Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 517.988

АППРОКСИМАЦИЯ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ЭВОЛЮЦИОННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

А. А. Толстоногов

Аннотация: В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается эволюционное включение с многозначным возмущением и с эволюционными операторами, являющимися субдифференциалами зависящей от времени собственной выпуклой полунепрерывной снизу функции. Наряду с исходным включением рассматривается последовательность аппроксимирующих эволюционных включений с тем же возмущением и с эволюционными операторами, которые являются субдифференциалами регуляризаций Моро — Иосиды исходной функции. Показано, что множество достижимости исходного включения, рассматриваемое как многозначная функция времени, является равномерным по времени пределом в метрике Хаусдорфа последовательности множеств достижимости аппроксимирующих включений. В качестве приложения рассмотрен пример управляемой системы с разрывной нелинейностью.

Ключевые слова: субдифференциал, регуляризация Моро — Иосиды, непрерывные селектор, крайняя точка, множество достижимости, разрывная нелинейность

§ 1. Постановка задачи

Пусть $T = [0,1]$ — отрезок числовой прямой $\mathbb{R}$ с мерой Лебега μ и с σ-алгеброй Σ μ-измеримых множеств. Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство H с нормой $\|\cdot\|$ и со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Функция $\varphi : H \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется *собственной*, если она не равна тождественно $+\infty$, т. е. если ее эффективная область $\operatorname{dom}\varphi = \{x \in H;\ \varphi(x) < +\infty\}$ непуста. Множество всех функций $\varphi : H \to \overline{\mathbb{R}}$, которые являются собственными, выпуклыми и полунепрерывными снизу, будем обозначать через $\Gamma_0(H)$. *Субдифференциалом $\partial\varphi(x)$ функции $\varphi \in \Gamma_0(H)$ в точке* $x \in H$ называется множество

$$\partial\varphi(x) = \{v \in H;\ \langle v, y - x\rangle \leq \varphi(y) - \varphi(x)\ \forall y \in H\}.$$

Известно [1], что $\partial\varphi(x)$ является максимально монотонным оператором, $\operatorname{dom}\partial\varphi = \{x \in H;\ \partial\varphi(x) \neq \varnothing\} \subset \operatorname{dom}\varphi$ и $\overline{\operatorname{dom}(\partial\varphi)} = \overline{\operatorname{dom}\varphi}$, где черта означает замыкание в H.

Для каждого $\lambda > 0$ *регуляризацией Моро — Иосиды функции* $\varphi \in \Gamma_0(H)$ называется функция

$$\varphi_\lambda(x) = \inf\{\varphi(y) + (1/2\lambda)\|y - x\|^2;\ y \in H\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант 2000–0015), РФФИ–ГФЕН Китая (грант 02–01–39006) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00203).

Функция φ_λ конечная, непрерывная и выпуклая, $\partial\varphi_\lambda$ — однозначная функция с $\operatorname{dom}\partial\varphi_\lambda = H$ для каждого $\lambda > 0$. Пусть $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, и $y : [0,1] \to \operatorname{dom}\varphi^0$ — непрерывная функция.

Рассмотрим эволюционное включение

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + F(t, x(t)), \quad x(0) = y(0) \in \operatorname{dom}\varphi^0, \tag{1.1}$$

где $F : T \times H \to H$ — многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями. Обычно функцию $F(t,x)$ называют *многозначным возмущением.*

Наряду с включением (1.1) рассмотрим включение

$$-\dot{x}_\lambda(t) \in \partial\varphi^t_\lambda(x_\lambda(t)) + F(t, x_\lambda(t)), \quad x_\lambda(0) = y(\lambda) \in \operatorname{dom}\varphi^0,\ \lambda \in (0,1]. \tag{1.2}$$

Под *решением включения* (1.1) понимается пара $(x(\cdot), f(\cdot))$, где $x : T \to H$, $x(0) = y(0)$, — абсолютно непрерывная функция, $f(\cdot) \in L^2(T,H)$, $x(t) \in \operatorname{dom}\partial\varphi^t$ почти всюду и имеют место включения

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + f(t) \quad \text{п. в.}, \tag{1.3}$$

$$f(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{п. в.} \tag{1.4}$$

Под *решением включения* (1.2) при $\lambda \in (0,1]$ понимается пара $(x_\lambda(\cdot), f_\lambda(\cdot))$, где $x_\lambda : T \to H$, $x_\lambda(0) = y(\lambda)$, — абсолютно непрерывная функция, $f_\lambda(\cdot) \in L^2(T,H)$ и

$$-\dot{x}_\lambda(t) = \partial\varphi^t_\lambda(x_\lambda(t)) + f_\lambda(\cdot) \quad \text{п. в.}, \tag{1.5}$$

$$f_\lambda(t) \in F(t, x_\lambda(t)) \quad \text{п. в.} \tag{1.6}$$

Множества всех решений включений (1.1) и (1.2) будем обозначать через $\mathscr{R}_F(y(0))$ и $\mathscr{R}^\lambda_F(y(\lambda))$ соответственно. Если $(x(\cdot), f(\cdot)) \in \mathscr{R}_F(y(0))$, то функция $x(\cdot)$, $x(0) = y(0)$, называется *траекторией включения* (1.1). Аналогично определяется траектория включения (1.2). Множество траекторий включений (1.1) и (1.2) будем обозначать через $\mathscr{T}r_F(y(0))$ и $\mathscr{T}r^\lambda_F(y(\lambda))$ соответственно.

Множеством достижимости включения (1.1) *из точки* $y(0)$ *в момент времени* $t \in T$ называется множество

$$\mathscr{A}_F(y(0))(t) = \{x(t);\ x(\cdot) \in \mathscr{T}r_F(y(0))\}, \quad t \in T.$$

Аналогично определяется множество достижимости включения (1.2):

$$\mathscr{A}^\lambda_F(y(\lambda)) = \{x_\lambda(t);\ x_\lambda(\cdot) \in \mathscr{T}r^\lambda_F(y(\lambda))\}, \quad t \in T,\ \lambda \in (0,1].$$

Тем самым будут определены многозначные отображения

$$t \to \mathscr{A}_F(y(0))(t), \quad t \to \mathscr{A}^\lambda_F(y(\lambda))(t), \quad \lambda \in (0,1].$$

Пусть $\operatorname{ext} F(t,x)$ — совокупность всех крайних точек множества $F(t,x)$. Из теоремы Крейна — Мильмана следует, что $\operatorname{ext} F(t,x) \neq \varnothing$ и $\operatorname{ext} F(t,x) \subset F(t,x)$. Наряду с включениями (1.1), (1.2) будем рассматривать включения

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + \operatorname{ext} F(t, x(t)) \text{ п. в.}, \quad x(0) = y(0) \in \operatorname{dom}\varphi^0, \tag{1.7}$$

$$-\dot{x}_\lambda(t) \in \partial\varphi^t_\lambda(x_\lambda(t)) + \operatorname{ext} F(t, x_\lambda(t)) \text{ п. в.}, \quad x_\lambda(0) = y(\lambda) \in \operatorname{dom}\varphi^0, \quad \lambda \in (0,1]. \tag{1.8}$$

Применительно к включениям (1.7), (1.8) мы будем использовать обозначения $\mathscr{R}_{\operatorname{ext} F}(y(0))$, $\mathscr{T}r_{\operatorname{ext} F}(y(0))$, $\mathscr{A}_{\operatorname{ext} F}(y(0))$ и $\mathscr{R}^\lambda_{\operatorname{ext} F}(y(\lambda))$, $\mathscr{T}r^\lambda_{\operatorname{ext} F}(y(\lambda))$, $\mathscr{A}^\lambda_{\operatorname{ext} F}(y(\lambda))$, $\lambda \in (0,1]$.

Нас будут интересовать взаимосвязи между множествами $\mathscr{R}_{\mathrm{ext}\,F}(y(0))$ и $\mathscr{R}_F(y(0))$, $\mathscr{R}^\lambda_{\mathrm{ext}\,F}(y(\lambda))$ и $\mathscr{R}^\lambda_F(y(\lambda))$ и сходимость множеств $\mathscr{T}r^\lambda_F(y(\lambda))$ к $\mathscr{T}r_F(y(0))$ при $\lambda \downarrow 0$. Как следствие будут получены взаимосвязи между множествами траектории и множествами достижимости. При естественных предположениях мы доказываем, что при $\lambda \downarrow 0$

$$\mathscr{A}^\lambda_F(y(\lambda))(t) \to \mathscr{A}_F(y(0))(t) \quad \text{равномерно по } t \in T \tag{1.9}$$

в метрике Хаусдорфа.

Необходимость изучения вопросов, затрагиваемых в работе, обусловлена прежде всего тем, что широкий класс управляемых систем с разрывными нелинейностями может быть записан в абстрактной форме в виде включения (1.1). Для таких систем актуальной является численная оценка множеств достижимости. Однако с точки зрения вычислительных процедур исследование систем с разрывными нелинейностями встречает принципиальные трудности. С другой стороны, используя подходящие однозначные аппроксимации для разрывных нелинейностей, мы можем построить аппроксимирующую последовательность управляемых систем, которые в абстрактной форме могут быть записаны в виде включения (1.2). Численная оценка множеств достижимости для аппроксимирующих систем уже не встречает принципиальных трудностей и может быть произведена с помощью хорошо разработанных методов и подходов. Зная оценки множеств достижимости аппроксимирующих систем и используя (1.9), мы можем дать гарантированные оценки множеств достижимости исходной управляемой системы с разрывными нелинейностями.

§ 2. Основные обозначения, определения и предварительные сведения

Пусть X — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Всюду в дальнейшем мы используем следующие обозначения: $\mathrm{cb}\,X$ — семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из X, $\mathrm{comp}\,X$ — совокупность всех компактных подмножеств из X, $\mathrm{conv}\,X$ — совокупность всех выпуклых компактных подмножеств из X. Для множества $A \subset X$ через $\mathrm{co}\,A$ обозначается выпуклая оболочка A, а через $\overline{\mathrm{co}}\,A$ — замкнутая выпуклая оболочка A.

На множестве $\mathrm{cb}\,X$ определим метрику Хаусдорфа

$$D(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\},$$

$A, B \in \mathrm{cb}\,X$. Всюду в дальнейшем мы считаем, что пространства $\mathrm{cb}\,X$, $\mathrm{comp}\,X$ и $\mathrm{conv}\,X$ наделены метрикой Хаусдорфа.

Отображение $F : X \to \mathrm{cb}\,X$ называется *полунепрерывным снизу по Вьеторису*, если для любого открытого множества $U \subset X$ множество $F^{-1}(U) = \{x \in X; F(x) \cap U \neq \varnothing\}$ открыто.

Отображение $F : X \to \mathrm{cb}\,X$ называется *полунепрерывным сверху по Вьеторису*, если для любого замкнутого множества $V \subset X$ множество $F^{-1}(V)$ замкнуто.

Отображение $F : X \to \mathrm{cb}\,X$ называется *непрерывным по Вьеторису*, если оно одновременно полунепрерывно снизу и сверху по Вьеторису.

Отображение $F : X \to \mathrm{cb}\,X$ называется *непрерывным по Хаусдорфу*, если оно непрерывно в метрике Хаусдорфа на пространстве $\mathrm{cb}\,X$. Хорошо известно, что для отображения $F : X \to \mathrm{comp}\,X$ понятия непрерывности по Вьеторису и Хаусдорфу совпадают.

Для пространства X символ ω-X означает, что X наделено слабой $\sigma(X, X^*)$ топологией [2]. Такое же обозначение мы используем и для подмножеств из X. Во всех остальных случаях считаем, что X и его подмножества наделены сильной (нормированной) топологией.

Через $C(T, X)$ ($C(T, \omega\text{-}X)$) мы обозначаем пространство всех непрерывных отображений из T в X (из T в ω-X) с топологией равномерной сходимости на T. Под $\mathscr{M}(X)$ мы понимаем совокупность всех измеримых функций из T в X.

Многозначное отображение $F : T \to \operatorname{cb} X$ называется *измеримым*, если $F^{-1}(V) = \{t \in T;\ F(t) \cap V \neq \varnothing\} \in \Sigma$ для любого замкнутого множества $V \subset X$.

Множество $K \subset L^2(T, X)$ называется *равномерно интегрируемым с квадратом*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int\limits_E \|f(t)\|^2 dt < \varepsilon$$

для любого $E \in \Sigma$ с $\mu(E) < \delta$ и для любого $f(\cdot) \in K$.

На пространстве $L^2(T, H)$ наряду со стандартной нормой рассмотрим другую норму:

$$\|f(\cdot)\|_\omega = \sup_{0 \le t \le t' \le 1} \left\| \int\limits_t^{t'} f(t)\, dt \right\|. \tag{2.1}$$

Пространство $L^2(T, H)$ с нормой (2.1) будем обозначать через $L^2_\omega(T, H)$.

В дальнейшем нам понадобится простой факт, касающийся этой нормы.

Лемма 2.1. *Если последовательность $f_n(\cdot) \in L^2(T, H)$, $n \ge 1$, ограничена в $L^2(T, H)$ и сходится к $f(\cdot)$ в $L^2_\omega(T, H)$, то $f_n(\cdot)$ сходится к $f(\cdot)$ в ω-$L^2(T, H)$.*

Пусть $\varphi \in \Gamma_0(H)$. Поскольку $\partial\varphi$ является максимально монотонным оператором, для любого $\lambda \in (0, 1]$ будет определен однозначный оператор $J_\lambda = (I + \lambda\partial\varphi)^{-1}$, где I — тождественный оператор на H. Оператор J_λ называется *резольвентой* $\partial\varphi$. Положим

$$(\partial\varphi)_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda).$$

Следующие факты хорошо известны [1, 3].

1. Функция $\varphi_\lambda(x)$, $\lambda \in (0, 1]$, дифференцируема по Фреше, и ее производная по Фреше равна $\partial\varphi_\lambda$; функция $\partial\varphi_\lambda$ является липшицевой с константой Липшица, равной $1/\lambda$ и

$$\partial\varphi_\lambda = (\partial\varphi)_\lambda.$$

2. Для любых $\lambda \in (0, 1]$ выполнено неравенство

$$\varphi_\lambda(x) \le \varphi(x), \quad x \in H. \tag{2.2}$$

Рассмотрим семейство функций $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$. Всюду в дальнейшем считаем, что для этого семейства выполняется гипотеза $H(\varphi)$ [3]: для каждого $r \ge 0$ существуют абсолютно непрерывные функции $a_r, b_r : T \to \mathbb{R}^+$ такие, что $\dot{b}(\cdot) \in L^2(T, \mathbb{R})$ и для любых $s, t \in T$, $s \le t$, и любого $x \in \operatorname{dom}\varphi^s$ с $\|x\| \le r$ найдется элемент $y \in \operatorname{dom}\varphi^t$, удовлетворяющий неравенствам

$$\|x - y\| \le |a_r(t) - a_r(s)| \cdot (|\varphi^s(x)|^{1/2} + 1),$$

$$\varphi^t(y) - \varphi^s(x) \le |b_r(t) - b_r(s)| \cdot (|\varphi^s(x)| + 1).$$

Лемма 2.2. *Пусть выполняется гипотеза $H(\varphi)$. Тогда существует константа $K_1 > 0$ такая, что*

а) *выполнены неравенства*

$$\varphi^t_\lambda(x) \geq -K_1(\|x\| + 1), \quad t \in T,\ \lambda \in (0,1],\ x \in H; \tag{2.3}$$

б) *выполнены неравенства*

$$\left\|J^t_\lambda(x)\right\| \leq \|x\| + K_1, \quad t \in T,\ \lambda \in (0,1],\ x \in H; \tag{2.4}$$

в) *функции $t \to \partial\varphi^t_\lambda(x)$, $t \to \varphi^t_\lambda(x)$ измеримы.*

Утверждения леммы хорошо известны. Их доказательства можно найти, например, в [3].

Рассмотрим включение

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + f(t) \tag{2.5}$$

и уравнение

$$-\dot{x}_\lambda(t) = \partial\varphi^t_\lambda(x_\lambda(t)) + f(t), \quad \lambda \in (0,1]. \tag{2.6}$$

Пусть $f(\cdot) \in L^2(T,H)$ и $x_0 \in \operatorname{dom}\varphi^0$. *Сильным решением включения* (2.5) называется абсолютно непрерывная функция $x : T \to H$, $x(0) = x_0$, такая, что $x(t) \in \operatorname{dom}\partial\varphi^t$ п. в., которая удовлетворяет включению (2.5) п. в. Аналогично определяется решение уравнения (2.6). Подытоживая результаты § 1.3, 1.4 из работы [3], мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть выполняется гипотеза $H(\varphi)$. Тогда для любых $x_0 \in \operatorname{dom}\varphi^0$, $f(\cdot) \in L^2(T,H)$ включение (2.5) и уравнение (2.6) имеют единственные сильные решения $x(\cdot)$, $x_\lambda(\cdot)$, $x(0) = x_\lambda(0) = x_0$, такие, что $\dot{x}(\cdot)$, $\dot{x}_\lambda(\cdot) \in L^2(T,H)$ и существует константа $N > 0$, зависящая только от x_0 и $f(\cdot)$, при которой имеют место неравенства*

$$\|x(\cdot)\|_{C(T,H)} \leq N, \quad \|x_\lambda(\cdot)\|_{C(T,H)} \leq N, \quad \lambda \in (0,1], \tag{2.7}$$

$$\|\dot{x}(\cdot)\|_{L^2(T,H)} \leq N, \quad \|\dot{x}_\lambda(\cdot)\|_{L^2(T,H)} \leq N, \quad \lambda \in (0,1], \tag{2.8}$$

$$|\varphi^t(x(t))| \leq N, \quad |\varphi^t_\lambda(x_\lambda(t))| \leq N, \quad t \in T,\ \lambda \in (0,1]. \tag{2.9}$$

При $\lambda \downarrow 0$

$$x_\lambda(\cdot) \to x(\cdot) \quad \text{в } C(T,H), \tag{2.10}$$

$$\dot{x}_\lambda(\cdot) \to \dot{x}(\cdot) \quad \text{в } L^2(T,H), \tag{2.11}$$

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \varphi^t_\lambda(x_\lambda(t)) = \varphi^t(x(t)) \quad \text{п. в.} \tag{2.12}$$

Введем следующие допущения относительно отображения $F : T \times H \to \operatorname{conv} H$.

Предположение $H(F)$. *Отображение $F(t,x)$ таково, что*

(1) *отображение $t \to F(t,x)$ измеримо для каждого $x \in H$;*

(2) *отображение $x \to F(t,x)$ непрерывно при почти каждом t, и для каждого ограниченного множества $B \subset H$ множество $F(t,B)$ относительно компактно;*

(3) *для почти всех $t \in T$*

$$\|F(t,x)\| = \sup\{\|v\|;\ v \in F(t,x)\} \leq a(t) + b(t)\|x\|,\ x \in H,\ a(\cdot), b(\cdot) \in L^2(T,\mathbb{R}^+); \tag{2.13}$$

(4) *выполнено неравенство*

$$D(F(t,x), F(t,y)) \leq k(t)\|x - y\| \tag{2.14}$$

при почти всех $t \in T$ и $k(\cdot) \in L^2(T,\mathbb{R}^+)$.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, мы считаем, что имеют место гипотезы $H(F)$(1)–(3).

§ 3. Априорные оценки

Пусть $\mathscr{L} : [0,1] \times \operatorname{dom}\varphi^0 \times L^2(T,H) \to C(T,H)$ — оператор, который каждому $\lambda \in (0,1]$, $x_0 \in \operatorname{dom}\varphi^0$, $f \in L^2(T,H)$ ставит в соответствие единственное сильное решение $x_\lambda(x_0,f)$, $x_\lambda(x_0,f)(0) = x_0$ уравнения (2.6), а при $\lambda = 0$ — единственное сильное решение $x(x_0,f)$, $x(x_0,f)(0) = x_0$ включения (2.5).

Лемма 3.1. *Для любых* $\lambda \in [0,1]$, $x_0, x_1 \in \operatorname{dom}\varphi^0$, $f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in L^2(T,H)$ *имеет место неравенство*

$$\|\mathscr{L}(\lambda,x_0,f_0)(t) - \mathscr{L}(\lambda,x_1,f_1)(t)\| \le \|x_0 - x_1\| + \int_0^t \|f_0(s) - f_1(s)\|\,ds, \quad t \in T; \tag{3.1}$$

оператор $\mathscr{L}(\lambda,x,f)$ *является непрерывным из* $[0,1]\times\operatorname{dom}\varphi^0\times L^2(T,H)$ *в* $C^2(T,H)$ *в любой точке* $(0,x_0,f_0)$, $x_0 \in \operatorname{dom}\varphi^0$, $f_0 \in L^2(T,H)$.

Доказательство. Пусть $\lambda = 0$. Используя определение сильного решения включения (2.5) и монотонность оператора $\partial\varphi^t$, получим

$$\begin{aligned}\langle \dot{x}(x_1,f_1)(t) - \dot{x}(x_0,f_0)(t), x(x_1,f_1)(t) - x(x_0,f_0)(t)\rangle \\ \le \langle f_0(t) - f_1(t), x(x_1,f_1)(t) - x(x_0,f_0)(t)\rangle.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Из этого неравенства вытекает

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|x(x_1,f_1)(t) - x(x_0,f_0)(t)\|^2 \le \frac{1}{2}\|x_0 - x_1\|^2 \\ + \int_0^t \|f_0(s) - f_1(s)\| \cdot \|x(x_1,f_1)(s) - x(x_0,f_0)(s)\|\,ds.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Воспользовавшись неравенством (3.3) и леммой A5 в [1, с. 157], получим

$$\|x(x_1,f_1)(t) - x(x_0,f_0)(t)\| \le \|x_0 - x_1\| + \int_0^t \|f_0(s) - f_1(s)\|\,ds.$$

Тем самым неравенство (3.1) при $\lambda = 0$ доказано. При $\lambda \ne 0$ неравенство (3.1) доказывается аналогично с использованием монотонности оператора $\partial\varphi^t_\lambda$.

Пусть $x_0 \in \operatorname{dom}\varphi^0$, $f_0 \in L^2(T,H)$, последовательность $\lambda_n \in (0,1]$, $n \ge 1$, сходится к 0, последовательность $x_n \in \operatorname{dom}\varphi^0$, $n \ge 1$, сходится к x_0 и последовательность $f_n \in L^2(T,H)$, $n \ge 1$, сходится к f_0 в $L^2(T,H)$. Тогда

$$\begin{aligned}&\|\mathscr{L}(\lambda_n,x_n,f_n) - \mathscr{L}(0,x_0,f_0)\|_{C(T,H)} \\ &\le \|\mathscr{L}(\lambda_n,x_n,f_n) - \mathscr{L}(\lambda_n,x_0,f_0)\|_{C(T,H)} + \|\mathscr{L}(\lambda_n,x_0,f_0) - \mathscr{L}(0,x_0,f_0)\|_{C(T,H)}.\end{aligned}$$

Из этого неравенства, (3.1) и теоремы 2.1 вытекает, что

$$\lim_{\lambda_n\to 0} \|\mathscr{L}(\lambda_n,x_n,f_n) - \mathscr{L}(0,x_0,f_0)\|_{C(T,H)} = 0.$$

Лемма доказана.

Пусть $M_1 > 0$, $y_0 \in \operatorname{dom}\varphi^0$ и $\varphi^0(y_0) \le M_1$. Возьмем произвольную последовательность y_n, $n \ge 1$, $\operatorname{dom}\varphi^0(y_n) \le M_1$, сходящуюся к y_0, и последовательность

$\lambda_n \in (0,1]$, $n \geq 1$, сходящуюся к 0. Положим $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $n \geq 0$, $\lambda_0 = 0$, и определим функцию $y : \Lambda \to \operatorname{dom} \varphi^0$, полагая $y(\lambda_n) = y_n$, $n \geq 0$. Тогда $y(\lambda)$ является непрерывной функцией на компактном множестве Λ и

$$\varphi^0(y(\lambda)) \leq M_1, \quad \lambda \in \Lambda. \tag{3.4}$$

Для единообразия обозначений функции φ^t будем приписывать индекс $\lambda = 0$, т. е. $\varphi^t = \varphi^t_0$. В этих обозначениях включение (1.1) будет записываться как включение (1.2) при $\lambda = 0$, а уравнение (2.6) при $\lambda = 0$ будет рассматриваться как включение (2.5). В этих обозначениях множество $\mathscr{R}^\lambda_F(y(\lambda))$ при $\lambda = 0$ переходит в множество $\mathscr{R}_F(y(0))$. Если $(x_\lambda(\cdot), f(\cdot)) \in \mathscr{R}^\lambda_F(y(\lambda))$, $\lambda \in \Lambda$, то функция $x_\lambda(\cdot)$, $x_\lambda(0) = y(\lambda)$, при $\lambda = 0$ является сильным решением включения (2.5), а при $\lambda \neq 0$ — решением уравнения (2.6). Чтобы не вводить новых обозначений, будем обозначать траектории включений (1.1), (1.2) и решения включения (2.5) и уравнения (2.6) через $x_\lambda(y(\lambda), f)$, $\lambda \in \Lambda$, подчеркивая зависимость траекторий от $y(\lambda)$ и f.

Лемма 3.2. *Существует $M_2 > 0$ такое, что для любого $(x_\lambda(y(\lambda), f), f) \in \mathscr{R}^\lambda_F(y(\lambda))$, $\lambda \in \Lambda$, имеют место неравенства*

$$\|x_\lambda(y(\lambda), f)(t)\| \leq M_2 + \int_0^t (a(s) + b(s)\|x_\lambda(y(\lambda), f)(s)\|)\, ds, \quad t \in T, \tag{3.5}$$

и

$$\|\mathscr{L}(\lambda, y(\lambda), 0)\|_{C(T,H)} \leq M_2. \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $(x_\lambda(y(\lambda), f), f) \in \mathscr{R}^\lambda_F(y(\lambda))$. Тогда $x_\lambda(y(\lambda), f)) = \mathscr{L}(\lambda,\, y(\lambda), f)$, $\lambda \in \Lambda$. Воспользовавшись неравенством (3.1), получим

$$\|x_\lambda(y(\lambda), f)(t)\| \leq \|\mathscr{L}(\lambda, y(\lambda), 0)(t)\| + \int_0^t \|f(s)\|\, ds. \tag{3.7}$$

Функция $\lambda \to y(\lambda)$ непрерывна на Λ, оператор $\lambda \to \mathscr{L}(\lambda, y(\lambda), 0)$ согласно лемме 3.1 непрерывен в точке $(0, y(0), 0)$. Воспользовавшись определениями множества Λ и функции $y(\lambda)$, получим, что существует константа $M_2 > 0$, при которой имеет место неравенство (3.6). Теперь неравенство (3.5) вытекает из неравенств (2.13), (3.6), (3.7). Лемма доказана.

Из (3.5) и леммы Беллмана — Гронуолла следует, что существует константа $M > 0$ такая, что

$$M_2 \leq M, \tag{3.8}$$

$$\|x_\lambda(y(\lambda), f)(t)\| \leq M, \quad t \in T, \tag{3.9}$$

для любого $(x_\lambda(y(\lambda), f), f) \in \mathscr{R}^\lambda_F(y(\lambda))$, $\lambda \in \Lambda$.

Пусть

$$B = \{x \in H;\ \|x\| \leq M\} \tag{3.10}$$

и

$$G(t) = \overline{\operatorname{co}}\, F(t, B), \quad t \in T. \tag{3.11}$$

Из гипотезы $H(F)(2)$ следует, что $t \to G(t)$ является многозначным отображением с выпуклыми компактными значениями. Обозначим через $\operatorname{pr} : H \to B$ оператор проектирования на множество B, который каждой точке $x \in H$ ставит в соответствие единственную точку $\operatorname{pr} x \in B$ такую, что $\|\operatorname{pr} x - x\| = \min\{\|y - x\|;\ y \in B\}$. Хорошо известно, что

$$\|\operatorname{pr} x - \operatorname{pr} y\| \leq \|x - y\|. \tag{3.12}$$

Рассмотрим отображение $\widetilde{F} : T \times H \to \operatorname{conv} H$, определенное по правилу $\widetilde{F}(t,x) = F(t, \operatorname{pr} x)$. Из (3.12) вытекает, что отображение $\widetilde{F}(t,x)$ наследует все свойства отображения $F(t,x)$, приведенные в предположении $H(F)$. В частности,

$$\|\widetilde{F}(t,x)\| \le a(t) + b(t)\|x\| \quad \text{п. в.}, \quad x \in H, \tag{3.13}$$

$$\|\widetilde{F}(t,x)\| \le a(t) + b(t)M \quad \text{п. в.}, \quad x \in H, \tag{3.14}$$

и

$$\widetilde{F}(t,x) \subset G(t) \quad \text{п. в.}, \quad x \in H. \tag{3.15}$$

Если мы рассмотрим включения (1.1), (1.2) с $F(t,x)$, замененным на $\widetilde{F}(t,x)$, то из (3.13) следует, что оценка (3.9) останется той же самой и для решений включений с возмущением $\widetilde{F}(t,x)$. Тем самым $(x_\lambda(y(\lambda),f),f) \in \mathscr{R}_F^\lambda(y(\lambda))$ тогда и только тогда, когда $(x_\lambda(y(\lambda),f),f) \in \mathscr{R}_{\widetilde{F}}^\lambda(y(\lambda))$, $\lambda \in \Lambda$. Поэтому всюду в дальнейшем, не нарушая общности и не оговаривая специально, будем считать, что для отображения $F(t,x)$ имеют место соотношения

$$\|F(t,x)\| \le a(t) + b(t)M \quad \text{п. в.}, \quad x \in H, \tag{3.16}$$

$$F(t,x) \subset G(t) \quad \text{п. в.}, \quad x \in H. \tag{3.17}$$

Пусть x_n, $n \ge 1$, — счетное плотное подмножество множества B. Поскольку отображение $t \to F(t,x)$ измеримо, согласно теореме 5.6 в [4] для каждого $n \ge 1$ существует последовательность $f_n^k(t)$, $k \ge 1$, измеримых селекторов отображения $F(t,x_n)$ такая, что

$$F(t,x_n) = \overline{\bigcup_{k\ge1} f_n^k(t)}, \quad t \in T,$$

где черта означает замыкание в H. Используя непрерывность отображения $x \to F(t,x)$, получим, что

$$\overline{F(t,B)} = \overline{\bigcup_{n\ge1}\bigcup_{k\ge1} f_n^k(t)}, \quad t \in T.$$

Поэтому в соответствии с теоремой 5.6 из [4] отображение $t \to \overline{F(t,B)}$ измеримо. Таковым является и отображение $t \to G(t,x) = \overline{\operatorname{co}}\, F(t,B) = \overline{\operatorname{co}}\, \overline{F(t,B)}$.

Обозначим через S_G множество

$$S_G = \{f \in \mathscr{M}(H);\ f(t) \in G(t) \text{ п. в.}\}. \tag{3.18}$$

Из (3.16) следует, что для любого $f(\cdot) \in S_G$ имеет место неравенство

$$\|f(t)\| \le a(t) + b(t)M \quad \text{п. в.} \tag{3.19}$$

Поэтому S_G является выпуклым компактным подмножеством пространства ω-$L^2(T,H)$.

Пусть

$$\mathscr{R}_G(\lambda) = \{x_\lambda(y(\lambda),f) = \mathscr{L}(\lambda, y(\lambda), f);\ f \in S_G\}, \quad \lambda \in \Lambda. \tag{3.20}$$

Воспользовавшись (3.6), (3.7) и (3.19), получим, что

$$\|x_\lambda(y(\lambda),f)(t)\| \le M_2 + \int_0^t (a(s) + b(s)M)\, ds = C, \quad t \in T,\ \lambda \in \Lambda. \tag{3.21}$$

Лемма 3.3. *Для любого $\lambda \in \Lambda$ и любого $x_\lambda(y(\lambda), f) \in \mathscr{R}_G(\lambda)$ имеет место неравенство*

$$\varphi^t_\lambda(x_\lambda(y(\lambda), f)(t)) + \frac{1}{2}\int_0^t \|\dot{x}_\lambda(y(\lambda), f)(s)\|^2\, ds \le \varphi^0_\lambda(y(\lambda))$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \|f(s)\|^2\, ds + \int_0^t (|\dot{a}_{r_*}(s)|^2 + |\dot{b}_{r_*}(s)|)(|\varphi^s_\lambda(x_\lambda(y(\lambda), f)(s))| + 1)\, ds, \quad (3.22)$$

где

$$r_* = K_1 + C + 1 \quad (3.23)$$

и $K_1 > 0$ и $C > 0$ — константы из неравенств (2.4) *и* (3.21).

Доказательство. Пусть $x_\lambda(f)$, $x_\lambda(f)(0) = x_0 \in \operatorname{dom}\varphi^0$, $\lambda \in (0, 1]$, — решение уравнения (2.6). Тогда согласно лемме 2.2 из [5] справедливо неравенство

$$\varphi^t(x_\lambda(f)(t)) + \int_0^t \langle \dot{x}_\lambda(f)(s), \dot{x}_\lambda(f)(s) + f(s)\rangle\, ds$$

$$\le \varphi^0_\lambda(x_0) + \int_0^t \Bigg\{ |\dot{a}_r(s)| \cdot \|\dot{x}_\lambda(f)(s) + f(s)\| \cdot \left(\left|\varphi^s_\lambda(x_\lambda(f)(s))\right|^{1/2} + 1\right) ds$$

$$+ \int_0^t |\dot{b}_r(s)| \cdot \left(\left|\varphi^s_\lambda(x_\lambda(f)(s))\right| + 1\right) \Bigg\}\, ds \quad (3.24)$$

с

$$r \ge \sup\left\{\left\|J^t_\mu x_\lambda(f)(t)\right\|;\ t \in T,\ \mu \in (0, 1]\right\}. \quad (3.25)$$

Воспользовавшись неравенством $|c| \cdot |d| \le \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}d^2$ применительно к первому интегральному члену в правой части неравенства (3.24) и соотношениями (2.4), (3.25), получим

$$\varphi^t_\lambda(x_\lambda(f)(t)) + \frac{1}{2}\int_0^t \|\dot{x}_\lambda(f)(s)\|^2\, ds \le \varphi^0_\lambda(x_0)$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \|f(s)\|^2\, ds + \int_0^t (|\dot{a}_r(s)|^2 + |\dot{b}_r(s)|) \cdot \left(\left|\varphi^s_\lambda(x_\lambda(f)(s))\right| + 1\right) ds \quad (3.26)$$

с

$$r \ge \|x_\lambda(f)\|_{C(T,H)} + K_1. \quad (3.27)$$

Согласно теореме 2.1 в неравенстве (3.27) мы можем перейти к пределу при $\lambda \to 0$. Но при достаточно малых $\lambda > 0$ будет иметь место неравенство $1 + \|x(f)\|_{C(T,H)} \ge \|x_\lambda(f)\|_{C(T,H)}$. Поэтому неравенство (3.26) будет выполняться при $\lambda = 0$ с

$$r \ge \|x(f)\|_{C(T,H)} + 1 + K_1. \quad (3.28)$$

Воспользовавшись (3.26)–(3.28) применительно к $x_\lambda(y(\lambda), f)$, $\lambda \in \Lambda$, придем к неравенствам (3.22), (3.23). Лемма доказана.

Обозначим через $\mathscr{R}_G$ множество

$$\mathscr{R}_G = \{\cup \mathscr{R}_G(\lambda);\ \lambda \in \Lambda\}, \quad (3.29)$$

и пусть

$$B_C = \{x \in H;\ \|x\| \le C\}, \quad (3.30)$$

где $C > 0$ — константа из неравенства (3.21).

Лемма 3.4. *Множество $\mathscr{R}_G$ является равностепенно непрерывным подмножеством пространства $C(T,H)$.*

Доказательство. Из неравенств (2.2), (2.3) следует, что для любого $x_\lambda(y(\lambda),f) \in \mathscr{R}_G$, $\lambda \in \Lambda$, $f \in S_G$, справедливо неравенство

$$\left|\varphi_\lambda^t(x_\lambda(y(\lambda),f)(t))\right| \le \varphi^t(x_\lambda(y(\lambda),f)(t)) + 2K_1(\|x_\lambda(y(\lambda),f)(t)\|+1),\ t \in T. \quad (3.31)$$

Воспользовавшись неравенствами (3.22), (3.31), (3.21), (3.4), получим

$$\left|\varphi_\lambda^t(x_\lambda(y(\lambda),f)(t))\right| + \frac{1}{2}\int_0^t \|\dot{x}_\lambda(y(\lambda),f)(s)\|^2\,ds \le M_1 + 2K_1(C+1)$$

$$+\int_0^t \frac{1}{2}\|f(s)\|^2\,ds + \int_0^t (|\dot{a}_{r_*}(s)|^2 + |\dot{b}_{r_*}(s)|)\cdot\left(\left|\varphi_\lambda^s(x_\lambda(y(\lambda),f)(t))\right|+1\right)ds, \quad (3.32)$$

$t \in T$, $\lambda \in \Lambda$. Из этого неравенства, (3.19) и неравенства Беллмана — Гроноулла вытекает, что существует константа $A > 0$ такая, что

$$\left|\varphi_\lambda^t(x_\lambda(y(\lambda),f)(t))\right| \le A, \quad t \in T,\ \lambda \in \Lambda,\ f \in S_G.$$

Из последнего неравенства, (3.32) и (3.19) следует, что

$$\int_T \|\dot{x}_\lambda(y(\lambda),f)(t)\|^2 dt \le R^2, \quad \lambda \in \Lambda,\ f \in S_G, \quad (3.33)$$

при некоторой константе $R > 0$. Из (3.33) и неравенства Гёльдера получаем, что

$$\|x_\lambda(y(\lambda),f)(t) - x_\lambda(y(\lambda),f)(s)\| \le \left|\int_s^t \|\dot{x}_\lambda(y(\lambda),f)(\tau)\|\,d\tau\right| \le |t-s|^{1/2}\cdot R,$$

$\lambda \in \Lambda$, $f \in S_G$. Тем самым множество $\mathscr{R}_G$ равностепенно непрерывно в $C(T,H)$. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Оператор $(\lambda,f) \to \mathscr{L}(\lambda,y(\lambda),f)$ является непрерывным из $\Lambda \times \omega\text{-}S_G$ в $C(T,H)$.*

Доказательство. Так как множество $\omega\text{-}S_G$ — метризуемый компакт в $\omega\text{-}L^2(T,H)$, нам достаточно доказать секвенциальную непрерывность оператора $(\lambda,f) \to \mathscr{L}(\lambda,y(\lambda),f)$. Вначале покажем, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ оператор $f \to \mathscr{L}(\lambda,y(\lambda),f)$ непрерывен из $\omega\text{-}S_G$ в $C(T,H)$. Пусть $\lambda \in \Lambda$ и последовательность $f_n \in S_G, n \ge 1$, сходится к f_* в топологии пространства $\omega\text{-}L^2(T,H)$. Воспользовавшись монотонностью оператора $\partial\varphi_\lambda^t$, получим

$$\langle x_\lambda(y(\lambda),f_n)(t) - x_\lambda(y(\lambda),f_*)(t), \dot{x}_\lambda(y(\lambda),f_n)(t) - \dot{x}_\lambda(y(\lambda),f_n)(t)\rangle$$
$$\le \langle x_\lambda(y(\lambda),f_n)(t) - x_\lambda(y(\lambda),f_*)(t), f_*(t) - f_n(t)\rangle. \quad (3.34)$$

Из неравенства (3.21) следует, что

$$x_\lambda(y(\lambda),f_n)(t) \in B_C,\ t \in T,\ n \ge 1, \text{ и } x_\lambda(y(\lambda),f_n) \in \mathscr{R}_G.$$

Согласно лемме 3.4 последовательность $x_\lambda(y(\lambda),f_n)$, $n \ge 1$, равностепенно непрерывна в $C(T,H)$. Поэтому последовательность $x_\lambda(y(\lambda),f_n)$, $n \ge 1$, относительно компактна в пространстве $C(T,\omega\text{-}H)$. Поскольку множество $C(T,\omega\text{-}B_C)$ является метризуемым подмножеством в $C(T,\omega\text{-}H)$, существует подпоследовательность $x_\lambda(y(\lambda),f_{n_k})$, $k\geq 1$, последовательности $x_\lambda(y(\lambda),f_n)$, $n\geq 1$, сходящаяся в топологии пространства $C(T,\omega\text{-}H)$ к некоторому элементу $z(\cdot)\in C(T,\omega\text{-}B_C)$. Очевидно, что $z(\cdot)\in L^2(T,H)$. Так как $f_*(t),f_n(t)\in G(t)$, $n\geq 1$, и при каждом $t\in T$ множество $G(t)$ является компактом в H, то

$$\lim_{k\to\infty}|\langle x_\lambda(y(\lambda),f_{n_k})(t)-z(t),f_*(t)-f_{n_k}(t)\rangle|=0, \tag{3.35}$$

$t\in T$. Из (3.35) и (3.19) вытекает, что

$$|\langle x_\lambda(y(\lambda),f_{n_k})(t)-z(t),f_*(t)-f_{n_k}(t)\rangle|\leq 4C(a(t)+b(t)M). \tag{3.36}$$

Воспользовавшись (3.35), (3.36) и теоремой Лебега об ограниченной сходимости, получаем

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_T|\langle x_\lambda(y(\lambda),f_{n_k})(t)-z(t),f_*(t)-f_{n_k}(t)\rangle|\,dt=0. \tag{3.37}$$

Поскольку $f_{n_k}\to f_*$ в $\omega\text{-}L^2(T,H)$, имеем

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_0^t\langle z(s),f_*(s)-f_{n_k}(s)\rangle\,ds=0,\quad t\in T. \tag{3.38}$$

Из (3.34), (3.37) и (3.38) следует, что

$$x_\lambda(y(\lambda),f_{n_k})(t)\to x_\lambda(y(\lambda),f_*)(t)\quad\text{в } H,\quad t\in T. \tag{3.39}$$

На каждом равностепенно непрерывном множестве топология поточечной сходимости на компактном множестве T совпадает с топологией равномерной сходимости [6], тем самым в соответствии с (3.39) $x_\lambda(y(\lambda),f_{n_k})\to x_\lambda(y(\lambda),f_*)$ в $C(T,H)$. Если мы предположим, что сама последовательность $x_\lambda(y(\lambda),f_n)$ не сходится к $x_\lambda(y(\lambda),f_*)$, то существует подпоследовательность $x_\lambda(y(\lambda),f_{n_k})$, $k\geq 1$, последовательности $x_\lambda(y(\lambda),f_n)$, $n\geq 1$, такая, что любая подпоследовательность последовательности $x_\lambda(y(\lambda),f_{n_k})$, $k\geq 1$, не сходится к $x_\lambda(y(\lambda),f_*)$. Повторяя рассуждения, приведенные выше, к последовательности $x_\lambda(y(\lambda),f_{n_k})$, $k\geq 1$, придем к противоречию. Тем самым оператор $f\to\mathscr{L}(\lambda,y(\lambda),f)$ непрерывен из $\omega\text{-}S_G$ в $C(T,H)$.

Докажем теперь непрерывность оператора $(\lambda,f)\to\mathscr{L}(\lambda,y(\lambda),f)$ из $\Lambda\times\omega\text{-}S_G$ в $C(T,H)$. Так как множество Λ имеет единственную предельную точку $\lambda=0$, на основании доказанного выше нам нужно рассмотреть только случай, когда $\lambda_n\to 0$, $\lambda\in\Lambda$ и последовательность $f_n\in S_G$, $n\geq 1$, сходится к f_* в $\omega\text{-}L^2(T,H)$. В этом случае

$$\begin{aligned}\|\mathscr{L}(0,y(0),f_*)&-\mathscr{L}(\lambda_n,y(\lambda_n),f_n)\|_{C(T,H)}\\&\leq\|\mathscr{L}(\lambda_n,y(\lambda_n),f_n)-\mathscr{L}(\lambda_n,y(\lambda_n),f_*)\|_{C(T,H)}\\&\quad+\|\mathscr{L}(\lambda_n,y(\lambda_n),f_*)-\mathscr{L}(\lambda_n,y(0),f_*)\|_{C(T,H)}\\&\qquad+\|\mathscr{L}(\lambda_n,y(0),f_*)-\mathscr{L}(0,y(0),f_*)\|_{C(T,H)}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Воспользовавшись теоремой 2.1, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathscr{L}(\lambda_n,y(0),f_*)-\mathscr{L}(0,y(0),f_*)\|_{C(T,H)}=0. \tag{3.41}$$

В соответствии с неравенством (3.1)

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathscr{L}(\lambda_n,y(\lambda_n),f_*)-\mathscr{L}(\lambda_n,y(0),f_*)\|_{C(T,H)}\le\lim_{n\to\infty}\|y(\lambda_n)-y(0)\|=0. \quad (3.42)$$

Согласно лемме 3.4 последовательность $x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_n)-x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_*)$, $n\ge 1$, равностепенно непрерывна в $C(T,H)$ и

$$\|x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_n)(t)-x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_*)(t)\|\le 2C, \quad t\in T,\ n\ge 1.$$

Поэтому из последовательности $x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_n)-x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_*)(t)$, $n\ge 1$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в пространстве $C(T,\omega\text{-}H)$ к некоторому элементу $z(\cdot)\in C(T,\omega\text{-}H)$. Как показано выше, не нарушая общности, мы можем считать, что сама последовательность $x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_n)-x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_*)$ сходится в $C(T,\omega\text{-}H)$ к $z(\cdot)$.

С помощью тех же аргументов, которые использовались при доказательстве соотношений (3.37), (3.38), получаем

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_T|\langle x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_n)(t)-x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_*)(t)-z(t),f_*(t)-f_n(t)\rangle|dt=0, \quad (3.43)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^t\langle z(s),f_*(s)-f_n(s)\rangle\,ds=0. \quad (3.44)$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&\|x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_n)(t)-x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_*)(t)\|^2\\&\le\int\limits_0^t\langle x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_n)(s)-x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_*)(s),f_*(s)-f_n(s)\rangle\,ds,\end{aligned} \quad (3.45)$$

из (3.43)–(3.45) вытекает, что последовательность

$$x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_n)(t)-x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_*)(t), \quad n\ge 1,$$

поточечно сходится к нулевому элементу пространства H. Ввиду ее равностепенной непрерывности имеем

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_n)-x_{\lambda_n}(y(\lambda_n),f_*)\|_{C(T,H)}=0. \quad (3.46)$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из (3.40)–(3.42) и (3.46). Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Множество $\mathscr{R}_G$ является компактом в $C(T,H)$.*

Так как $\mathscr{R}_G=\{\mathscr{L}(\lambda,y(\lambda),f);\ \lambda\in\Lambda,\ f\in S_G\}$, следствие вытекает из теоремы 3.1.

§ 4. Существование и свойства решений

В этом параграфе изложим основные результаты.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются гипотезы $H(F)$ (1)–(3). Тогда для любого $\lambda \in \Lambda$ множество $\mathscr{R}^{\lambda}_{\operatorname{ext} F}(y(\lambda))$ непусто, а множество $\mathscr{R}^{\lambda}_{F}(y(\lambda))$ является компактным подмножеством пространства $C(T,H) \times \omega\text{-}L^2(T,H)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Lambda$. В соответствии с теоремой 3.1 множество $\mathscr{R}_G(\lambda)$ (см. (3.20)) является компактом в $C(T,H)$. Воспользовавшись неравенством (3.16) и утверждением 8.1 в [7], получаем, что существует непрерывное отображение $g : \mathscr{R}_G(\lambda) \to L^2(T,H)$ такое, что

$$g(x)(t) \in \operatorname{ext} F(t,x(t)), \quad t \in T, \ x \in \mathscr{R}_G(\lambda). \tag{4.1}$$

Согласно (3.17) $\operatorname{ext} F(t,x) \subset G(t)$, $x \in H$. Поэтому

$$g(x) \in S_G, \quad x \in \mathscr{R}_G(\lambda). \tag{4.2}$$

Рассмотрим отображение $f \to g(\mathscr{L}(\lambda, y(\lambda), f))$, которое по теореме 3.1 действует непрерывно из $\omega\text{-}S_G$ в $L^2(T,H)$ и, следовательно, из $\omega\text{-}S_G$ в $\omega\text{-}L^2(T,H)$. Воспользовавшись (4.2), получаем, что $g(\mathscr{L}(\lambda, y(\lambda), f))$ является непрерывным отображением из $\omega\text{-}S_G$ в $\omega\text{-}S_G$. Тогда в соответствии с теоремой Шаудера существует неподвижная точка $f_* \in S_G$ этого отображения, т. е. $f_* = g(\mathscr{L}(\lambda, y(\lambda), f_*))$. Положим

$$x_\lambda(y(\lambda), f_*) = \mathscr{L}(\lambda, y(\lambda), f_*).$$

Тогда из (4.1) вытекает, что

$$f_*(t) \in \operatorname{ext} F(t, x_\lambda(y(\lambda), f_*)(t)) \quad \text{п. в.}$$

Поскольку $x_\lambda(y(\lambda), f_*)$ при $\lambda \neq 0$ является сильным решением уравнения (2.6) с $f = f_*$, а при $\lambda = 0$ — сильным решением включения (2.5), то $(x_\lambda(y(\lambda), f_*), f_*)$ — элемент множества $\mathscr{R}^{\lambda}_{\operatorname{ext} F}(y(\lambda))$. Тем самым множества $\mathscr{R}^{\lambda}_{\operatorname{ext} F}(y(\lambda))$ и $\mathscr{R}^{\lambda}_{F}(y(\lambda))$ непусты.

Докажем компактность множества $\mathscr{R}^{\lambda}_{\operatorname{ext} F}(y(\lambda))$ в $C(T,H) \times \omega\text{-}L^2(T,H)$. Так как для любого $(x_\lambda(y(\lambda), f), f) \in \mathscr{R}^{\lambda}_{F}(y(\lambda))$ имеет место включение

$$f(t) \in F(t, x_\lambda(y(\lambda), f)(t)) \subset G(t) \quad \text{п. в.},$$

то

$$\mathscr{R}^{\lambda}_{F}(y(\lambda)) \subset \mathscr{R}_G(\lambda) \times S_G. \tag{4.3}$$

Поэтому множество $\mathscr{R}^{\lambda}_{F}(y(\lambda))$ является относительно компактным подмножеством в пространстве $C(T,H) \times \omega\text{-}L^2(T,H)$. В силу того, что S_G — метризуемый компакт в $\omega\text{-}L^2(T,H)$, в соответствии с (4.3) остается доказать секвенциальную замкнутость множества $\mathscr{R}^{\lambda}_{F}(y(\lambda))$. Пусть последовательность $(x_\lambda(y(\lambda), f_n), f_n) \in \mathscr{R}^{\lambda}_{F}(y(\lambda))$ сходится в $C(T,H) \times \omega\text{-}L^2(T,H)$ к (x_*, f_*). Тогда согласно теореме 3.1

$$x_* = \mathscr{L}(\lambda, y(\lambda), f_*) = x_\lambda(y(\lambda), f_*). \tag{4.4}$$

Поскольку

$$f_n(t) \in F(t, x_\lambda(y(\lambda_n), f_n)(t)), \quad t \in T, \tag{4.5}$$

из теоремы Мазура и гипотезы $H(F)(2)$ и (4.5) следует, что

$$f_*(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\operatorname{co}} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} f_k(t) \right) \subset F(t, x_\lambda(y(\lambda), f_*)(t)) \quad \text{п. в.} \tag{4.6}$$

Тогда согласно (4.4), (4.6) пара $(x_\lambda(y_\lambda(\lambda), f_*), f_*)$ является элементом множества $\mathscr{R}^{\lambda}_{F}(y(\lambda))$. Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Пусть выполняется предположение $H(F)$. Тогда для любого $\lambda \in \Lambda$*

$$\mathscr{R}_F^\lambda(y(\lambda)) = \overline{\mathscr{R}_{\mathrm{ext}\,F}^\lambda(y(\lambda))}, \tag{4.7}$$

где черта сверху означает замыкание в пространстве $C(T,H) \times \omega$-$L^2(T,H)$.

Доказательство. Пусть $(x_\lambda(y(\lambda), f_*), f_*) \in \mathscr{R}_F^\lambda(y(\lambda))$. Обозначим через $S_F(x)$ множество

$$S_F(x) = \{f \in \mathscr{M}(H);\ f(t) \in F(t, x(t)) \text{ п. в.}\}, \quad x \in \mathscr{R}_G(\lambda).$$

Из (3.16) и утверждения 4.2 в [7] следует, что S_F является отображением из $\mathscr{R}_G(\lambda)$ в $\mathrm{cb}\, L^2(T,H)$, непрерывным в метрике Хаусдорфа на $\mathrm{cb}\, L^2(T,H)$. Возьмем $n \geq 1$. Для каждого $x \in \mathscr{R}_G(\lambda)$ согласно неравенству (2.14) существует элемент $u \in S_F(x)$ такой, что

$$\|f_*(t) - u(t)\| < \frac{1}{2n} + d(f_*(t), F(t, x(t)) \leq \frac{1}{2n} + k(t)\|x_\lambda(y(\lambda), f_*)(t) - x(t)\|.$$

Поэтому из утверждения 2.3 и теоремы 3.1 из [8] следует существование непрерывной функции $v_n : \mathscr{R}_G(\lambda) \to L^1(T,H)$ такой, что

$$v_n(x)(t) \in F(t, x(t)), \tag{4.8}$$

$$\|f_*(t) - v_n(x)(t)\| \leq 1/n + k(t)\|x_\lambda(y(\lambda), f_*)(t) - x(t)\|. \tag{4.9}$$

Согласно (4.8) и (3.16) семейство функций $\{v_n(x);\ x \in \mathscr{R}_G(\lambda)\}$ равномерно интегрируемо со второй степенью. Воспользовавшись утверждением 2.4 из [7], получаем, что функция $v_n(x)$ является непрерывной из $\mathscr{R}_G(\lambda)$ в $L^2(T,H)$. Тогда в соответствии с теоремой 0.2 в [9] существует непрерывная функция $g_n : \mathscr{R}_G(\lambda) \to L^2(T,H)$ такая, что

$$g_n(x)(t) \in \mathrm{ext}\, F(t, x(t)) \quad \text{п. в.} \tag{4.10}$$

и

$$\|g_n(x) - v_n(x)\|_\omega \leq 1/n, \tag{4.11}$$

где $\|\cdot\|_\omega$ — норма (2.1).

Рассмотрим отображение $g_n(\mathscr{L}(\lambda, y(\lambda), f))$ из S_G в $L^2(T,H)$. Как и при доказательстве теоремы 4.1, получаем, что отображение $g_n(\mathscr{L}(\lambda, y(\lambda), f)$ непрерывно из ω-S_G в ω-S_G. Пусть f_n — неподвижная точка этого отображения, т. е.

$$f_n = g_n(\mathscr{L}(\lambda, y(\lambda), f_n)).$$

Положим $x_\lambda(y(\lambda), f_n) = \mathscr{L}(\lambda, y(\lambda), f_n)$. Тогда ввиду (4.10) пара $(x_\lambda(y(\lambda), f_n), f_n)$ является элементом множества $\mathscr{R}_{\mathrm{ext}\,F}^\lambda(y(\lambda))$. Воспользовавшись монотонностью оператора $\partial\varphi_\lambda^t$, получим

$$\frac{1}{2}\|x_\lambda(y(\lambda), f_n)(t) - x_\lambda(y(\lambda), f_*)(t)\|^2 \\ \leq \int_0^t \langle x_\lambda(y(\lambda), f_n)(s) - x_\lambda(y(\lambda), f_*)(s), f_*(s) - f_n(s)\rangle\, ds. \tag{4.12}$$

Оценим правую часть неравенства (4.12) следующим образом:

$$\int\limits_0^t \langle x_\lambda(y(\lambda), f_n)(s) - x_\lambda(y(\lambda), f_*)(s), f_*(s) - f_n(s)\rangle\, ds$$

$$= \int\limits_0^t \langle x_\lambda(y(\lambda), f_n)(s) - x_\lambda(y(\lambda), f_*)(s), f_*(s) - v_n(x_\lambda(y(\lambda), f_n)(s)\rangle\, ds$$

$$+ \int\limits_0^t \langle x_\lambda(y(\lambda), f_n)(s) - x_\lambda(y(\lambda), f_*)(s), v_n(x_\lambda(y(\lambda), f_n)(s) - f_n(s)\rangle\, ds. \quad (4.13)$$

Воспользовавшись неравенством (4.9), получаем

$$\int\limits_0^t \langle x_\lambda(y(\lambda), f_n)(s) - x_\lambda(y(\lambda), f_*)(s), f_*(s) - v_n(x_\lambda(y(\lambda), f_n)(s)\rangle\, ds$$

$$\leq \frac{1}{n}\int\limits_0^t \|x_\lambda(y(\lambda), f_n(s) - x_\lambda(y(\lambda), f_*)(s)\|\, ds$$

$$+ \int\limits_0^t k(t)\|x_\lambda(y(\lambda), f_*)(s) - x_\lambda(y(\lambda), f_n)(s)\|^2\, ds. \quad (4.14)$$

Так как $f_n(s) = g_n(x_\lambda(y(\lambda), f_n)(s)$, из (4.11) и леммы 2.1 вытекает, что последовательность $v_n(x_\lambda(y(\lambda), f_n) - f_n$ сходится в ω-$L^2(T, H)$ к нулевому элементу пространства $L^2(T, H)$. Поскольку последовательность $x_\lambda(y(\lambda), f_n) - x_\lambda(y(\lambda), f_*)$, $n \geq 1$, относительно компактна в $C(T, H)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^t \langle x_\lambda(y(\lambda), f_n)(s) - x_\lambda(y(\lambda), f_*)(s), v_n(x_\lambda(y(\lambda), f_n)(s) - f_n(s)\rangle\, ds = 0, \quad t \in T. \quad (4.15)$$

Последовательность $x_\lambda(y(\lambda), f_n) - x_\lambda(y(\lambda), f_*)$, $n \geq 1$, относительно компактна в $C(T, H)$, тем самым, не нарушая общности, можно считать, что она сходится в $C(T, H)$ к некоторому элементу $y(\cdot)$. Переходя к пределу в (4.12) и учитывая (4.13)–(4.15), получаем

$$\frac{1}{2}\|y(t)\|^2 \leq \int\limits_0^t k(s)\|y(s)\|^2\, ds.$$

Из этого неравенства и неравенства Беллмана — Гронуолла следует, что $\|y(t)\| = 0$, $t \in T$. Значит, последовательность $x_\lambda(y(\lambda), f_n)$ сходится к $x_\lambda(y(\lambda), f_*)$ в $C(T, H)$. Из неравенства (4.9) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\|f_*(t) - v_n(x_\lambda(y(\lambda), f_n)(t)\| = 0, \quad t \in T. \quad (4.16)$$

Как указано выше, последовательность $v_n(x_\lambda(y(\lambda), f_n) - f_n$, $n \geq 1$, сходится в ω-$L^2(T, H)$ к нулевому элементу пространства $L^2(T, H)$. Тогда согласно (4.16) последовательность f_n сходится к f_* в ω-$L^2(T, H)$. Таким образом, мы показали, что для элемента $(x_\lambda(y(\lambda), f_*), f_*) \in \mathscr{R}_F^\lambda(y(\lambda)$ существует последовательность $\{x_\lambda(y(\lambda), f_n), f_n\} \in \mathscr{R}_{\text{ext}\,F}^\lambda(y(\lambda)$, $n \geq 1$, сходящаяся к этому элементу в $C(T, H) \times \omega$-$L^2(T, H)$. Теперь равенство (4.7) вытекает из теоремы 4.1. Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Пусть выполняется предположение $H(F)$. Тогда $\mathscr{T}r_F^\lambda(y(\lambda))$ для любого $\lambda \in \Lambda$ является компактным подмножеством пространства $C(T,H)$ и справедливо равенство*

$$\mathscr{T}r_F^\lambda(y(\lambda)) = \overline{\mathscr{T}r_{\operatorname{ext} F}^\lambda(y(\lambda))},$$

где черта означает замыкание в $C(T,H)$.

Следствие 4.2. *Пусть выполняется предположение $H(F)$. Тогда $\mathscr{A}_F^\lambda(y(\lambda))(t)$ для любого $\lambda \in \Lambda$ является непрерывным отображением из T в $\operatorname{comp} H$ и справедливо равенство*

$$\mathscr{A}_F^\lambda(y(\lambda))(t) = \overline{\mathscr{A}_{\operatorname{ext} F}^\lambda(y(\lambda))(t)}, \quad t \in T,$$

где черта означает замыкание в H.

Следствия вытекают из теорем 4.1 и 4.2.

§ 5. Сходимость аппроксимаций

Всюду в дальнейшем в этом параграфе мы считаем, что выполнено предположение $H(F)$.

Обозначим через $D_{L^2}(\cdot,\cdot)$ метрику Хаусдорфа на пространстве $\operatorname{cb} L^2(T,H)$. Пусть $\Gamma(\lambda, f)$, $\lambda \in \Lambda$, $f \in L^2(T,H)$, — многозначное отображение, определенное по правилу

$$\Gamma(\lambda, f) = \{u \in \mathscr{M}(H);\ u(t) \in F(t, \mathscr{L}(\lambda, (y(\lambda), f)(t)) \text{ п. в.}\}.$$

Из (2.13) вытекает, что $\Gamma(\lambda, f)$ является выпуклым замкнутым ограниченным разложимым подмножеством пространства $L^2(T,H)$. В соответствии с утверждением 4.2 в [7]

$$D_{L^2}(\Gamma(\lambda_1, f), \Gamma(\lambda_2, f)) \\ \le \left(\int_T D^2(F(t, \mathscr{L}(\lambda_1, (y(\lambda_1), f)(t)), F(t, \mathscr{L}(\lambda_2, (y(\lambda_2), f)(t)))\,dt\right)^{1/2},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda.$$

Поскольку множество Λ имеет только одну предельную точку $\lambda = 0$, то из этого неравенства, неравенства (2.14) и леммы 3.1 следует, что отображение $\lambda \to \Gamma(\lambda, f)$ является непрерывным из Λ в $\operatorname{cb} L^2(T,H)$.

На пространстве $L^2(T,H)$ кроме стандартной нормы введем следующую норму:

$$P(f) = \left(\int_T \exp\left(-4\int_0^t k^2(s)\,ds\right) \cdot \|f(t)\|^2\,dt\right)^{1/2}, \quad f \in L^2(T,H). \tag{5.1}$$

Очевидно, что $P(f)$ является нормой, эквивалентной исходной норме пространства $L^2(T,H)$.

Пусть $D_P(\cdot,\cdot)$ — метрика Хаусдорфа на пространстве $\operatorname{cb} L^2(T,H)$, порожденная нормой (5.1). Воспользовавшись утверждением 4.2 в [7], получаем

$$D_P(\Gamma(\lambda, f_1), \Gamma(\lambda, f_2)) \le \left(\int_T \exp\left(-4\int_0^t k^2(s)\,ds\right) \\ \times D^2(F(t, \mathscr{L}(\lambda, (y(\lambda), f_1)(t)), F(t, \mathscr{L}(\lambda, (y(\lambda), f_2)(t)))\,dt\right)^{1/2}. \tag{5.2}$$

Из неравенств (5.2), (2.14), (3.1) следует, что

$$D_P(\Gamma(\lambda, f_1), \Gamma(\lambda, f_2)) \leq \left(\int\limits_T \exp \left(-4 \int\limits_0^t k^2(s)\,ds) \cdot k^2(t) \int\limits_0^t (\|f_1(s) - f_2(s)\|^2\,ds \right) dt \right)^{1/2}, \quad (5.3)$$

$t \in T$, $f_1, f_2 \in L^2(T, H)$. Применяя правило интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_T \exp \left(-4 \int\limits_0^t k^2(s)\,ds \right) \cdot k^2(t) \int\limits_0^t (\|f_1(s) - f_2(s)\|^2\,ds)\,dt \leq \frac{1}{4} \int\limits_T \exp \left(-4 \int\limits_0^t k^2(s)\,ds \right) \cdot \|f_1(t) - f_2(t)\|^2 dt. \quad (5.4)$$

Воспользовавшись (5.1), (5.3), (5.4), приходим к неравенству

$$D_P(\Gamma(\lambda, f_1), \Gamma(\lambda_2, f_2)) \leq \frac{1}{2} P(f_1 - f_2), \quad f_1, f_2 \in L^2(T, H). \quad (5.5)$$

Напомним, что *неподвижной точкой многозначного отображения* $f \to \Gamma(\lambda, f)$ называется точка f_*, удовлетворяющая включению $f_* \in \Gamma(\lambda, f_*)$.

Обозначим через $\operatorname{Fix}\Gamma(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, множество неподвижных точек отображения $f \to \Gamma(\lambda, f)$. Так как отображение $\lambda \to \Gamma(\lambda, f)$ непрерывно из Λ в $\operatorname{cb} L^2(T, H)$ и имеет место неравенство (5.5), отображение $\Gamma(\lambda, f)$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 3.1 в [10]. Согласно этой теореме для любого $\lambda \in \Lambda$ множество $\operatorname{Fix}\Gamma(\lambda)$ непусто и существует непрерывная функция $u : \Lambda \to L^2(T, H)$ такая, что

$$u(\lambda) \in \operatorname{Fix}\Gamma(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda; \quad (5.6)$$

если $u_*(0) \in \operatorname{Fix}\Gamma(0)$, то существует непрерывная функция $u : \Lambda \to L^2(T, H)$ такая, что имеет место включение (5.6) и

$$u(0) = u_*(0). \quad (5.7)$$

Теорема 5.1. *Отображение $\lambda \to \mathscr{T}r^\lambda(y(\lambda))$ является непрерывным по Хаусдорфу из Λ в $\operatorname{comp} C(T, H)$.*

Доказательство. Поскольку множество Λ имеет только одну предельную точку $\lambda = 0$, нам нужно показать, что если $\lambda_n \to 0$, $\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \neq 0$, то $\mathscr{T}r^{\lambda_n}(y(\lambda_n)) \to \mathscr{T}r(y(0))$ в $\operatorname{comp} C(T, H)$. Покажем вначале, что отображение $\lambda \to \mathscr{T}r^\lambda(y(\lambda))$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису. Для этого достаточно доказать, что если $x_* \in \mathscr{T}r(y(0))$ и $\lambda_n \to 0$, $\lambda_n \neq 0$, то существует последовательность $x_n \in \mathscr{T}r^{\lambda_n}(y(\lambda_n))$, $n \geq 1$, сходящаяся к $x_*(\cdot)$ в $C(T, H)$.

Пусть $x_* \in \mathscr{T}r(y(0))$. Из определения решения включения (1.1) вытекает существование $f_* \in L^2(T, H)$ такого, что

$$x_* = \mathscr{L}(0, y(0), f^*)$$

и

$$f_*(t) \in F(t, \mathscr{L}(0, y(0), f^*)(t)) \quad \text{п. в.} \quad (5.8)$$

Из (5.8) следует, что $f_* \in \operatorname{Fix}\Gamma(0)$. Согласно (5.6), (5.7) существует непрерывная функция $f : \Lambda \to L^2(T, H)$ такая, что $f(\lambda) \in \operatorname{Fix}\Gamma(\lambda)$ и $f(0) = f_*$. Пусть $f_n = f(\lambda_n)$. Положим

$$x_n = \mathscr{L}(\lambda_n, y(\lambda_n), f_n). \tag{5.9}$$

Тогда

$$f_n(t) \in F(t, x_n(t)) \quad \text{п. в.} \tag{5.10}$$

Из (5.9), (5.10) вытекает, что пара (x_n, f_n) является решением включения (1.2) с $\lambda = \lambda_n$. Следовательно, $x_n \in \mathscr{T}r^{\lambda_n}(y(\lambda_n))$. Так как $f_n \to f_*$ в $L^2(T, H)$ и $y(\lambda_n) \to y(0)$, из леммы 3.1 следует, что $x_n(\cdot) \to x_*(\cdot)$ в $C(T, H)$. Тем самым отображение $\lambda \to \mathscr{T}r^{\lambda}(y(\lambda))$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису.

Докажем теперь полунепрерывность сверху по Вьеторису отображения $\lambda \to \mathscr{T}r^{\lambda}(y(\lambda))$. Так как для каждого $\lambda \in \Lambda$ множества $\mathscr{T}r^{\lambda}(y(\lambda))$ и $\mathscr{R}_G$ (см. (3.29)) являются компактами в $C(T, H)$ и $\mathscr{T}r^{\lambda}(y(\lambda)) \subset \mathscr{R}_G$, $\lambda \in \Lambda$, нам нужно показать, что если $\lambda_n \to 0$, $\lambda_n \in \Lambda$ и последовательность $x_n \in \mathscr{T}r^{\lambda_n}(y(\lambda_n))$, $n \geq 1$, сходится к x в $C(T, H)$, то $x \in \mathscr{T}r(y(0))$. Если $x_n \in \mathscr{T}r^{\lambda_n}(y(\lambda_n))$, то существует $f_n \in L^2(T, H)$ такое, что имеют место соотношения (5.9), (5.10). Поскольку $f_n \in S_G$, не нарушая общности, можно считать, что f_n, $n \geq 1$, сходится в ω-$L^2(T, H)$ к некоторому элементу $f \in S_G$. Воспользовавшись теоремой 3.1, получаем, что

$$x = \mathscr{L}(0, y(0), f_*). \tag{5.11}$$

С другой стороны, из (5.10) и теоремы Мазура следует, что

$$f_*(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\operatorname{co}} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} f_k(t) \right) \subset F(t, x(t)) \quad \text{п. в.} \tag{5.12}$$

Из (5.11), (5.12) вытекает, что (x, f) является решением включения (1.1). Поэтому $x \in \mathscr{T}r(y(0))$. Тем самым мы показали, что отображение $\lambda \to \mathscr{T}r^{\lambda}(y(\lambda))$ полунепрерывно сверху по Вьеторису и, следовательно, непрерывно по Вьеторису из Λ в $\operatorname{comp} C(T, H)$. Хорошо известно, что если отображение $\lambda \to \mathscr{T}r^{\lambda}(y(\lambda))$ является непрерывным по Вьеторису из Λ в $\operatorname{comp} C(T, H)$, то оно будет непрерывным по Хаусдорфу. Теорема доказана.

Обозначим через $C(T, \operatorname{comp} H)$ пространство всех непрерывных отображений из T в $\operatorname{comp} H$ с топологией равномерной сходимости на T.

Следствие 5.1. *Для каждого $\lambda \in \Lambda$ функция $t \to \mathscr{A}_F^{\lambda}(y(\lambda))(t)$, — элемент пространства $C(T, \operatorname{comp} H)$ и отображение $\lambda \to \mathscr{A}_F^{\lambda}(y(\lambda))(t)$ непрерывно из Λ в $C(T, \operatorname{comp} H)$.*

Следствие вытекает из следствия 4.2 и теоремы 5.1.

Следствие 5.2. *Отображение $\lambda \to \overline{\mathscr{T}r^{\lambda}_{\operatorname{ext} F}(y(\lambda))}$, где черта означает замыкание в $C(T, H)$, является непрерывным по Хаусдорфу из Λ в $\operatorname{comp} C(T, H)$.*

Следствие 5.3. *Для каждого $\lambda \in \Lambda$ функция $t \to \overline{\mathscr{A}^{\lambda}_{\operatorname{ext} F}(y(\lambda))(t)}$, где при каждом $t \in T$ черта означает замыкание в H, является элементом пространства $C(T, \operatorname{comp} H)$, а отображение $\lambda \to \overline{\mathscr{A}^{\lambda}_{\operatorname{ext} F}(y(\lambda))(t)}$ непрерывно из Λ в $C(T, \operatorname{comp} H)$.*

Следствия 5.2, 5.3 вытекают из следствий 4.1, 4.2, 5.1 и теоремы 5.1.

Замечание 5.1. Для $y_0 \in \operatorname{dom} \varphi^0$, $\varphi^0(y_0) \leq M_1$ и $\lambda_n \in (0, 1]$, $\lambda_n \to 0$, мы выбирали последовательность $y_n \in \operatorname{dom} \varphi_0$ такую, чтобы

$$\varphi^0(y_n) \leq M_1 \tag{5.13}$$

(см. (3.4)). Если функция $\varphi^0(x)$ непрерывна в точке y_0, то неравенство (5.13) будет выполняться для любой последовательности $y_n \in \operatorname{dom}\varphi^0$, $n \ge 1$, сходящейся к y_0 при некотором $M_1 > 0$. Поэтому если функция $\varphi^0(x)$ непрерывна в точке $y_0 \in \operatorname{dom}\varphi^0$, то все наши утверждения будут справедливы для любой последовательности $y_n \in \operatorname{dom}\varphi^0$, сходящейся к y_0.

В частности, если внутренность $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi^0$ эффективной области $\operatorname{dom}\varphi^0$ непуста и $y_0 \in \operatorname{int}\ \operatorname{dom}\varphi^0$, то функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке y_0 [11].

§ 6. Приложение

Уравнение возмущенного движения электромотора с присоединенным к нему манипулятором описывается уравнениями [12]

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -bx_2 - f_1(x_2) - \tau(x_1) + ku, \quad x_1(0) = x_0^1,\ x_2(0) = x_0^2, \tag{6.1}$$

с ограничениями

$$u_{\min} \le u \le u_{\max}, \tag{6.2}$$

где x_1 — угол поворота ротора, b — коэффициент вязкого трения, $f(x_2)$ — разрывная нелинейность, характеризующая сухое трение, $\tau(x_1)$ — нагрузка на валу двигателя, u — напряжение. Функции $f_1(x)$ и $\tau(x)$ имеют следующий вид: $f_1(x) = a\operatorname{sgn} x \cdot \exp(-\nu|x|)$, где $\operatorname{sgn} x$ — разрывная в точке $x = 0$ функция и $\operatorname{sgn} x = 1$, если $x > 0$, $\operatorname{sgn} x = -1$, если $x < 0$; $a > 0$, $\nu > 0$; $\tau(x) = 0$, если $x < x_f$, $\tau(x) = k_s(x - x_f)$, если $x \ge x_f$, $x_f > 0$, $k_s > 0$.

Если под решением уравнения (6.1) с разрывной правой частью понимать решение в смысле А. Ф. Филиппова [13], то в точке $x = 0$ функцию $\operatorname{sgn} x$ мы должны доопределить следующим образом: $\operatorname{sgn} 0 = [-1, 1]$. Всюду в дальнейшем под $\operatorname{sgn} x$ мы будем понимать функцию, доопределенную в точке $x = 0$ вышеуказанным способом. В этом случае управляемая система (6.1) сведется к дифференциальному включению

$$-\dot{x}_1 = -x_2, \quad -\dot{x}_2 \in f_1(x_2) + bx_2 + \tau(x_1) - ku, \quad x_1(0) = x_0^1,\ x_2(0) = x_0^2, \tag{6.3}$$

с ограничениями (6.2) на управление u.

Представим функцию $f_1(x_2)$ в виде $f_1(x_2) = a\operatorname{sgn}(x_2) + f_2(x_2)$, где

$$f_2(x_2) = \begin{cases} -a(1 - \exp(-\nu x_2)), & \text{если } x_2 > 0, \\ a(1 - \exp(\nu x_2)), & \text{если } x_2 \le 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_2(x_2)$ является липшицевой функцией. Перепишем включение (6.3) в эквивалентном ему виде

$$-\dot{x}_1 = -x_2, \quad -\dot{x}_2 = a\operatorname{sgn}(x_2) + f_2(x_2) + bx_2 + \tau(x_1) - ku, \quad x_1(0) = x_0^1,\ x_2(0) = x_0^2. \tag{6.4}$$

Наряду с включением (6.4) рассмотрим управляемую систему

$$\begin{gathered} -\dot{x}_1 = -x_2, \quad -\dot{x}_2 \in f_\lambda(x_2) + f_2(x_2) + bx_2 + \tau(x_1) - ku,\ \lambda \in (0, 1], \\ x_1(0) = x_\lambda^1,\ x_2(0) = x_\lambda^2, \end{gathered} \tag{6.5}$$

где

$$f_\lambda(x_2) = \begin{cases} -a, & x_2 < -\lambda a, \\ x_2/\lambda, & |x_2| \le \lambda a, \\ a, & x_2 > \lambda a. \end{cases}$$

Пусть $T = [0,1]$, U — отрезок $[u_{\min}, u_{\max}]$, $\operatorname{ext} U = \{u_{\min}, u_{\max}\}$, где $\{u_{\min}, u_{\max}\}$ — множество, состоящее из двух точек $u_{\min}$ и $u_{\max}$. Обозначим через $\mathscr{M}(U)$ совокупность всех измеримых функций $u : T \to \mathbb{R}$, $u(t) \in U$ п. в., а через $\mathscr{M}(\operatorname{ext} U)\}$ — совокупность всех измеримых функций $u : T \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих включению $u(t) \in \operatorname{ext} U$ п. в. Для фиксированного $u(\cdot) \in \mathscr{M}(U)$ под *решением в смысле А. Ф. Филиппова управляемой системы* (6.1) мы понимаем абсолютно непрерывную функцию $t \to (x_1(t), x_2(t))$, $x_1(0) = x_0^1$, $x_2(0) = x_0^2$, $t \in T$, почти всюду удовлетворяющую включению

$$-\dot{x}_1(t) = -x_2(t), \quad -\dot{x}_2(t) \in f(x_2(t)) + bx_2(t) + \tau(x_1(t)) - ku(t).$$

Ясно, что определение решения управляемой системы (6.1) с разрывной нелинейностью совпадает с общепринятым определением решения дифференциального включения (6.3) или эквивалентного ему включения (6.4). Решение управляемой системы (6.5) для $u \in \mathscr{M}(U)$ определяется аналогично.

Множество всех решений включения (6.3), соответствующих $u \in \mathscr{M}(U)$, обозначим через $\mathscr{T}r_U\bigl(x_0^1, x_0^2\bigr)$, а множество всех решений системы (6.5) будем обозначать через $\mathscr{T}r_U^\lambda\bigl(x_\lambda^1, x_\lambda^2\bigr)$; $\mathscr{T}r_{\operatorname{ext} U}\bigl(x_0^1, x_0^2\bigr)$ и $\mathscr{T}r_{\operatorname{ext} U}^\lambda\bigl(x_\lambda^1, x_\lambda^2\bigr)$ означают совокупности всех решений включения (6.3) и системы (6.5) с $u \in \mathscr{M}(\operatorname{ext} U)$. Множества достижимости в момент $t \in T$ включения (6.3) и системы (6.5) с $u \in \mathscr{M}(U)$ мы обозначаем через $\mathscr{A}_U\bigl(x_0^1, x_0^2\bigr)(t)$ и $\mathscr{A}_U^\lambda\bigl(x_\lambda^1, x_\lambda^2\bigr)(t)$. Аналогичный смысл имеют обозначения $\mathscr{A}_{\operatorname{ext} U}\bigl(x_0^1, x_0^2\bigr)(t)$ и $\mathscr{A}_{\operatorname{ext} U}^\lambda\bigl(x_\lambda^1, x_\lambda^2\bigr)(t)$ для $u \in \mathscr{M}(\operatorname{ext} U)$.

Теорема 6.1. *Для любых $\bigl(x_0^1, x_0^2\bigr) \in \mathbb{R}^2$, $\bigl(x_\lambda^1, x_\lambda^2\bigr) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in (0,1]$ справедливы следующие утверждения:*

1) *множества $\mathscr{T}r_U\bigl(x_0^1, x_0^2\bigr)$, $\mathscr{T}r_U^\lambda\bigl(x_\lambda^1, x_\lambda^2\bigr)$, $\mathscr{T}r_{\operatorname{ext} U}\bigl(x_0^1, x_0^2\bigr)$, $\mathscr{T}r_{\operatorname{ext} U}^\lambda\bigl(x_\lambda^1, x_\lambda^2\bigr)$ непусты;*

2) *множества $\mathscr{T}r_U\bigl(x_0^1, x_0^2\bigr)$, $\mathscr{T}r_U^\lambda\bigl(x_\lambda^1, x_\lambda^2\bigr)$ являются выпуклыми компактными подмножествами пространства $C(T, \mathbb{R}^2)$ и*

$$\mathscr{T}r_U\bigl(x_0^1, x_0^2\bigr) = \overline{\mathscr{T}r_{\operatorname{ext} U}\bigl(x_0^1, x_0^2\bigr)}, \quad \mathscr{T}r_U^\lambda\bigl(x_\lambda^1, x_\lambda^2\bigr) = \overline{\mathscr{T}r_{\operatorname{ext} U}^\lambda\bigl(x_\lambda^1, x_\lambda^2\bigr)},$$

где черта сверху означает замыкание в $C(T, \mathbb{R}^2)$;

3) *для любой последовательности $\lambda_n \to 0$ и любой последовательности $\bigl(x_{\lambda n}^1, x_{\lambda n}^2\bigr)$, $n \ge 1$, сходящейся к $\bigl(x_0^1, x_0^2\bigr)$, последовательность $\mathscr{T}r_U^{\lambda n}\bigl(x_{\lambda n}^1, x_{\lambda n}^2\bigr)$, $n \ge 1$, сходится к $\mathscr{T}r_U\bigl(x_0^1, x_0^2\bigr)$ в пространстве* $\operatorname{comp} C(T, \mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Пусть $y = (x_1, x_2)$. Рассмотрим собственную выпуклую функцию $\varphi(y) = \varphi(x_1, x_2) = a|x_2|$. Хорошо известно [1], что

$$\partial\varphi(y) = (0, a \operatorname{sgn}(x_2)), \quad \partial\varphi_\lambda(y) = (0, f_\lambda(x_2)). \tag{6.6}$$

Положим

$$g(y, u) = (-x_2, f_2(x_2) + bx_2 + \tau(x_1) - ku), \tag{6.7}$$

$$F(y) = \{\cup g(y, u);\ u \in U\}. \tag{6.8}$$

Тогда

$$\operatorname{ext} F(y) = \{\cup g(y, u);\ u \in \operatorname{ext} U\}. \tag{6.9}$$

Воспользовавшись (6.6)–(6.8), перепишем системы (6.4), (6.5) в виде

$$-\dot{y}(t) \in \partial\varphi(y(t)) + F(y(t)), \quad y(0) = \bigl(x_0^1, x_0^2\bigr), \tag{6.10}$$

$$-\dot{y}_\lambda(t) \in \partial\varphi_\lambda(y_\lambda(t)) + F(y_\lambda(t)), \quad y_\lambda(0) = \bigl(x_\lambda^1, x_\lambda^2\bigr). \tag{6.11}$$

Очевидно, что отображение $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ удовлетворяет предположению $H(F)$. Поэтому, как доказано в теореме 4.1, множества траекторий $\mathscr{T}r_F\big(x_0^1,x_0^2\big)$, $\mathscr{T}r_F^\lambda\big(x_\lambda^1,x_\lambda^2\big)$ включений (6.10), (6.11) непусты. Из определения решений систем (6.4), (6.5) и включений (6.10), (6.11) вытекает, что

$$\mathscr{T}r_U\big(x_0^1,x_0^2\big)\subset\mathscr{T}r_F\big(x_0^1,x_0^2\big),\quad \mathscr{T}r_U^\lambda\big(x_\lambda^1,x_\lambda^2\big)\subset\mathscr{T}r_F^\lambda\big(x_\lambda^1,x_\lambda^2\big).$$

Пусть $y(\cdot)\in\mathscr{T}r_F\big(x_0^1,x_0^2\big)$. Тогда согласно определению решения включения (6.10) существует $f\in L^2(T,H)$ такое, что

$$-\dot y(t)\in\partial\varphi(y(t))+f(y(t))\ \text{п. в.},\quad f(t)\in F(y(t))\ \text{п. в.}\tag{6.12}$$

Воспользовавшись (6.8) и теоремой 7.2 в [4], получаем, что существует измеримая функция $u(t)\in U$ п. в. такая, что

$$f(t)=g(y(t),u(t)).\tag{6.13}$$

Теперь из (6.7), (6.12), (6.13) следует, что $y(t)=(x_1(t),x_2(t))$ является решением включения (6.4) и, следовательно, решением эквивалентного ему включения (6.3). Поэтому $y(\cdot)\in\mathscr{T}r_U\big(x_0^1,x_0^2\big)$. Следовательно, $\mathscr{T}r_U\big(x_0^1,x_0^2\big)=\mathscr{T}r_F\big(x_0^1,x_0^2\big)$. Аналогично мы можем показать, что

$$\mathscr{T}r_U^\lambda\big(x_\lambda^1,x_\lambda^2\big)=\mathscr{T}r_F^\lambda\big(x_\lambda^1,x_\lambda^2\big),\quad \mathscr{T}r_{\operatorname{ext}U}\big(x_0^1,x_0^2\big)=\mathscr{T}r_{\operatorname{ext}F}\big(x_0^1,x_0^2\big),$$

$$\mathscr{T}r_{\operatorname{ext}U}^\lambda\big(x_\lambda^1,x_\lambda^2\big)=\mathscr{T}r_{\operatorname{ext}F}^\lambda\big(x_\lambda^1,x_\lambda^2\big).$$

Так как $\operatorname{dom}\varphi=\mathbb{R}^2$, утверждения теоремы вытекают из утверждений теорем 4.1, 4.2, 5.1 и замечания 5.1. Теорема доказана.

Следствие 6.1. *Для любых* $\big(x_0^1,x_0^2\big)\in\mathbb{R}^2$, $\big(x_\lambda^1,x_\lambda^2\big)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda\in(0,1]$ *справедливы следующие утверждения:*

1) *отображения* $t\to\mathscr{A}_U\big(x_0^1,x_0^2\big)(t)$, $t\to\mathscr{A}_U^\lambda\big(x_\lambda^1,x_\lambda^2\big)(t)$ *непрерывны из* T *в* $\operatorname{comp}\mathbb{R}^2$, *и*

$$\mathscr{A}_U\big(x_0^1,x_0^2\big)(t)=\overline{\mathscr{A}_{\operatorname{ext}U}\big(x_0^1,x_0^2\big)(t)},\quad \mathscr{A}_U^\lambda\big(x_\lambda^1,x_\lambda^2\big)(t)=\overline{\mathscr{A}_{\operatorname{ext}U}^\lambda\big(x_\lambda^1,x_\lambda^2\big)(t)},$$

где для каждого $t\in T$ *черта сверху означает замыкание в* $\mathbb{R}^2$;

2) *для любой последовательности* $\lambda_n\to0$ *и любой последовательности* $\big(x_{\lambda n}^1,x_{\lambda n}^2\big)$, $n\ge1$, *сходящейся к* $\big(x_0^1,x_0^2\big)$, *последовательность* $\mathscr{A}_U^{\lambda n}\big(x_{\lambda n}^1,x_{\lambda n}^2\big)(t)$ *сходится к* $\mathscr{A}_U\big(x_0^1,x_0^2\big)(t)$ *в* $\operatorname{comp}\mathbb{R}^2$ *равномерно по* $t\in T$.

Следствие вытекает из теоремы 6.1.

Из следствия 6.1 получаем, что при численных расчетах множество достижимости управляемой системы (6.1) с разрывной нелинейностью можно с любой степенью точности аппроксимировать множествами достижимости управляемой системы (6.5) с достаточно гладкими правыми частями. Численная же оценка множеств достижимости системы (6.5) не встречает принципиальных трудностей. В заключение отметим, что в работе [12] предлагался некоторый эвристический подход к изучению системы (6.1), основанный на линеаризации нелинейности $f_1(x_2)$. Этот подход не имеет строгого математического обоснования и отличен от нашего.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brezis H.* Operateurs maximaux monotones. Amsterdam: North-Holland, 1973.
2. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
3. *Kenmochi N.* Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications // Bull. Fac. Educ. Chiba Univ. 1981. V. 30. P. 1–87.
4. *Himmelberg C. J.* Measurable relations // Fund. Math. 1975. V. 87, N 1. P. 53–72.
5. *Kenmochi N.* On the quasi-linear heat equation with time-dependent obstacles // Nonlinear Anal. 1981. V. 5, N 1. P. 71–80.
6. *Бурбаки Н.* Общая топология. М.: Наука, 1975.
7. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* L_p-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: existence theorems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4. P. 173–203.
8. *Fryszkowski A.* Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps // Studia Math. 1983. V. 76, N 2. P. 163–174.
9. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* L_p-continuous extreme selectors of multifunction with decomposable values: relaxation theorems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4. P. 237–269.
10. *Толстоногов А. А.* L_p-непрерывные селекторы неподвижных точек многозначных отображений с разложимыми значениями. I. Теоремы существования // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 695–709.
11. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
12. *Cebuhar W. A.* Approximate linearization of control systems with discontinuous non-linearities // Optimal Control Appl. Methods. 1995. V. 16. P. 341–359.
13. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

Статья поступила 14 февраля 2003 г.

Толстоногов Александр Александрович
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
aatol@icc.ru