Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 517.95

О ДВУМЕРНЫХ КОНЕЧНОЗОННЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ ШРЕДИНГЕРА И ДИРАКА С ОСОБЫМИ СПЕКТРАЛЬНЫМИ КРИВЫМИ

И. А. Тайманов

Аннотация: Описан широкий класс двумерных потенциальных операторов Шредингера и Дирака, которые конечнозонны на нулевом уровне энергии, при этом спектральная кривая на этом уровне является особой: она, в частности, может иметь n-кратные точки с $n \geq 3$.

Ключевые слова: операторы Шредингера и Дирака, спектральная кривая, конечнозонное интегрирование

§ 1. Введение

В статье мы опишем широкий класс двумерных потенциальных операторов Шредингера и Дирака, которые конечнозонны на нулевом уровне энергии, при этом спектральная кривая на этом уровне является особой: она, в частности, может иметь n-кратные точки с $n \geq 3$.

Операторы Дирака с такими спектральными кривыми важны для представления Вейерштрасса торов в $\mathbb{R}^3$ [1, 2]. Изучение конечнозонных операторов с особыми спектральными кривыми, которые обычно в конечнозонной теории специально не рассматривались из-за необщности положения, представляет для дифференциальной геометрии специальный интерес, так, например, кривые с особенностями могут быть спектральными кривыми для гладких погруженных торов. В частности, спектральные кривые торов в $\mathbb{R}^3$, полученных вращением окружностей, лежащих в плоскости $y = 0$, вокруг оси x, — это рациональные кривые с двойными точками.

В данной статье проблема описания таких операторов с помощью нормализации сингулярных кривых сведена к проблеме, которая затрагивает только несингулярные кривые. Это делает данное описание эффективным.

§ 2. Операторы Шредингера и Дирака, конечнозонные на нулевом уровне энергии

2.1. Двумерные операторы, конечнозонные на нулевом уровне энергии. Понятие двумерного оператора, конечнозонного на одном уровне

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00–01–00915), Фонда содействия отечественной науке и ИНТАС (грант 99–01782).

энергии было введено в работе Б. А. Дубровина, И. М. Кричевера и С. П. Новикова [3] на примере оператора Шредингера.

Прежде всего напомним определение собственной функции Флоке (или блоховской функции) дифференциального оператора L с периодическими коэффициентами. Пусть оператор L действует на функциях на $\mathbb{R}^n$ и его коэффициенты периодичны относительно решетки периодов Λ, которая изоморфна $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Решение уравнения

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

называется *функцией Флоке* (или *блоховской функцией*) с собственным значением λ, если для любого вектора $\gamma \in \Lambda$ выполнено соотношение

$$\psi(x+\gamma) = e^{2\pi i\langle k,\gamma\rangle}\psi(x),$$

где

$$\langle k,\gamma\rangle = \sum_{i=1}^{n} k_i\gamma_i$$

— обычное скалярное произведение и компоненты вектора $k = (k_1, \ldots, k_n)$ называются квазиимпульсами функции ψ. Мы видим, что каждая функция Флоке задает гомоморфизм

$$\mu : \Lambda \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \mu(\gamma) = e^{2\pi i\langle k,\gamma\rangle}.$$

Для операторов Шредингера $\Delta + u$, теплопроводности $\partial_t - \Delta$ и двумерного оператора Дирака с ограниченными коэффициентами (здесь существенно, что эти операторы являются гипоэллиптическими) с помощью теоремы Келдыша (альтернативы Фредгольма для пучков операторов, аналитически зависящих от параметров) можно показать, что квазиимпульсы и собственные значения функций Флоке связаны аналитическими соотношениями (законами дисперсии [4]) и допустимые наборы $(k_1, \ldots, k_n, \lambda)$ образуют аналитическое подмножество Q в $\mathbb{C}^{n+1}$ (см. [5, 2]). Это множество, очевидно, инвариантно относительно сдвигов квазиимпульсов на векторы двойственной решетки $\Lambda^* = \{\gamma^* : \langle\gamma^*, \gamma\rangle \in \mathbb{Z}$ для всех $\gamma \in \Lambda\}$. Поэтому удобнее перейти к фактор-пространству Q/Λ^*.

Пусть $n = 2$: операторы двумерны. Тогда пересечение Q/Λ^* с плоскостью $\lambda = 0$ будет комплексной кривой (римановой поверхностью) Γ', на которой функции Флоке склеиваются в функцию $\psi(x, P)$, $P \in \Gamma'$, мероморфную всюду на Γ', за исключением конечного числа точек. Говорят, что оператор L *конечнозонен на нулевом уровне энергии* $\lambda = 0$, если кривая Γ — нормализация кривой Γ' — имеет конечный род, т. е. является алгебраической кривой. Эта риманова поверхность Γ и называется *спектральной кривой оператора L на нулевом уровне энергии.*

2.2. Оператор Шредингера. Двумерный оператор Шредингера с магнитным полем имеет вид

$$L = \partial\bar\partial + A(z,\bar z)\bar\partial + u(z,\bar z), \tag{1}$$

где

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, \quad \bar\partial = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}, \quad z = x + iy.$$

Согласно [3] он называется *конечнозонным на нулевом уровне энергии*[1], если существуют такие

[1] Это определение, как и данное ниже в п. 2.3 для операторов Дирака, касается только операторов с несингулярными спектральными кривыми. Операторы с сингулярными спектральными кривыми возникают из них в пределе при вырождении, которое, как мы показываем в этой статье, может быть достаточно сложным.

а) неособая риманова поверхность Γ конечного рода g с двумя отмеченными точками $\infty_\pm$ и такими локальными параметрами $k_\pm^{-1}$ в окрестностях этих точек, что $k_\pm^{-1}(\infty_\pm) = 0$;

б) эффективный дивизор (формальная сумма точек на поверхности) $D = P_1 + \dots + P_g$ степени g, образованный точками, отличными от точек $\infty_\pm$,

что на поверхности Γ существует функция $\psi = \psi(x, y, P)$, которая

1) мероморфна на Γ вне точек $\infty_\pm$ и имеет полюсы только в точках из D, причем порядок каждого полюса не превосходит числа вхождений этой точки в дивизор D: $(\psi) \geq D$;

2) в точках $\infty_\pm$ имеет существенные особенности и выполняются следующие асимптотики:

$$\psi(x, y, P) \approx e^{k_+ z}\big(1 + \xi(x, y)k_+^{-1} + O\big(k_+^{-2}\big)\big) \quad \text{при } P \to \infty_+,$$

$$\psi(x, y, P) \approx c(x, y)e^{k_- \bar{z}}\big(1 + O\big(k_-^{-1}\big)\big) \quad \text{при } P \to \infty_-;$$

3) в каждой точке поверхности (отличной от $\infty_\pm$) удовлетворяет уравнению $L\psi = 0$.

Из теории функций Бейкера — Ахиезера следует, что

1) для дивизора D общего положения данные $(\Gamma, \infty_\pm, k_\pm, D)$ задают функцию, удовлетворяющую условиям 1 и 2, однозначно;

2) по функции ψ однозначно строится такой оператор Шредингера вида (1), что $L\psi = 0$; явные формулы имеют следующий вид:

$$A = -\frac{\partial \log c}{\partial z}, \quad u = -\frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}}.$$

Как показано в [6, 7], если на поверхности Γ существует такая голоморфная инволюция

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma, \quad \sigma^2 = 1,$$

что $\sigma(\infty_\pm) = \infty_\pm, \sigma(k_\pm) = -k_\pm$, и существует мероморфный дифференциал (1-форма) ω на Γ, полюсы которого лежат в точности в точках ∞_+ и ∞_- и имеют первый порядок, а нули — в точках $D + \sigma(D)$:

$$D + \sigma(D) - \infty_+ - \infty_- \sim K(\Gamma)$$

(дивизор в левой части эквивалентен каноническому дивизору поверхности Γ), то такой оператор потенциален: $c^2 \equiv 1$ и, следовательно, $A = 0$.

Если при этом существует такая антиголоморфная инволюция

$$\tau : \Gamma \to \Gamma, \quad \tau^2 = 1,$$

что

$$\sigma\tau = \tau\sigma, \quad \tau(D) = D, \quad \tau(\infty_\pm) = \infty_\mp, \quad \tau(k_\pm) = \bar{k}_\mp,$$

то потенциал u вещественный.

Легко заметить, что форма ω инвариантна относительно инволюции σ, поэтому опускается до формы ω' на фактор-поверхности Γ/σ и форма ω' имеет g нулей и два простых полюса. Следовательно, род поверхности Γ/σ равен $g/2$, и точки $\infty_\pm$ исчерпывают все неподвижные точки инволюции σ (мы предполагаем, что поверхность Γ неособая). Естественное накрытие $\Gamma \to \Gamma_0 = \Gamma/\sigma$ будет двулистным и разветвленным в паре точек $\infty_\pm$.

Потенциал u в общем случае квазипериодический, и если он периодический, то функции $\psi(x,y,P)$ для всех точек $P\in\Gamma\setminus\{\infty_\pm\}$ будут функциями Флоке, а квазиимпульсы k_1, k_2 локально голоморфными функциями на поверхности.

2.3. Оператор Дирака. Двумерный оператор Дирака (с потенциалами) имеет вид

$$\mathscr{D}=\begin{pmatrix}0 & \partial\\ -\bar\partial & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}U & 0\\ 0 & V\end{pmatrix}.$$

Он называется *конечнозонным на нулевом уровне энергии*, если существуют такие

а) неособая риманова поверхность Γ конечного рода g с двумя отмеченными точками $\infty_\pm$ и такими локальными параметрами $k_\pm^{-1}$ в окрестностях этих точек, что $k_\pm^{-1}(\infty_\pm)=0$;

б) эффективный дивизор $D=P_1+\dots+P_{g+1}$ степени $g+1$, образованный точками, отличными от точек $\infty_\pm$,

что на поверхности Γ существует вектор-функция $\psi=(\psi_1,\psi_2)^\perp=\psi(x,y,P)$, которая

1) мероморфна вне точек $\infty_\pm$ и имеет полюсы только в точках из D;

2) в точках $\infty_\pm$ имеет существенные особенности и

$$\psi(x,y,P)\approx e^{k_+z}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\xi_1^+\\ \xi_2^+\end{pmatrix}k_+^{-1}+O(k_+^{-2})\right]\quad\text{при } P\to\infty_+,$$

$$\psi(x,y,P)\approx e^{k_-\bar z}\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\xi_1^-\\ \xi_2^-\end{pmatrix}k_-^{-1}+O(k_-^{-2})\right]\quad\text{при } P\to\infty_-;$$

3) на $\Gamma\setminus\{\infty_\pm\}$ выполняется уравнение $\mathscr{D}\psi=0$.

Как и в случае оператора Шредингера, данные $(\Gamma,\infty_\pm,k_\pm,D)$ для дивизора D общего положения однозначно задают функцию ψ, удовлетворяющую условиям 1 и 2, и по этой функции строится единственный оператор $\mathscr{D}$ такой, что $\mathscr{D}\psi=0$:

$$U=-\xi_2^+,\quad V=\xi_1^-.$$

Опять же, как и в случае оператора Шредингера, эти потенциалы в общем случае квазипериодичны. Но когда они периодические, функции $\psi(x,y,P)$ являются функциями Флоке с квазиимпульсами, (локально) голоморфно зависящими от точки P.

Если существует такая голоморфная инволюция $\sigma:\Gamma\to\Gamma$, что

$$\sigma(\infty_\pm)=\infty_\pm,\quad \sigma(k_\pm)=-k_\pm,$$

и существует мероморфный дифференциал ω с нулями в точках $D+\sigma(D)$ и двумя полюсами в отмеченных точках $\infty_\pm$ с главными частями $\pm k_\pm^2(1+O(k_\pm^{-1}))dk_\pm^{-1}$, то потенциалы U и V совпадают: $U=V$ [2].

Если же существует антиголоморфная инволюция $\tau:\Gamma\to\Gamma$ такая, что

$$\tau(\infty_\pm)=\infty_\mp,\quad \tau(k_\pm)=-\bar k_\mp,$$

и существует мероморфный дифференциал ω' с нулями в точках $D+\tau(D)$ и двумя полюсами в точках $\infty_\pm$ с главными частями $k_\pm^2\big(1+O\big(k_\pm^{-1}\big)\big)dk_\pm^{-1}$, то потенциалы U и V вещественные: $U=\overline{U},V=\overline{V}$ [2].

Для периодических операторов эти инволюции на языке квазиимпульсов устроены просто:

$$\sigma(k_1,k_2)=(-k_1,-k_2),\quad \tau(k_1,k_2)=(\bar k_1,\bar k_2),$$

и наличие таких инволюций, как показано в [8], немедленно вытекает из спектральных свойств оператора Дирака[2]. Очевидно, что в этом случае инволюции σ и τ коммутируют.

Замечание. В работах [2, 8] мы допустили неаккуратность, наложив слишком сильные условия на дифференциалы ω и ω', потребовав, чтобы они имели в точках $\infty_\pm$ главные части $\bigl(\pm k^2 + O\bigl(k_\pm^{-1}\bigr)\bigr)dk_\pm^{-1}$ и $\bigl(k_\pm^2 + O\bigl(k_\pm^{-1}\bigr)\bigr)dk_\pm^{-1}$. Однако предложенные доказательства проходят без изменений и при более слабых условиях, указанных выше. Действительно,

а) дифференциал $\psi_1(P)\psi_2(\sigma(P))\omega$ имеет два полюса первого порядка в точках $\infty_\pm$, и сумма вычетов есть $-2\pi i(\xi_2^+ + \xi_1^-) = 0$, что влечет $U = V$;

б) дифференциалы $\psi_1(P)\overline{\psi_1(\tau(P))}\omega'$ и $\psi_2(P)\overline{\psi_2(\tau(P))}\omega'$ имеют полюсы первого порядка в точках $\infty_\pm$, и суммы вычетов равны $2\pi i\bigl(\xi_1^- - \bar{\xi}_1^-\bigr) = 0$ и $2\pi i(\xi_2^+ - \bar{\xi}_2^+) = 0$ соответственно, что влечет $U = \overline{U}$ и $V = \overline{V}$.

Продемонстрируем эти инволюции σ и τ на следующем простом примере.

Пусть потенциал $U = V = c$ равен вещественной ненулевой постоянной c. Тогда спектральная кривая есть комплексная проективная прямая $\Gamma = \mathbb{C}P^1$, реализованная как λ-плоскость, пополненная бесконечно удаленной точкой $\lambda = \infty$. На Γ выделены две точки ∞_+, в которой $\lambda = \infty$, и ∞_-, в которой $\lambda = 0$. В окрестностях этих точек зададим локальные параметры $k_\pm^{-1}$ по формулам

$$k_+ = \lambda, \quad k_- = -\frac{c^2}{\lambda}.$$

Функция ψ имеет вид

$$\psi = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda - c}\exp\bigl(\lambda z - \frac{c^2}{\lambda}\bar{z}\bigr) \\ \frac{c}{c-\lambda}\exp\bigl(\lambda z - \frac{c^2}{\lambda}\bar{z}\bigr) \end{pmatrix},$$

дивизор D состоит из одной точки $\lambda = c$:

$$D = c,$$

а инволюции σ и τ задаются формулами

$$\sigma(\lambda) = -\lambda, \quad \tau(\lambda) = \frac{c^2}{\bar{z}}.$$

Дифференциалы ω и ω' суть

$$\omega = \left(1 - \frac{c^2}{\lambda^2}\right)d\lambda, \quad \omega' = \frac{(\lambda - c)^2}{\lambda^2}d\lambda.$$

§ 3. Некоторые сведения об алгебраических кривых с особенностями

Мы изложим некоторые необходимые сведения об алгебраических кривых с особенностями, следуя в основном книге Ж. Серра [9].

В дальнейшем мы будем под кривой понимать (комплексную) алгебраическую кривую. Считая, что алгебраические многообразия вложены в $\mathbb{C}P^n$, мы говорим, что отображение между ними *регулярно*, если оно задается многочленами от однородных координат.

[2]Отметим, что в [8] в формулировке п. 2 предложения 3 надо добавить условие вещественности потенциалов U и V, которое используется при доказательстве.

Если кривая Γ' имеет особенности, то существует ее нормализация

$$\pi : \Gamma \to \Gamma',$$

где

1) Γ — неособая кривая, в которой выделено конечное множество точек S с отношением эквивалентности $\sim$ на этом множестве;

2) отображение π переводит S в точности в множество особых точек S' кривой Γ', причем прообраз каждой точки из S' состоит из класса эквивалентных точек;

3) отображение $\pi : \Gamma \setminus S \to \Gamma' \setminus S'$ является гладкой взаимно однозначной проекцией;

4) любое регулярное отображение $F : X \to \Gamma'$ несингулярного многообразия X с всюду плотным образом $F(X) \subset \Gamma'$ пропускается через Γ: $F = \pi G$ для некоторого регулярного отображения $G : X \to \Gamma$.

Напомним, что каждой точке P алгебраического многообразия сопоставляется ее локальное кольцо $\mathscr{O}_P$, которое определяется как кольцо функций на многообразии, индуцированное рациональными функциями f/g, где f и g — однородные многочлены одинаковой степени и $g(P) \neq 0$ (при этом подразумевается, что многообразие вложено в $\mathbb{C}P^n$). Точка является неособой в точности тогда, когда ее локальное кольцо целозамкнуто.

Для точки P из $\Gamma' \setminus S'$ ее локальное кольцо $\mathscr{O}'_P$ есть $\mathscr{O}_{\pi^{-1}(P)} = \mathscr{O}_P$. Если $P \in S' \subset \Gamma'$, то $\mathscr{O}'_P$ — это подкольцо кольца

$$\mathscr{O}_P = \bigcap_{Q \to P} \mathscr{O}_Q,$$

причем кольцо $\mathscr{O}'_P$ отлично от $\mathscr{O}_P$ и для некоторого целого n выполняются включения

$$\mathbb{C} + R_P^n \subset \mathscr{O}'_P \subset \mathbb{C} + R_P \subset \mathscr{O}_P,$$

где R_P — идеал кольца $\mathscr{O}_P$, состоящий из всех функций, принимающих нулевое значение во всех точках из $\pi^{-1}(P)$.

Существует частный случай построения кривой с особенностями Γ_D по неособой кривой Γ и эффективному дивизору $D = \sum n_P P$ степени $\deg D = \sum n_P \geq 2$ на кривой Γ. Обозначим через S множество точек из Γ с $n_P > 0$ (носитель дивизора) и положим $\Gamma_D = (\Gamma \setminus S) \cup \{\mathrm{pt}\}$, т. е. сожмем все точки из S в одну (обозначим эту точку через Q). Через C_Q обозначим идеал, образованный функциями f, имеющими в точках $P \in S$ нули кратности, не меньшей чем n_P. Теперь положим $\mathscr{O}'_Q = \mathbb{C} + C_Q$ (множество всех функций, принимающих равные значения в точках $P \in S$ и имеющих в этих точках нулевые производные вплоть до порядка $(n_P - 1)$). Естественная проекция $\Gamma \to \Gamma_D$ будет нормализацией. При $D = P_1 + \cdots + P_n$, где все точки P_i попарно различны, кривая Γ будет иметь n-кратную точку в Q с различными касательными.

Каждой особой точке $P \in \Gamma'$ отвечает целочисленный инвариант

$$\delta_P = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_P / \mathscr{O}'_P < \infty.$$

Очевидно, что для кривой вида Γ_D в особой точке Q имеем

$$\delta_Q = \dim \mathscr{O}_Q / (\mathbb{C} + C_Q) = \dim \mathscr{O}_Q / C_Q - 1 = \deg D - 1.$$

Род неособой кривой Γ (нормализации) называется *геометрическим родом* кривой Γ' и обозначается через $p_g(\Gamma')$, а величина

$$p_a(\Gamma') = p_g(\Gamma') + \sum_{P\in S} \delta_P$$

называется *арифметическим родом кривой* Γ'.

Отметим, что мероморфная 1-форма (дифференциал) ω на кривой Γ называется *регулярным дифференциалом в точке* $P \in \Gamma'$, если

$$\sum_{P\to Q} \operatorname{Res}(f\omega) = 0$$

для всех функций $f \in \mathscr{O}'_Q$. Естественно, регулярных дифференциалов на Γ' больше, чем регулярных дифференциалов на Γ: они могут иметь полюсы в прообразах особых точек. Например, для кривой Γ_D формы, регулярные в особой точке Q, выделяются условиями: форма ω может иметь полюсы только в точках $P \in D$, причем их порядок не превосходит n_P, и

$$\sum_{P\to Q} \operatorname{Res}\omega = 0.$$

Размерность пространства регулярных дифференциалов равна, как легко видеть, $p_a(\Gamma')$.

Пусть носитель эффективного дивизора D на кривой Γ' не пересекается с носителем дивизора S'. Обозначим через $L(D)$ пространство мероморфных функций на Γ' с полюсами только в точках из $D = \sum n_P P$ и порядка $\le n_P$, а через $\Omega'(D)$ — пространство регулярных дифференциалов на Γ', имеющих в каждой точке $P \in S$ нуль порядка, не меньшего чем n_P. Теорема Римана — Роха утверждает, что

$$\dim L(D) - \dim \Omega'(D) = \deg D + 1 - p_a(\Gamma').$$

Для дивизора D общего положения имеем $\dim \Omega'(D) = 0$, и теорема Римана — Роха принимает вид

$$\dim L(D) = \deg D + 1 - p_a(\Gamma').$$

§ 4. Операторы Шредингера и Дирака, отвечающие особым спектральным кривым

Мы рассмотрим кривые вида $\Gamma_{B_1,\dots,B_n}$, которые последовательно строятся по эффективным дивизорам $B_1,\dots,B_n$ и кривой Γ посредством той же процедуры, которая строит кривую Γ_D по Γ и D. Естественно, мы предполагаем, что дивизоры B_i, $i = 1,\dots,n$, имеют попарно не пересекающиеся носители.

Теорема 1. 1. *Пусть* $\Gamma' = \Gamma_{B_1,\dots,B_n}$ *— особая кривая,* $\pi : \Gamma \to \Gamma'$ *— ее нормализация,* $S_1,\dots,S_n$ *— носители дивизоров* $B_1,\dots,B_n$ *и* $Q_1,\dots,Q_n$ *— особые точки кривой* Γ': $\pi(S_i) = B_i$, $i = 1,\dots,n$.

Пусть ∞_+, ∞_- *— пара различных точек из* $\Gamma' \setminus \{Q_1,\dots,Q_n\}$ *с такими локальными параметрами* $k_\pm^{-1}$ *в их окрестностях, что* $k_\pm^{-1}(\infty_\pm) = 0$, *и* $D = P_1 + \dots + P_g$ *— эффективный дивизор общего положения на* $\Gamma \setminus \{Q_1,\dots,Q_n,\infty_+,\infty_-\}$ *степени* $g = p_a(\Gamma')$.

Тогда существует единственная функция $\psi = \psi(x, y, P)$, $P \in \Gamma'$, *мероморфная всюду, кроме точек* ∞_+ *и* ∞_-, *в которых она имеет асимптотики*

$$\psi(x, y, P) \approx e^{k_+ z}\big(1 + \xi(x, y)k_+^{-1} + O\big(k_+^{-2}\big)\big) \quad \text{при } P \to \infty_+,$$

$$\psi(x, y, P) \approx c(x, y)e^{k_- \bar{z}}\big(1 + O\big(k_-^{-1}\big)\big) \quad \text{при } P \to \infty_-$$

и полюсы только в точках из $D = P_1 + \dots + P_g = \sum n_P P$, *причем порядка, не большего чем* n_P.

Эта функция ψ *удовлетворяет уравнению* $L\psi = 0$, *где оператор* $L = \partial\bar{\partial} + A(z, \bar{z})\bar{\partial} + u(z, \bar{z})$ *однозначно восстанавливается по* ψ:

$$A = -\frac{\partial \log c}{\partial z}, \quad u = -\frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}}.$$

2. *Пусть на кривой* Γ' *существует голоморфная инволюция* σ, *которая сохраняет отмеченные точки* $\infty_\pm$, *обращая локальные параметры:* $\sigma(\infty_\pm) = \infty_\pm$, $\sigma(k_\pm^{-1}) = -k_\pm^{-1}$. *Пусть при этом все особые точки суть неподвижные точки инволюции и инволюция сохраняет ветви кривой в этих точках* (*т. е. при подъеме инволюции на кривую* Γ *точки из* S *неподвижны под действием инволюции*).

Если на кривой $\Gamma_{2B_1,\dots,2B_n}$ *существует дифференциал* ω, *регулярный всюду, кроме точек* ∞_+ *и* ∞_-, *в которых он имеет полюсы первого порядка с вычетами* ± 1, *и имеющий нули в точности в точках* $D + \sigma(D)$, *то оператор* L *является потенциальным:*

$$L = \partial\bar{\partial} + u.$$

3. *Если, кроме того, на кривой имеется такая антиголоморфная инволюция* $\tau : \Gamma' \to \Gamma'$, *что* $\sigma\tau = \tau\sigma$, $\tau(D) = D$, $\tau(\infty_\pm) = \infty_\mp$, $\tau(k_\pm) = \bar{k}_\mp$, *то потенциал* u *является вещественной функцией.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что для несингулярной (гладкой) кривой утверждение 1 — это теорема Дубровина — Кричевера — Новикова [3], а утверждения 2 и 3 получены А. П. Веселовым и С. П. Новиковым [6]. Они уже приводились нами в § 2.

1. Для гладкой кривой рода g построение функции ψ с указанными свойствам проведено в [3]. Применим эту конструкцию к нормализованной кривой Γ и дивизорам $D_1 = P_1 + \dots + P_l$, $D_2 = P_1 + \dots + P_{l-1} + P_{l+1}, \dots, D_{g-l+1} = P_1 + \dots + P_{l-1} + P_g$, где $l = p_g(\Gamma')$ — род кривой Γ. Получим функции $\psi_1, \dots, \psi_{g-l+1}$. Искомая функция ψ имеет вид

$$\psi = c_1\psi_1 + \dots + c_{g-l+1}\psi_{g-l+1},$$

где коэффициенты c_i находятся из двух условий:

(а) функция ψ опускается до функции на Γ' (это $(g - l) = (p_a(\Gamma') - p_g(\Gamma'))$ уравнений);

(б) выполняется асимптотика $e^{k_+ z}$ в точке ∞_+.

Например, при $B = Q_1 + \dots + Q_{g-l+1}$ условие (а) записывается как

$$\psi(Q_1) = \psi(Q_2), \quad \psi(Q_1) = \psi(Q_3), \dots, \psi(Q_1) = \psi(Q_{g-l+1}),$$

а при $B = mQ$ оно принимает вид

$$\frac{\partial \psi(Q)}{\partial w} = \dots = \frac{\partial^{m-1}\psi(Q)}{\partial^{m-1} w} = 0,$$

где w — локальный параметр на кривой Γ в окрестности точки Q. Условие (б) всегда выглядит одинаково:

$$c_1 + \dots + c_{g-l+1} = 1.$$

Единственность функций ψ_i следует из теоремы Римана — Роха и доказана в [3]. Отсюда с учетом условий на c_i вытекает единственность функции ψ для дивизора D общего положения. При указанных значениях A и u функция $L\psi$ пропорциональна ψ, но ее асимптотика при $P \to \infty_+$ имеет вид $\alpha(z,\bar{z})e^{k_+ z}k_+^{-1}$ и, следовательно, эта функция тождественно равна нулю [3].

2. Рассмотрим теперь форму $\psi(P)\psi(\sigma(P))\omega(P)$. Она мероморфна и в точках ∞_+ и ∞_- имеет вычеты 1 и $-c^2$ соответственно. Пусть Q_i — особая точка кривой Γ', которой отвечает дивизор $B_i = \sum n_Q Q$. Так как функция $\psi(P)\psi(\sigma(P))$ инвариантна относительно инволюции, в окрестности неподвижной точки Q этой инволюции она раскладывается в ряд по четным степеням локального параметра k, где $k(Q) = 0$, $\sigma(k) = -k$:

$$\psi(P)\psi(\sigma(P)) = \psi(Q)^2 + a_1 k^2 + \dots + a_n k^{2n} + \dots, \quad k(P) = k,$$

причем $a_j = 0$, если $j < n_P$ (это следует из того, что функция ψ на Γ опускается до функции на Γ'). Поскольку форма ω регулярна на кривой $\Gamma_{2B_1,\dots,2B_n}$, она имеет в точке P полюс порядка, не превосходящего $2n_P$:

$$\omega = b_{2n_P}\frac{dk}{k^{2n_P}} + \dots + b_1\frac{dk}{k} + \text{ регулярная часть.}$$

Следовательно, имеет место формула для вычета

$$\mathrm{Res}[\psi(P)\psi(\sigma(P))\omega]|_{P=Q} = b_1(Q)\psi(Q_i)^2.$$

Согласно условию регулярности дифференциала ω в точке $Q_i \in \Gamma'$ сумма вычетов дифференциала ω в прообразах этой точки равна нулю:

$$\psi(Q_i)^2 \sum_{Q\in S_i} b_1(Q) = 0.$$

Значит, любая особая точка Q_i не дает вклада в сумму вычетов дифференциала $\psi(P)\psi(\sigma(P))\omega$, и так как сумма вычетов этого дифференциала равна $1 - c^2 = 0$, то $c^2 = 0$ и $A = -\frac{\partial \log c}{\partial z} = 0$.

3. Для несингулярных кривых это утверждение доказано А. П. Веселовым и С. П. Новиковым, и в сингулярном случае их доказательство проходит без изменений следующим образом. Рассмотрим разложение функции ψ в точке ∞_-:

$$\psi \sim ce^{k_-\bar{z}}\big(1 + \eta k_-^{-1} + O\big(k_-^{-2}\big)\big).$$

С учетом равенств $L = \partial\bar{\partial} + u$ и $c^2 = 1$ получаем

$$L\psi = ce^{k_-\bar{z}}\big((u + \partial\eta) + O\big(k_-^{-1}\big)\big) = 0,$$

что влечет формулу для потенциала u в терминах асимптотики функции ψ в окрестности точки ∞_-:

$$u = -\partial\eta.$$

Так как функция ψ однозначно восстанавливается по данным $\Gamma', \infty_\pm, k_\pm, D$, из этой теоремы единственности следует равенство

$$\overline{\psi(\tau(P))} = \bar{c}\psi(P) = c\psi(P).$$

В частности, $\xi = \bar\eta$, и, сравнивая две формулы для u:

$$u = -\bar\partial\xi = -\partial\eta,$$

заключаем, что потенциал u вещественный: $u = \bar u$.

Теорема доказана.

Существенным в этой теореме является условие на дифференциал ω, который должен быть регулярным не на кривой $\Gamma_{B_1,\dots,B_n}$, а на кривой $\Gamma_{2B_1,\dots,2B_n}$. С учетом этого обстоятельства для операторов Дирака доказательство следующей теоремы получается по указанной для оператора Шредингера схеме модификацией доказательства для несингулярного случая (см. [2])[3].

Теорема 2. 1. *Пусть* $\Gamma' = \Gamma_{B_1,\dots,B_n}$ *— особая кривая,* $\pi : \Gamma \to \Gamma'$ *— ее нормализация,* $S_1,\dots,S_n$ *— носители дивизоров* $B_1,\dots,B_n$ *и* $Q_1,\dots,Q_n$ *— особые точки кривой* Γ': $\pi(S_i) = B_i$, $i = 1,\dots,n$.

Пусть ∞_+, ∞_- *— пара различных точек из* $\Gamma' \setminus \{Q_1,\dots,Q_n\}$ *с такими локальными параметрами* $k_\pm^{-1}$ *в их окрестностях, что* $k_\pm^{-1}(\infty_\pm) = 0$, *и* $D = P_1 + \dots + P_{g+1}$ *— эффективный дивизор общего положения на* $\Gamma \setminus \{Q_1,\dots,Q_n,\infty_+,\infty_-\}$ *степени* $g + 1 = p_a(\Gamma') + 1$.

Тогда существует единственная вектор-функция $\psi : \Gamma' \to \mathbb{C}$, *мероморфная всюду, кроме точек* ∞_+ *и* ∞_-, *в которых она имеет асимптотики*

$$\psi(x,y,P) \approx e^{k_+ z}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\xi_1^+\\ \xi_2^+\end{pmatrix}k_+^{-1} + O\big(k_+^{-2}\big)\right] \quad \text{при } P \to \infty_+,$$

$$\psi(x,y,P) \approx e^{k_- \bar z}\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\xi_1^-\\ \xi_2^-\end{pmatrix}k_-^{-1} + O\big(k_-^{-2}\big)\right] \quad \text{при } P \to \infty_-$$

и имеет полюсы только в точках из $D = P_1 + \dots + P_{g+1} = \sum n_P P$, *причем порядка, не большего чем* n_P.

Эта функция ψ *удовлетворяет уравнению* $\mathscr{D}\psi = 0$, *где оператор*

$$\mathscr{D} = \begin{pmatrix}0 & \partial\\ -\bar\partial & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}U & 0\\ 0 & V\end{pmatrix}$$

однозначно восстанавливается по ψ:

$$U = -\xi_2^+, \quad V = \xi_1^-.$$

2. *Пусть на кривой* Γ' *существует голоморфная инволюция* σ, *которая сохраняет отмеченные точки* $\infty_\pm$, *обращая в них локальные параметры:* $\sigma(\infty_\pm) = \infty_\pm$, $\sigma\big(k_\pm^{-1}\big) = -k_\pm^{-1}$. *Пусть при этом все особые точки — неподвижные точки инволюции и инволюция сохраняет ветви кривой (т. е. при подъеме инволюции на кривую* Γ *точки из* S *неподвижны под действием инволюции).*

Если на кривой $\Gamma_{2B_1,\dots,2B_n}$ *существует дифференциал* ω, *регулярный всюду кроме точек* ∞_+ *и* ∞_-, *в которых он имеет полюсы второго порядка с главными частями вида* $k_\pm^2\big(1 + O\big(k_\pm^{-1}\big)\big)dk_\pm^{-1}$, *и имеющий нули в точности в точках* $D + \sigma(D)$, *то потенциалы* U *и* V *совпадают:* $U = V$.

3. *Пусть на кривой* Γ' *существует антиголоморфная инволюция* $\tau : \Gamma' \to \Gamma'$, *которая переставляет точки* ∞_+ *и* ∞_-:

$$\tau(\infty_\pm) = \infty_\mp, \quad \tau(k_\pm) = -\bar k_\mp,$$

[3]Хотя привести формулировку этой теоремы несложно с учетом теоремы 1 и результатов, изложенных в п. 2.3, мы приводим ее для полноты изложения.

и при подъеме на Γ *сохраняет все точки из* $S_1 \cup \dots \cup S_n$*, изменяя локальные параметры* k *в их окрестностях по формуле* $\tau(k) = -\bar{k}$.

Пусть на кривой $\Gamma_{2B_1,\dots,2B_n}$ *существует дифференциал* ω'*, регулярный всюду, кроме точек* ∞_+ *и* ∞_-*, в которых он имеет полюсы второго порядка с главными частями вида* $k_\pm^2\bigl(1 + O\bigl(k_\pm^{-1}\bigr)\bigr)dk_\pm^{-1}$*, и имеющий нули в точности в точках* $D + \sigma(D)$*. Тогда потенциалы* U *и* V *вещественные:*

$$U = \overline{U}, \quad V = \overline{V}.$$

Замечания. 1. Потенциальные операторы Шредингера, отвечающие спектральным кривым с двойными точками, были описаны в работе А. П. Веселова и С. П. Новикова [6] как получающиеся в простом пределе при сжатии инвариантных циклов на несингулярных кривых в точки (см. рис. 1, где это продемонстрировано на примере деформации эллиптической кривой, при этом под инволюцией кривой следует понимать поворот на угол π вокруг горизонтальной прямой, лежащей в плоскости рисунка, а правая стрелка указывает отображение нормализации).

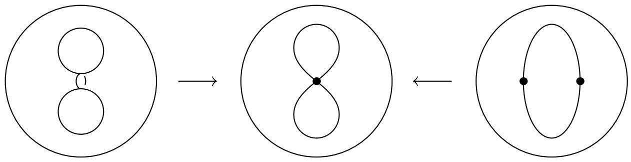

Рис. 1. Двойная точка с инвариантными ветвями.

Эти потенциалы описываются в терминах тэта-функций Прима двулистных накрытий особых кривых. Кривая Γ имеет двойные точки, которые неподвижны под действием инволюции, при этом ветви не переставляются инволюцией (т. е. на нормализации кривой прообразы этих точек неподвижны под действием инволюции, см. рис. 1). В этом случае можно определить полное многообразие Прима как главно поляризованное абелево многообразие в пределе при вырождении несингулярных кривых Γ. В таком пределе многообразие Якоби кривой Γ/σ будет неполным абелевым многообразием, т. е. иметь вид $\mathbb{C}^g/Z$, где решетка Z имеет ранг, меньший чем $2g$.

Если же ветви в двойной точке переставляются инволюцией (см. рис. 2), то полученное в пределе многообразие Прима не будет полным, а вот полученное в пределе многообразие Якоби кривой Γ/σ будет полным.

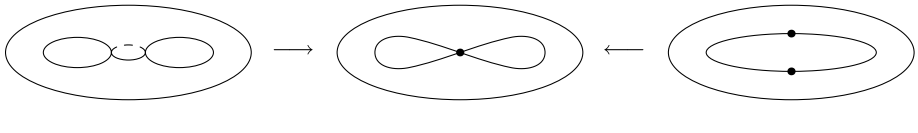

Рис. 2. Двойная точка с переставляющимися ветвями.

2. Как мы уже отмечали ранее (в § 2), для несингулярной кривой, отвечающей конечнозонному потенциальному оператору Шредингера, выполняется равенство

$$p_a(\Gamma) = 2p_a(\Gamma/\sigma),$$

связывающее арифметические рода кривой и фактор-кривой по инволюции σ. Оно же верно для кривых с двойными точками. Пусть Γ_B — кривая такая, что

Γ — гиперэллиптическая кривая рода 2, σ — гиперэллиптическая инволюция, $\infty_\pm \cup B$ — шесть неподвижных точек инволюции σ: $(B = Q_1 + \dots + Q_4)$. Имеем $p_a(\Gamma_B) = p_g(\Gamma) + 3 = 5$, и Γ_B/σ — рациональная кривая (сфера) с четверной точкой. Следовательно, в этом примере

$$p_a(\Gamma') = 5, \quad p_a(\Gamma'/\sigma) = 3.$$

В этом случае потенциалы оператора Шредингера выписываются в терминах многообразия Прима двулистного накрытия $\Gamma' \to \Gamma'/\sigma$. Это многообразие Прима изоморфно многообразию Якоби кривой Γ.

3. Заметим, что согласно теореме Кричевера [10] все гладкие вещественные потенциалы оператора Шредингера сколь угодно хорошо аппроксимируются конечнозонными на нулевом уровне энергии, причем эта аппроксимация порождается аппроксимацией их спектров Флоке несингулярными спектральными кривыми конечного рода. Для оператора Дирака аналог этой теоремы не доказан, хотя ясно, что его доказательство может быть получено некоторым изменением рассуждений И. М. Кричевера.

4. Одномерные операторы Шредингера $L = \partial_x^2 + u$ имеют гиперэллиптические спектральные кривые, которые параметризуют блоховские функции при всех значениях энергии [11]. Вырождения этих кривых (в классе гиперэллиптических) приводят к солитонным потенциалам на фоне конечнозонных [12].

Например, на языке § 3 простейший рациональный потенциал $u(x) = 2x^{-2}$ строится по рациональной кривой $\Gamma : w^2 = E$ и точке P вида $E = w = 0$. Его спектральная кривая — это Γ_{2P}, а спектральная кривая потенциала $u(x) = 2/\cosh^2(x)$ имеет вид $\Gamma_{Q+\sigma(Q)}$, где σ — гиперэллиптическая инволюция и $Q \neq \sigma(Q)$.

5. Отметим, что операторы $L = i\partial_y - \partial_x^2 + u$, спектральные кривые которых (на нулевом уровне энергии) сингулярны и нормализуются рациональной кривой, описаны в работе [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Taimanov I. A.* Modified Novikov–Veselov equation and differential geometry of surfaces // Translations of the Amer. Math. Soc. Ser. 2. 1997. V. 179. P. 133–151.
2. *Тайманов И. А.* Представление Вейерштрасса замкнутых поверхностей в $\mathbb{R}^3$ // Функцион. анализ и его прил. 1998. Т. 32, № 4. С. 49–62.
3. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. С. 15–18.
4. *Новиков С. П.* Двумерные операторы Шредингера в периодических полях // Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 23. С. 3–32. (Итоги науки и техники).
5. *Kuchment P.* Floquet theory for partial differential equations. Basel: Birkhäuser, 1993.
6. *Веселов А. П., Новиков С. П.* Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Потенциальные операторы // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 4. С. 784–788.
7. *Веселов А. П., Новиков С. П.* Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шредингера. Явные формулы и эволюционные уравнения // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 1. С. 20–24.
8. *Тайманов И. А.* Конечнозонные решения модифицированных уравнений Веселова — Новикова, их спектральные свойства и приложения // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 6. С. 1382–1393.
9. *Серр Ж.* Алгебраические группы и поля классов. М.: Мир, 1968.
10. *Кричевер И. М.* Спектральная теория двумерных периодических операторов и ее приложения // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, № 2. С. 121–184.
11. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // Успехи мат. наук. 1976. Т. 31, № 1. С. 55–136.

12. *Кричевер И. М.* Потенциалы с нулевым коэффициентом отражения на фоне конечнозонных потенциалов // Функцион. анализ и его прил. 1975. Т. 9, № 2. С. 77–79.

13. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Маланюк Т. М., Маханьков В. Г.* Точные решения нестационарного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1988. Т. 19, № 3. С. 579–621.

Статья поступила 29 октября 2002 г.

Тайманов Искандер Асанович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
taimanov@math.nsc.ru