [28, лемма 4.4.4; 29, теорема 2.7.4.5]).

2. Если последовательность функций $\{V_n\}$ содержится в $PAS(\Omega; T)$ (соответственно в $PJ(\Omega; T)$), сходится в топологии пространства $\mathscr{D}'(\Omega)$ обобщенных функций на $\Omega$ и все функции $V_n$ тождественно равны нулю вне некоторого фиксированного компактного подмножества из $\Omega$, то последовательность мер $\mu_n = \mathscr{P}^{-1}(V_n)$ слабо сходится к некоторой мере $\mu$ из $AS(\Omega; T)$ (соответственно в $J(\Omega; T)$). При этом функция $V = \mathscr{P}(\mu) \in PAS(\Omega; T)$ (соответственно $\in J(\Omega; T)$) есть предел в $\mathscr{D}'(\Omega)$ или в $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ последовательности $\{V_n\}$, квазивсюду $\limsup\limits_{n\to\infty} V_n(x) = V(x)$, где полунепрерывная сверху регуляризация левой части совпадает всюду вне нуля с правой частью и последовательность $\{V_n\}$ сходится к функции $V$ по $(\alpha + d - 2)$-мере Хаусдорфа — Карлесона на каждом компакте из $\Omega$ при любом $\alpha > 0$.

Этот пункт следует из (1.8), непрерывности оператора Лапласа в $\mathscr{D}'(\Omega)$ и [28, теорема 4.4.1; 29, теорема 2.7.4.1; 30, теорема 4.1.9 и предложение 16.1.2].

## § 2. О носителе мер Йенсена и Аренса — Зингера

По-прежнему $0 \in \Omega$. Ниже через $h_0(K, \Omega)$ обозначаем объединение всех тех дыр в $K$ относительно $\Omega$, для которых точка 0 есть граничная или внутренняя точка (очевидно, в последнем случае такая дыра единственная).

Мы используем следующее определение неразреженного (non-thin) множества в теории потенциала.

Определение 4 [21, 7.1; 16; 25]. Пусть $x_0 \in (\mathbb{R}^d)^* = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$. Множество $E \subset (\mathbb{R}^d)^*$ *неразреженное в* $x_0$, если для любой окрестности $W$ точки $x_0$ и любой ограниченной сверху субгармонической в $W \setminus \{x_0\}$ функции $u$ выполнено равенство

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} u(x) = \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E \setminus \{x_0\}}} u(x).$$

Знаменитый критерий Винера позволяет сформулировать последнее понятие исключительно в терминах емкости [21, 27, 31, 32].

Следующее определение — незначительная модификация определения из [33, с. 73].

Определение 5. Точка $x \in \mathbb{R}^d$ *связана через* $E \subset \mathbb{R}^d$ с непустым множеством $A \subset \mathbb{R}^d$, если $x \in E$, множества $E$ и $E \setminus \{x\}$ связные и $A \cap E \neq \varnothing$.

Условие связности множества $E$ в этом определении можно заменить условием предельности точки $x$ для $E \setminus \{x\}$ в $\mathbb{R}^d$ (см. [33, IV.1, теорема 1.2]).

**Теорема о носителе.** *Пусть $\Omega$ — область в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, такая, что $0 \in \Omega$, и $\mu \in \mathscr{M}^+(\Omega)$, $\mu \neq \delta_0$. Пусть $E$ — подмножество в $\mathbb{R}^d$ такое, что при выполнении условий $d \geq 3$, $0 \in \operatorname{supp} \mu$ оно неразреженное в точке $0$.*

*Если $\mu$ — мера Йенсена или Аренса — Зингера для точки $0$ на $\Omega$ и точка $0$ связана через $E$ с множеством*

$$\mathbb{R}^d \setminus (\{0\} \cup h_0(\operatorname{supp} \mu, \Omega)) \tag{2.1}$$

*или, менее общо, с множеством $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$, то*

$$(E \setminus \{0\}) \cap \operatorname{supp} \mu \neq \varnothing. \tag{2.2}$$

*В частности, при $d = 2$, т. е. в $\mathbb{C}$, каждая непрерывная кривая с началом в нуле, пересекающая множество (2.1), пересекает и $\operatorname{supp} \mu$ вне нуля.*

*Обратно, если точка $0$ не связана через компактное множество $E \subset \mathbb{R}^d$ с множеством $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ или множество $E \subset \mathbb{R}^d$ разреженное в точке $0$, то найдется мера Йенсена $\mu \neq \delta_0$ такая, что (2.2) неверно.*

Доказательство прямого утверждения. Напомним, что связное множество в $\mathbb{C}$, содержащее более одной точки, неразреженное в каждой точке его замыкания [32, теорема 3.8.3]. Кроме того, если в условиях теоремы о носителе $d \geq 3$ и дополнительно $0 \notin \operatorname{supp} \mu$, а условие неразреженности множества $E$ в точке $0$ не выполнено, то к множеству $E$ можно добавить достаточно малую окрестность точки $0$, не пересекающую $\operatorname{supp} \mu$. Тогда вновь полученное множество уже неразреженное в точке $0$ и другие условия теоремы не изменяются. При этом достаточно доказать теорему двойственности, когда роль $E$ играет построенное объединение. Таким образом, по условию теоремы о носителе подмножество $E$, через которое по условию связаны точка $0$ и множество (2.1), можно считать неразреженным в точке $0$ при всех $d \geq 2$ и $\mu$.

По построению множество (2.1) всегда включает в себя множество $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$.

Доказательство первой части теоремы проведем от противного.

(**Д**) Допустим, что множество $E_0 = E \setminus \{0\}$ не пересекает $\operatorname{supp} \mu$.

**Лемма 2.1.** *В условиях теоремы о носителе и при нашем предположении* (**Д**) *пересечение множеств* $E_0$ *и* $\widehat{K}_\mu(\Omega)$ *пусто и множество* $E_0$ *целиком лежит в одной из связных компонент дополнения* $\mathbb{R}^d \setminus \widehat{K}_\mu(\Omega)$ *с предельной точкой* 0.

Доказательство леммы 2.1. Если $x \in \widehat{K}_\mu(\Omega)$ и $x \in E_0$, то точка $x$ не может лежать на $\operatorname{supp}\mu$ и принадлежит некоторой дыре $W$ для $K_\mu$ относительно $\Omega$. Отметим, что граница каждой дыры компакта включена в этот компакт (см. [34, замечание 3.5]).

Для дыры $W$ возможны только две ситуации.

Первая — когда точка 0 не является предельной для дыры $W$. Тогда на $E_0$ есть как точка из $W$, так и точка, лежащая вне $W$, ибо 0 — предельная точка для $E_0$ (см. замечание после определения 5).

**Лемма 2.2** (см. [33, IV.1, теорема 1.3]). *Если связное множество точек в* $\mathbb{R}^d$ *пересекает как множество* $A$, *так и его дополнение* $\mathbb{R}^d \setminus A$, *то оно пересекает и границу* $\partial A$ *множества* $A$.

По этой лемме связное множество $E_0$ пересекает и границу $\partial W$, а значит, и $K_\mu$. Это пересечение не может быть точкой $0 \notin E_0$, следовательно, это пересечение содержит точку из $\operatorname{supp}\mu$. Противоречие предположению (**Д**)!

Таким образом, возможна только одна ситуация: точка 0 предельная для дыры $W$, если такие дыры существуют. Иначе говоря, $W \subset h_0(K_\mu, \Omega)$. Для дыры $W$ и связного множества $E_0$ есть общая точка $x$, и в то же время по условию (2.1) связное множество $E_0$ пересекает и дополнение $\mathbb{R}^d \setminus W$, поскольку $h_0(K_\mu, \Omega) \subset h_0(\operatorname{supp}\mu, \Omega)$. Вновь по лемме 2.2 это противоречит предположению (**Д**)!

Доказано, что $\widehat{K}_\mu(\Omega) \cap E_0 = \varnothing$. Следовательно, связное множество $E_0$ имеет общую точку с некоторой связной компонентой дополнения $\mathbb{R}^d \setminus \widehat{K}_\mu(\Omega)$. Объединение двух связных множеств с общей точкой снова связное [33, IV.1, следствие 2], значит, множество $E_0$ содержится в этой связной компоненте. Точка 0 предельная для $E_0$, а тем самым и для этой связной компоненты.

Лемма 2.1 доказана.

Завершим доказательство первой части теоремы о носителе. При этом мы следуем подходу к терминологии и обозначениям из [34].

Через $C(K)$, как обычно, обозначаем банахово пространство всех непрерывных вещественнозначных функций на компакте $K \subset \mathbb{R}^d$ с равномерной нормой. Напомним, что функция $u \in C(K)$ *имеет пик в точке* $a \in K$, если

$$u(a) = 1, \quad u(x) < 1 \ \text{ для всех } x \in K \setminus \{a\}. \tag{2.3}$$

Пусть $L$ — замкнутое подпространство в $C(K)$. Говорят, что $a \in K$ — *точка пика* для $L$, если существует функция $u \in L$, имеющая пик в точке $a$. Через $\overline{H}_K(\Omega)$ обозначаем замыкание $H(\Omega)$ в $C(K)$. Ниже нам потребуется

**Лемма 2.3** [34, теорема 2.2(c)]. *Точка* $a \in \mathbb{R}^d$ — *точка пика для* $\overline{H}_K(\Omega)$, *если и только если множество* $\Omega \setminus \widehat{K}(\Omega)$ *неразреженное в точке* $a$.

Рассмотрим в качестве компакта $K$ компакт $\widehat{K}_\mu(\Omega)$, а в качестве точки $a$ точку 0, которая при предположении (**Д**) по лемме 2.1 есть граничная точка этого компакта. Так как по лемме 2.1 множество $E_0$ лежит вне этого компакта и точка 0 предельная для него, множество $\Omega \setminus \widehat{K}_\mu(\Omega)$ неразреженное в точке 0 в силу неразреженности множества $E_0$ в точке 0. Отсюда по лемме 2.3 точка

0 — точка пика пространства $\overline{H}_K(\Omega)$ при нашем выборе компакта $K$. Поэтому найдется функция $u$, являющаяся равномерным пределом гармонических в $\Omega$ функций, удовлетворяющая условиям (2.3). По определению меры Аренса — Зингера для $a = 0$ имеем $1 = u(0) = \int\limits_K u\,d\mu$. Отсюда ввиду (2.3) для вероятностной меры $\mu$ сразу следует, что $\mu = \delta_0$. Получено противоречие с условием $\mu \neq \delta_0$, следовательно, предположение (**Д**) неверно.

В случае непрерывной кривой $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(0) = 0$, пересекающей множество (2.1), возможно, отбрасывая часть кривой (точнее, ее образа), можно считать, что

$$\gamma(t) \neq 0 \quad \text{при } t > 0. \tag{2.4}$$

Выберем в этом случае $E = \gamma([0,1])$. Ввиду (2.4) $E_0 = E \setminus \{0\} = \gamma((0,1])$ также связное, а эта ситуация уже рассмотрена.

Первая часть теоремы о носителе до обратного утверждения доказана.

Доказательство обратного утверждения. Для пустого множества $E$ утверждение очевидно. Поэтому ниже $E \neq \varnothing$.

1. Рассмотрим в этом пункте случай, когда точка 0 не связана через компактное множество $E \subset \mathbb{R}^d$ с множеством $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$.

Если $0 \notin E$, то в качестве требуемой меры Йенсена можно взять вероятностную меру $s_0^t$ или $m_0^t$ при достаточно малом $t > 0$. Поэтому ниже в этом пункте считаем, что $0 \in E$.

Если $E \subset \Omega$, то существует относительно компактная область $\omega$ в $\Omega$ с достаточно гладкой границей, содержащая компакт $E$ и точку 0. Тогда в качестве искомой меры Йенсена можно выбрать гармоническую меру $\omega(\cdot, 0)$ для области $\omega$ в точке 0.

Если компакт $E$ имеет непустое пересечение с множеством $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$, то нам потребуется

**Лемма 2.4** [33, теорема 5.6]. *Если $X$ и $Y$ — непустые замкнутые подмножества компакта $E$ такие, что нет связных компонент компакта $E$, одновременно пересекающих $X$ и $Y$, то существует разбиение $E = H_1 \cup H_2$ на два непересекающихся замкнутых в $E$ подмножества такое, что $X \subset H_1$ и $Y \subset H_2$.*

Выберем в нашем случае в качестве $X$ одноточечное множество $\{0\}$, а в качестве множества $Y$ пересечение $E \cap (\mathbb{R}^d \setminus \Omega)$. Тогда замкнутое в $E$ множество $H_1$, которое существует по лемме 2.4, содержит точку $\{0\}$ и не пересекает $Y = \mathbb{R}^d \setminus \Omega$, т. е. содержится в $\Omega$. Множество $H_1$ как замкнутое подмножество компакта компактно, а значит, $H_1$ — компактное подмножество в $\Omega$. Таким образом, мы вернулись к предыдущей ситуации, если в качестве $E$ рассматривать уже множество $H_1$.

Случай несвязного множества $E$ рассмотрен полностью.

2. Рассмотрим в этом пункте случай, когда множество $E \subset \mathbb{R}^d$ разреженное в точке 0.

Если $d = 2$, то ввиду разреженности $E$ по свойству Лебега — Берлинга [31, предложение IX.6] существуют окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = t\}$ сколь угодно малого радиуса $t > 0$, не пересекающие $E$. Поэтому при $d = 2$ в качестве требуемой меры Йенсена можно взять меру $s_0^t$ для достаточно малого $t > 0$.

Пусть $d > 2$. Для этого случая продемонстрируем технику применения теоремы двойственности.

Если 0 не принадлежит замыканию $\overline{E}$, то приходим к ситуации предыдущего пункта. Поэтому ниже в этом пункте считаем, что 0 является предельной точкой для $E$.

Инверсия $E^\star$ множества $E$ есть множество, разреженное в точке $\infty \in (\mathbb{R}^d)^*$ [27, теорема 7.13]. По определению разреженности [27] существует субгармоническая в окрестности $W$ точки $\infty$ функция $u$ такая, что

$$\limsup_{x\to\infty} u(x) = a > 0; \quad u(x) \le 0, \quad x \in (W \cap E^\star) \setminus \{\infty\}. \tag{2.5}$$

**Лемма 2.5** [27, теорема 7.2]. *Допустим, что $u(x)$ — субгармоническая функция в $\{x \in \mathbb{R}^d : r < |x| < \infty\}$, $d \ge 3$. Тогда если $r' > r$, то существует субгармоническая в $\mathbb{R}^d$ функция $v(x)$, постоянная при $|x| \le r$ и такая, что для $|x| \ge r'$ имеет место равенство*

$$v(x) = u(x) - \alpha|x|^{2-d}, \tag{2.6}$$

*где $\alpha$ — положительная постоянная.*

Пусть $v$ — функция, построенная по этой лемме для нашей функции $u$, и $v \equiv c$ при $|x| \le r$, где $r > 0$ выбрано так, что

$$\overline{B}(0, 1/r) \subset \Omega; \quad ((\mathbb{R}^d)^* \setminus B(0, r)) \subset W. \tag{2.7}$$

Из вида (2.6) функции $v$ следует, что для $v$ сохраняются свойства (2.5). В частности, $v$ — непостоянная функция, и

$$v(x) \le 0, \quad x \in (W \cap E^\star) \setminus \{\infty\}. \tag{2.8}$$

Непостоянная субгармоническая в $\mathbb{R}^d$ функция $v$ не может достигать супремума в шаре $B(0, r)$. Следовательно, $c < a$. Выберем число $b$ так, что

$$c^+ \overset{\mathrm{def}}{=} \max\{c, 0\} < b < a. \tag{2.9}$$

Полагаем $V^\star = ((v - b)/(a - b))^+$. По построению функция $V^\star$ непостоянная положительная субгармоническая и согласно (2.5) и (2.6) удовлетворяет условиям

$$\limsup_{y\to\infty} V^\star(y) = 1; \quad V^\star(y) \equiv 0, \quad |y| \le r. \tag{2.10}$$

Кроме того, по выбору (2.9) числа $b$ ввиду (2.8) и полунепрерывности сверху функции $V^\star$ выполнено $V^\star \equiv 0$ в некоторой открытой окрестности множества $(W \cap E^\star) \setminus \{\infty\}$. Из (2.10) по принципу максимума следует (1.10).

Применяя преобразование Кельвина к функции $V^\star$, получаем непостоянную положительную субгармоническую в $(\mathbb{R}^d)^* \setminus \{0\}$ функцию $V$, которая удовлетворяет (0.3) для $x = 0$. Кроме того, согласно (2.7) и (2.10) функция $V$ — тождественный нуль вне замкнутого шара $\overline{B}(0, 1/r) \subset \Omega$ и $V \equiv 0$ в некоторой открытой окрестности множества $\overline{B}(0, 1/r) \cap E$. Следовательно, по теореме двойственности существует единственная мера Йенсена $\mu$ для точки $0 \in \Omega$ на любой области $\omega \supset \overline{B}(0, 1/r)$, лежащей в $\Omega$, такая, что $V_\mu = V$. Очевидно, что тогда $\mu \in J(\Omega)$. По свойствам функции $V$ ввиду (1.8) носитель меры $\mu$ содержится в шаре $\overline{B}(0, 1/r)$ и не пересекает множество $\overline{B}(0, 1/r) \cap E$. При этом $\mu \ne \delta_0$, так как функция $V = V_\mu$ непостоянна. Тем самым требуемая мера Йенсена, не пересекающая $E \setminus \{0\}$, построена и обратное утверждение теоремы о носителе полностью доказано.

Приведем некоторые следствия теоремы о носителе.

**Следствие 1.** *Пусть* $\Omega$ *— область в* $\mathbb{R}^d$ *и* $0 \in \Omega$. *Если* $\mu$ *— мера Йенсена или Аренса — Зингера для точки* $0$ *на* $\Omega$,

$$\operatorname{supp}\mu \neq \{0\}, \tag{2.11}$$

*а также при* $d \geq 3$ *дополнение* $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp}\mu$ *неразреженное в точке* $0$, *то точка* $0$ *не может быть предельной для неограниченной связной компоненты дополнения* $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp}\mu$.

Доказательство. Рассмотрим множество $E$, построенное как объединение точки $0$ и неограниченной связной компоненты дополнения $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp}\mu$. Если точка $0$ предельная для этой компоненты, то множество $E$ также связное [33, IV.1, теорема 1.2]. Следовательно, точка $0$ связана через $E$ с (2.1) и не пересекает $\operatorname{supp}\mu$ вне нуля, что противоречит теореме о носителе.

При $d = 2$ по теореме о носителе каждый луч с началом в нуле пересекает носитель меры Йенсена или Аренса — Зингера, если эта мера не мера Дирака в нуле. При $d \geq 3$ это, вообще говоря, не так. Например, если $E$ — луч в $\mathbb{R}^3$ с началом в нуле или $(d-2)$-мерное подпространство в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 4$, то $E$ разреженное в нуле [31; гл. IX, п. 3] и связное вместе с $E \setminus \{0\}$. При этом для любого открытого множества $\Omega$, $0 \in \Omega$, по заключительной части теоремы о носителе существует мера Йенсена $\mu$ вида (2.11), не пересекающая $E$ вне нуля.

Для формулировки соответствующего результата для системы лучей при $d \geq 3$ воспользуемся некоторыми понятиями из [27, 7.3.4].

Пусть $\xi$ — точка на единичной сфере в $\mathbb{R}^d$, т. е. $|\xi| = 1$. Определим лучи

$$L(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d : x = r\xi\}, \quad 0 \leq r < \infty. \tag{2.12}$$

Отождествим множество лучей

$$\{L(\xi) : \xi \in e\} \tag{2.13}$$

с соответствующим множеством $e \subset \partial B(0,1)$. Говорим, что некоторое свойство выполнено почти на всех лучах, если оно имеет место на множестве (2.13) и дополнение $\partial B(0,1) \setminus e$ имеет нулевую внутреннюю $(d-2)$-емкость.

**Следствие 2.** *Пусть* $\Omega$ *— область в* $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, *и* $0 \in \Omega$. *Если* $\mu$ *— мера Йенсена или Аренса — Зингера для точки* $0$ *на* $\Omega$ *вида* (2.1), *то почти на всех лучах вида* (2.12) *есть точки множества*

$$\operatorname{supp}\mu \setminus \{0\}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Допустим, что утверждение следствия неверно. Тогда существует подмножество $e \in \partial B(0,1)$ такое, что

$$\operatorname{Cap}_* e \geq \varepsilon > 0, \tag{2.15}$$

где $\operatorname{Cap}_* e$ обозначает внутреннюю $(d-2)$-емкость множества $e$, и ни один из лучей системы (2.14) не пересекает множество (2.14). Дополним множество (2.15) до множества $E = \{x \in \mathbb{R}^d : x \in L(\xi),\ \xi \in e\} \cup \partial B(0,R)$, где $R > 1$ выбрано столь большим, что шар $B(0,R)$ содержит носитель меры $\mu$. Очевидно, множества $E$ и $E \setminus \{0\}$ связны, и точка $0$ связана через $E$ с неограниченной связной компонентой дополнения $\mathbb{R}^d \setminus (\operatorname{supp}\mu \cup \{0\})$, т. е. точка $0$ связана через $E$ с множеством (2.1). Если мы покажем, что множество $E$ неразреженное в точке 0, то по теореме о носителе ввиду выбора $R$ множество $E$ пересекает множество (2.14) в точках на лучах системы (2.13), что влечет противоречие.

Для доказательства неразреженности $E$ в нуле воспользуемся критерием Винера. Положим

$$E_n = E \cap \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{-n-1} \le |x| \le 2^{-n}\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Из неравенства [26, теорема 7.16]

$$\mathrm{Cap}_* e \le 2^{n+1} \mathrm{Cap}^* E_n,$$

где $\mathrm{Cap}^* E_n$ обозначает внешнюю $(d-2)$-емкость множества $E_n$, ввиду предположения (2.15) следует, что

$$\sum_n (2^{n+1} \mathrm{Cap}^* E_n)^{d-2} \ge \sum_n (\mathrm{Cap}_* e)^{d-2} \ge \sum_n \varepsilon^{d-2} = \infty.$$

По критерию Винера [21, 27, 31, 32] расходимость левой части эквивалентна неразреженности множества $E$ в нуле.

Следствие доказано.

## § 3. Доказательства критериев

Доказательство первого критерия (суб-)гармоничности. По определению 1 необходимость очевидна. Докажем достаточность условий (0.1) для субгармоничности $u$.

Достаточно показать, что если $\overline{B}$ — замкнутый шар, $\overline{B} \subset \Omega$, $h$ — гармоническая функция в $\mathbb{R}^d$ и $u \le h$ на границе шара $\partial\overline{B}$, то $u \le h$ в $\overline{B}$ [30, предложение 16.1.4].

Предположим, что $M = \sup\limits_B (u - h) > 0$. Верхняя грань достигается в замкнутом подмножестве $F$ шара $\overline{B}$, поскольку функция $u - h$ полунепрерывна сверху. По предположению расстояние $\sigma$ от $F$ до $\partial\overline{B}$ положительно. Пусть $x \in F$ и расстояние от $x$ до $\partial\overline{B}$ равно $\sigma$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ столь большим, что шар $B(x, 1/n)$ содержится в шаре $\overline{B}$. Пусть $\mu_x^n \ne \delta_0$ — мера, для которой выполнено первое из соотношений в (0.1). По теореме о носителе каждый конус вращения с вершиной в нуле и непустой внутренностью пересекает носитель меры $\mu_x^n$ вне точки $x$, поскольку такой конус неразрежен в вершине [31, гл. IX, п. 2]. Среди таких конусов найдется конус такой, что расстояние от любой точки этого конуса, лежащей в $B(x, 1/n) \setminus \{x\}$, до $\partial\overline{B}$ меньше $\sigma$. Следовательно, найдется точка $y \in B(x, 1/n) \setminus \{x\}$ такая, что $y \in \operatorname{supp} \mu_x^n$ и $u - h < M$ в некоторой открытой окрестности точки $y$. Поэтому

$$\int (u - h)\, d\mu_x^n < M \int d\mu_x^n = M = (u - h)(x).$$

Отсюда в силу включения $J_x(\Omega) \subset AS_x(\Omega)$ следует $\int u\, d\mu_x^n < u(x)$, что противоречит определению меры Йенсена. Таким образом, предположение $M > 0$ неверно, и $M = 0$, что и требовалось.

Применяя такие же рассуждения к функциям $u$ и $-u$, при выполнении второго из соотношений в (0.1) аналогично получаем критерий гармоничности.

**Теорема о продолжении** (ср. [16, теорема 5.18; 17, 1.V.5; 18]). *Пусть* $\Omega$ — *область в* $\mathbb{R}^d$, $E$ — *полярное множество в* $\mathbb{R}^d$ *и функция* $u : \Omega \setminus E \to [-\infty, +\infty)$, $u \not\equiv -\infty$, *удовлетворяет условиям:*

(1) *функция* $u$ *локально ограничена сверху* (*соответственно локально ограничена*) *в* $\Omega \setminus E$;

(2) *функция* $u$ *полунепрерывна сверху в* $\Omega \setminus E$;

(3) *для каждой точки* $x \in \Omega \setminus E$ *и каждого шара* $B(x, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, *найдется мера Йенсена* $\mu_x^n$ *для точки* $x$ *на* $\Omega$ *такая, что* $\{x\} \neq \operatorname{supp} \mu_x^n \subset B(x, 1/n)$ *и имеет место соотношение*

$$(1 - \mu_x^n(\{x\}))u(x) \le \int\limits_{\Omega \setminus (E \cup \{x\})} u \, d\mu_x^n \tag{3.1}$$

$$(\textit{соответственно } \ (1 - \mu_x^n(\{x\}))u(x) = \int\limits_{\Omega \setminus (E \cup \{x\})} u \, d\mu_x^n). \tag{3.2}$$

*Тогда существует единственное субгармоническое* (*соответственно гармоническое*) *продолжение* $u'$ *функции* $u$ *в* $\Omega$, $u' = u$ *на* $\Omega \setminus E$, *доопределенное на* $E$ *по правилу*

$$u'(x) = \limsup_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega \setminus E}} u(y), \quad x \in \Omega \cap E. \tag{3.3}$$

При доказательстве этой теоремы придерживаемся схемы из [17, 1.V.5].

Доказательство. (Суб-)гармоническое продолжение $u'$ функции $u$ на $\Omega \cap E$ обязано строиться по правилу (3.3), если оно существует, так как полярное множество $E$ имеет нулевую лебегову меру в $\mathbb{R}^d$ (см. [17, 1.II(6.1)]). Следовательно, достаточно доказать существование.

**Лемма 3.1** [5, следствие 1.8]. *Для любой меры Йенсена* $\mu$ *для точки* $x$ *на* $\Omega$ *и любого множества нулевой внешней емкости* $E$ *выполнено* $\mu(E \setminus \{x\}) = 0$.

Полярное множество $E$ имеет нулевую внешнюю емкость [16, теорема 5.32]. По лемме 3.1 интегрирование в (3.1) и (3.2) можно заменить интегрированием по множеству $\Omega \setminus \{x\}$. Кроме того, каждую меру Йенсена $\mu_x^n$ для точки $x$ на $\Omega$ в этих соотношениях можно заменить вероятностными мерами

$$\frac{1}{1 - \mu_x^n(\{x\})} \cdot \bigl(\mu_x^n - \mu_x^n(\{x\})\delta_x\bigr). \tag{3.4}$$

Легко видеть, что меры из (3.4) по-прежнему являются мерами Йенсена для точки $x$ на $\Omega$ с теми же свойствами, что и исходные, но в отличие от них обязательно сосредоточены вне точки $x$. Таким образом, сохраняя для этих вновь введенных мер обозначение $\mu_x^n$, условия (3.1) и (3.2) согласно лемме 3.1 можем записать в виде

$$u'(x) = u(x) \le (\text{ соответственно } =) \int\limits_{B(x,1/n)} u' \, d\mu_x^n, \quad x \in \Omega \setminus E, \quad \mu_x^n(\{x\}) = 0. \tag{3.5}$$

Из определения (3.3) функции $u'$ и из (3.5) в силу леммы 3.1 и того, что меры $\mu_x^n$ вероятностные, легко следует полунепрерывность сверху функции $u'$ всюду в $\Omega$ (ср. доказательства в [16, теорема 5.18; 17, 1.V.5]).

Если существование (суб-)гармонического продолжения функции $u$ верно локально, то оно верно и в целом. Поэтому далее достаточно рассматривать случай, когда $\Omega$ — шар в $\mathbb{R}^d$.

Так как множество $E$ полярное, существует субгармоническая отрицательная в $\Omega$ функция $v$, которая тождественно равна $-\infty$ на множестве $\Omega \cap E$ и конечна в некоторой точке из $\Omega \setminus E$, где конечна функция $u$ [17, 1.V.4]. Рассмотрим функции

$$u_\varepsilon = u' + \varepsilon v, \tag{3.6}$$

где $\varepsilon$ — положительное число. Каждая такая функция полунепрерывна сверху и в силу (3.5) удовлетворяет неравенствам

$$u_\varepsilon(x) \le \int u_\varepsilon \, d\mu_x^n, \quad x \in \Omega \setminus E, \quad n \ge n(x). \tag{3.7}$$

Поскольку $u_\varepsilon(x) = -\infty$ при $x \in \Omega \cap E$, то для каждого $x \in \Omega \cap E$ можно подобрать, вообще говоря произвольно, последовательность мер Йенсена $\mu_x^n$ для точки $x$ на $\Omega$ такую, что $\{x\} \ne \operatorname{supp} \mu_x^n \subset B(x, 1/n) \subset \Omega$, $n > n(x)$, и тогда неравенства (3.7) имеют место при всех $x \in \Omega$. По первому критерию субгармоничности все функции $u_\varepsilon$ субгармоничны при $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим функцию $u_0(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x)$, $x \in \Omega$, которая по построению (3.6) равна функции $u$ квазивсюду, т. е. значения $u(x)$ и $u_0(x)$ совпадают вне некоторого полярного множества, являющегося в точности множеством тех точек, где $v$ обращается в $-\infty$.

Тогда полунепрерывная сверху регуляризация $u_0^*$ функции $u_0$ уже субгармоническая функция в $\Omega$ и равна $u_0$ квазивсюду [17, основная теорема сходимости].

Из полунепрерывности сверху субгармонической функции $u_0^*$ по определению мер Йенсена $\mu_x^n$ имеем

$$\limsup_{n \to +\infty} \int u_0^* \, d\mu_x^n \le u_0^*(x) \le \liminf_{n \to +\infty} \int u_0^* \, d\mu_x^n.$$

Отсюда ввиду леммы 3.1 и совпадения $u_0^*$ и $u_0$ квазивсюду

$$u_0^*(x) = \lim_{n \to +\infty} \int u_0^* \, d\mu_x^n = \lim_{n \to +\infty} \int u_0 \, d\mu_x^n, \quad x \in \Omega. \tag{3.8}$$

Аналогично из полунепрерывности сверху функции $u$ вне $E$ и из (3.5) с учетом леммы 3.1 и совпадения $u$ и $u_0$ квазивсюду

$$u(x) = \lim_{n \to +\infty} \int u \, d\mu_x^n = \lim_{n \to +\infty} \int u_0 \, d\mu_x^n, \quad x \in \Omega \setminus E.$$

Отсюда и из (3.8) функция $u_0^*$ совпадает с $u$ вне $E$ и требуемое субгармоническое продолжение построено.

В случае выполнения условия (3.2) для локально ограниченной полунепрерывной сверху функции $u$ на $\Omega \setminus E$ доказательство существования гармонического продолжения этой функции на множество $E$ выводится из доказанного выше дословно так же, как в [17, 1.V.5 (специальный случай)].

Доказательство второго критерия (суб-)гармоничности. Если функция $u$ продолжается как (суб-)гармоническая на все $\Omega$, то необходимость условий (1) и (2) очевидна. Условие (3) сразу следует из неотрицательности функций Йенсена и свойства $\nu_u \geq 0$ для субгармонической (соответственно $\nu_u = 0$ для гармонической) функции $u$.

Обратно, пусть выполнены условия (1)–(3) и $u = u_1 - u_2$ — представление $\delta$-субгармонической функции в виде разности субгармонических функций $u_1$ и $u_2$ в $\Omega$, $E_0$ — полярное множество, на котором функция $u_1$ или $u_2$ принимают значение $-\infty$.

Сопоставим каждой функции Йенсена $V_x^n \in PJ(\Omega)$ однозначно определенную меру Йенсена $\mu_x^n$ по правилу, продиктованному теоремой двойственности. По условиям на функции Йенсена $V_x^n$ имеем

$$\{x\} \neq \operatorname{supp} \mu_x^n \subset B(x, 1/n). \tag{3.9}$$

Применяя затем обобщенную формулу Пуассона — Йенсена в точках $x \in \Omega \setminus E_0$ отдельно к каждой функции $u_1$ и $u_2$, для функции $u$ приходим к равенству

$$\int V_x^n \, d\nu_u = \int u \, d\mu_x^n - u(x), \quad x \in \Omega \setminus E_0. \tag{3.10}$$

Для точек $x$ из $\Omega \setminus E_0$, где функции $u_1$ и $u_2$ конечны, очевидно, $\nu_u\{x\} = 0$, поэтому интеграл в левой части (3.10) на самом деле можно брать по множеству $B(x, 1/n) \setminus \{x\}$.

Ниже $E' = E \cup E_0$ (также полярное множество).

Из (3.10) с учетом леммы 3.1 и неравенств в (0.4) получаем

$$0 \leq \int\limits_{B(x,1/n)\setminus\{x\}} V_x^n \, d\nu_u = \int\limits_{\Omega\setminus(E'\cup\{x\})} u \, d\mu_x^n - \big(1 - \mu_x^n(\{x\})\big) u(x), \quad x \in \Omega \setminus E'.$$

Таким образом, по условиям критерия (1)–(3) согласно (3.9) выполнены соответствующие условия теоремы о продолжении. Следовательно, найдется субгармоническая в $\Omega$ функция $u'$, которая является субгармоническим (соответственно гармоническим) продолжением функции $u$ с $\Omega \setminus E'$ на $\Omega$ и однозначно строится по правилу (3.3) с заменой $E$ на $E'$. В силу известных свойств субгармонических функций [9, 1.II.6(f)], учитывая, что множества $E'$ и $E$ как полярные имеют нулевую лебегову меру, получаем

$$u'(x) = \lim_{r\to 0} \int\limits_{B(x,r)\setminus E'} u' \, dm_x^{(r)} = \lim_{r\to 0} \int\limits_{B(x,r)\setminus E'} (u_1 - u_2) \, dm_x^{(r)}$$
$$= \lim_{r\to 0} \int\limits_{B(x,r)\setminus E} (u_1 - u_2) \, dm_x^{(r)}, \quad x \in \Omega,$$

где правая часть при $x \notin E$ равна $u_1(x) - u_2(x) = u(x)$. Таким образом, $u'$ на самом деле является субгармоническим (соответственно гармоническим) и единственным продолжением функции $u$ с $\Omega \setminus E$ на $\Omega$.

Доказательство критерия положительности заряда. Рассмотрим свертку $\nu^{(r)} = \alpha^{(r)} * \nu$, где $\alpha \not\equiv 0$ — гладкая финитная положительная функция, $\operatorname{supp} \alpha \subset B(0,1)$, $\alpha^{(r)}(x) = \alpha(x/r)$, $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$. Тогда в открытом множестве $\Omega^{(r)}$, составленном из точек $\Omega$, удаленных от границы $\partial\Omega$ множества $\Omega$ на расстояние $> r$, определена гладкая $\delta$-субгармоническая функция $u^{(r)}$ с распределением зарядов $\nu^{(r)}$ [15]. Из условия (0.5) следует, что

$$\int V^n(x+y) \, d\nu^{(r)}(y) = \int \int V^n(x+y+z) \, d\nu(y) \alpha^{(r)}(z) \, dz \geq 0$$

уже для всех точек $x \in \Omega$. Отсюда по второму критерию субгармоничности функция $u^{(r)}$ субгармоническая и $\nu^{(r)} \geq 0$. При $r \to 0$ система положительных мер $\nu^{(r)}$ слабо сходится к заряду $\nu$, следовательно, $\nu \geq 0$.

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Гамелин Т.* Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.

**2.** *Gamelin T. W.* Uniform algebras and Jensen measures. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978.

**3.** *Function Algebras.* Proc. Intern. sympos. function algebras /Birtel F., Ed. Chicago: Scott, Foresman and Co., 1966.

**4.** *Koosis P.* Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin. Montréal: Les Publications CRM, 1996.

**5.** *Cole B. J., Ransford T. J.* Subharmonicity without upper semicontinuity // J. Funct. Anal. 1997. V. 147. P. 420–442.

**6.** *Хабибуллин Б. Н.* Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55, № 5. С. 1101–1123.

**7.** *Хабибуллин Б. Н.* Оценки объема нулевых множеств голоморфных функций // Изв. вузов. Математика. 1992. № 3. С. 58–63.

**8.** *Хабибуллин Б. Н.* О нулевых множествах для целых функций и представлении мероморфных функций // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 4. С. 611–617.

**9.** *Hansen W., Nadirashvili N.* Mean values and harmonic functins // Math. Ann. 1993. V. 297. P. 157–170.

**10.** *Bu S., Schachermayer W.* Approximation of Jensen measures by image measures under holomorphic functions and applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 331, N 2. P. 585–608.

**11.** *Poletsky E. A.* Holomorphic Currents // Indiana U. Math. J. 1993. V. 42, N 1. P. 85–144.

**12.** *Netuka I., Vesely J.* Mean value property and harmonic functions // Classical and modern potential theory and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994. P. 359–398.

**13.** *Хабибуллин Б. Н.* О типе целых и мероморфных функций // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 11. С. 35–44.

**14.** *Хабибуллин Б. Н.* Неконструктивные доказательства теоремы Берлинга — Мальявена о радиусе полноты и теоремы неединственности для целых функций // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 4. С. 125–148.

**15.** *Arsove M. G.* Functions representable as differences of subharmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 75. P. 327–365.

**16.** *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.

**17.** *Doob J. L.* Classical potential theory and its probabilistic counterpart. New York: Springer-Verl., 1984.

**18.** *Watson N. A.* Superharmonic extensions, mean values and Riesz measures // Potential Anal. 1993. V. 2. P. 269–294.

**19.** *Хабибуллин Б. Н.* Меры Йенсена на открытых множествах // Вестн. Башкирск. ун-та. 1999. Т. 2. С. 3–6.

**20.** *Хабибуллин Б. Н.* Критерии субгармоничности в терминах мер и функций Йенсена // Материалы школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». Казань: Казанское мат. о-во, 1999. С. 236–237.

**21.** *Gardiner S. J.* Harmonic approximation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

**22.** *Gauthier P. M.* Uniform approximation // Complex Potential Theory. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1994. P. 235–271.

**23.** *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М.: Мир, 1986.

**24.** *Gautier P. M.* Subharmonic extensions and approximations // Canad. Math. Bull. 1994. V. 37, N 5. P. 46–53.

**25.** *Брело М.* Основы классической теории потенциала. М.: Мир, 1964.

**26.** *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.

**27.** *Hayman W. K.* Subharmonic functions. London: Acad. Press, 1989. V. II.

**28.** *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Мат. сб. 1979. Т. 108, № 2. С. 147–167.

**29.** *Азарин В. С.* Теория роста субгармонических функций: Текст лекций. Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1978.

**30.** *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. М.: Мир, 1986. Т. 1, 2.

**31.** *Брело М.* О топологиях и границах в теории потенциала. М.: Мир, 1974.

**32.** *Ransford T. J.* Potential theory in the complex plane. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

**33.** *Newman M. H. A.* Elements of the topology of plane of points. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1964.

**34.** *Bagby T., Gautier P. M.* Harmonic approximation on closed subsets of Riemannian manifolds // Complex potential theory. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1994. P. 75–89.

*Статья поступила 14 августа 2001 г.*

*Хабибуллин Булат Нурмиевич*
*Башкирский гос. университет, математический факультет,*
*ул. Фрунзе, 32, Уфа 450074,*
*Институт математики УНЦ РАН, ул. Чернышевского, 112, Уфа 450077*
khabib-bulat@mail.ru