Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 517.535+515.162+515.164

СПОНТАННАЯ ХИРУРГИЯ НА ЗАЦЕПЛЕНИИ БОРРОМЕЕВЫ КОЛЬЦА

М. Г. Пашкевич

Аннотация: Изучаются конические многообразия, сингулярные множества которых получены орбифолдной и спонтанной хирургиями на компонентах зацепления Борромеевы кольца. Устанавливается существование геометрических структур на этих многообразиях. Для многообразий с гиперболической структурой получено интегральное представление для объемов.

Ключевые слова: хирургия Дена, зацепление, конической многообразие, Борромеевы кольца

Введение

В работе изучаются конические многообразия, полученные орбифолдной и спонтанной хирургиями на компонентах зацепления Борромеевы кольца. Устанавливается существование геометрических структур на этих многообразиях. Для конических многообразий с гиперболической структурой выводятся метрические свойства и интегральное представление для объемов.

Ранее в статье Х. М. Хилдена, М. Т. Лозано, Х. М. Монтезиноса-Амилибии [1] были рассмотрены геометрические структуры конических многообразий, сингулярные множества которых получены спонтанной хирургией на узле «восьмерка», и найдены интегральные формулы для объемов этих многообразий.

В первом пункте статьи рассматривается коническое многообразие, сингулярное множество которого получено спонтанной хирургией на всех трех компонентах зацепления Борромеевы кольца. Доказана теорема о существовании гиперболической, евклидовой и сферической структур на таком многообразии. Для конического многообразия с гиперболической структурой получена теорема тангенсов и синусов-косинусов.

Во втором и третьем пунктах показано существование гиперболических структур и доказаны теоремы тангенсов и синусов-косинусов для конических многообразий, сингулярные множества которых получены спонтанной хирургией на одной и на двух компонентах зацепления Борромеевы кольца соответственно.

Коме того, в статье найдены объемы указанных гиперболических конических многообразий. Показано, что фундаментальный многогранник гиперболического конического многообразия, полученного спонтанной хирургией на

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00104).

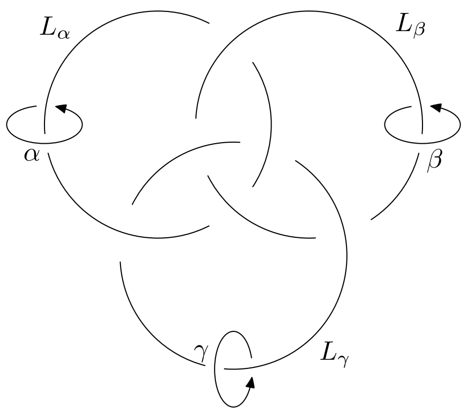

Рис. 1.

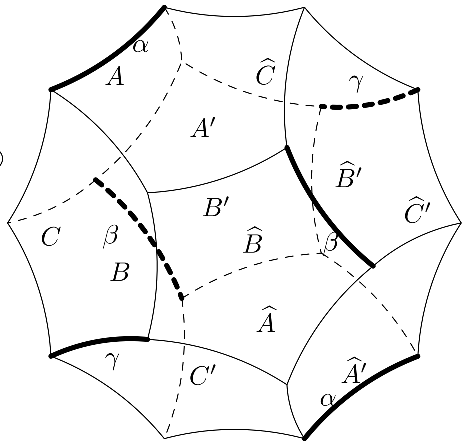

Рис. 2.

трех компонентах зацепления Борромеевы кольца, можно рассечь тремя взаимно перпендикулярными плоскостями на восемь равных кубов Ламберта, а фундаментальные многогранники двух других гиперболических конических многообразий аналогичным образом можно рассечь на восемь равных дважды усеченных тетраэдров. Объемы гиперболических куба Ламберта и дважды усеченного тетраэдра найдены Р. Келлехальц в терминах функции Лобачевского [2]. Интегральное представление для объема сферического куба Ламберта установлено Д. А. Деревниным и А. Д. Медных в [3]. В данной работе предложен новый подход, позволяющий получить результаты работ [2, 3] как частные случаи.

Автор благодарит профессора А. Д. Медных за постановку задачи и плодотворное обсуждение полученных результатов, а также рецензента за конструктивные замечания.

1. Спонтанная хирургия на трех компонентах зацепления Борромеевы кольца

Пусть O — орбифолд с сингулярным множеством Борромеевы кольца (рис. 1), где $\alpha = \frac{2\pi}{k}$, $\beta = \frac{2\pi}{l}$, $\gamma = \frac{2\pi}{m}$ — углы вдоль трех компонент, длины которых равны $L_\alpha, L_\beta, L_\gamma$ соответственно.

Известно, что фундаментальным многогранником орбифолда O является додекаэдр $D(\alpha,\beta,\gamma)$, у которого все двугранные углы, за исключением существенных α,β,γ, прямые (рис. 2). При $0 \leq \alpha,\beta,\gamma < \pi$ додекаэдр $D(\alpha,\beta,\gamma)$ реализуется в гиперболическом пространстве (см. [4]), т. е. орбифолд O имеет гиперболическую структуру (см. подробнее в [5]), при $\alpha = \beta = \gamma = \pi$ представляет из себя евклидов параллелепипед или куб, т. е. орбифолд O имеет евклидову структуру (см. подробнее в [6]). А при $\pi < \alpha,\beta,\gamma < 2\pi$ додекаэдр $D(\alpha,\beta,\gamma)$ реализуется в сферическом пространстве (см. [7]), т. е. орбифолд O имеет сферическую структуру.

Заметим, что если k, l, m — произвольные положительные числа, то мы имеем дело с коническим многообразием. Далее будем работать только с коническими многообразиями (см. [1]).

Рассмотрим додекаэдр $D(\alpha,\beta,\gamma)$ в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$. Устремляя α,β,γ к нулю, получаем предельный многогранник $\overline{D}$, изображенный

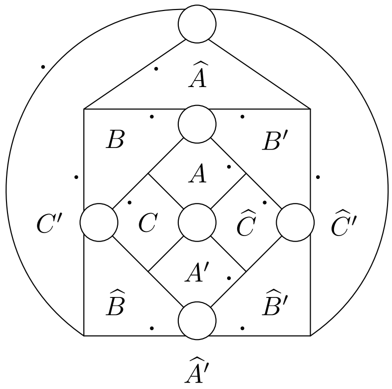

Рис. 3.

на рис. 3, где кружочками обозначены идеальные вершины.

Отрежем орисферические окрестности идеальных вершин полученного многогранника и отождествим его грани по правилу

$$\begin{aligned} &A \to A', \quad \widehat{A} \to \widehat{A}', \\ &B \to B', \quad \widehat{B} \to \widehat{B}', \\ &C \to C', \quad \widehat{C} \to \widehat{C}', \end{aligned} \tag{1}$$

Получим компактное многообразие $\overline{O}$, край которого образован тремя торическими компонентами, а внутренность гомеоморфна дополнению к Борромеевым кольцам до $\mathbb{S}^3$ (см. подробнее в [6]).

С помощью орбифолдной хирургии с параметрами $(k,0)$, $(l,0)$, $(m,0)$ на компонентах зацепления Борромеевы кольца, перестроим компактное многообразие $\overline{O}$ в коническое многообразие, которое обозначим через

$$O^{k,l,m} = B((k,0),(l,0),(m,0)).$$

С помощью спонтанной хирургии с параметрами $(0,k)$, $(0,l)$, $(0,m)$ на компонентах зацепления Борромеевы кольца перестроим $\overline{O}$ в коническое многообразие, которое обозначим через $O_{k,l,m} = B((0,k),(0,l),(0,m))$. Сингулярным множеством каждого из конических многообразий $O^{k,l,m}$ и $O_{k,l,m}$ является зацепление Борромеевы кольца, изображенное на рис. 1.

При орбифолдной хирургии торическая компонента края многообразия $\overline{O}$ заклеивается полноторием с помощью тождественного гомеоморфизма (см. подробнее в [6]). Такой хирургии соответствует следующая перестройка многогранника $\overline{D}$: на место отрезанных окрестностей идеальных вершин многогранника $\overline{D}$ вклеиваем конструкции, подобные конструкции вида 1, изображенной на рис. 4 для идеальной вершины, в которой сходятся грани $A, A', C, \widehat{C}$.

При спонтанной хирургии торическая компонента края многообразия $\overline{O}$ заклеивается полноторием с помощью гомеоморфизма, меняющего местами параллель и меридиан (см. подробнее в [1]). Такой хирургии соответствует следующая перестройка многогранника $\overline{D}$: на место отрезанных окрестностей идеальных вершин многогранника $\overline{D}$ вклеиваем конструкции, подобные конструкции вида 2, изображенной на рис. 5 для идеальной вершины, в которой сходятся грани $A, A', C, \widehat{C}$.

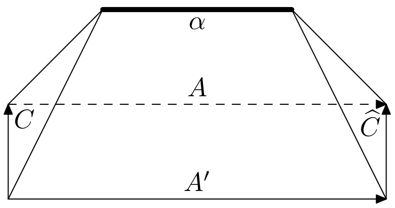

Рис. 4.

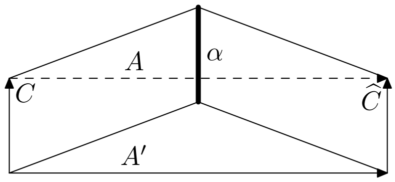

Рис. 5.

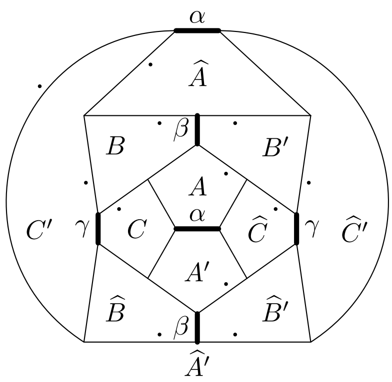

Рис. 6.

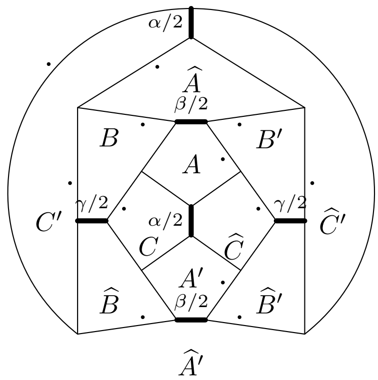

Рис. 7.

Делая перестройку многогранника $\overline{D}$, сохраняем отождествление граней, указанное на рис. 3.

Вклеивая только конструкции, подобные конструкции вида 1, получаем многогранник, изображенный на рис. 6, где α, β, γ — существенные углы при ребрах, длины которых равны $\frac{L_\alpha}{2}$, $\frac{L_\beta}{2}$, $\frac{L_\gamma}{2}$. Несложно заметить, что это додекаэдр $D(\alpha, \beta, \gamma)$. Указанное на рис. 6 отождествление граней по правилу (1), дает орбифолд $O^{k,l,m}$ с сингулярным множеством Борромеевы кольца, изображенным на рис. 1. Таким образом, додекаэдр $D(\alpha, \beta, \gamma)$ является фундаментальным многогранником орбифолда $O^{k,l,m}$, полученного орбифолдной хирургией на всех компонентах зацепления Борромеевы кольца.

Вклеивая только конструкции, подобные конструкции вида 2, приходим к многограннику, изображенному на рис. 7, где $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ — существенные углы при ребрах, длины которых равны L_α, L_β, L_γ. Как и в предыдущем случае, убеждаемся что такой многогранник является додекаэдром $D(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2})$. Из рис. 7 видно, что суммарный конический угол многообразия, полученного в результате отождествлений $C \to C'$ и $\widehat{C} \to \widehat{C}'$, равен α, полученного в результате отождествлений $A \to A'$ и $\widehat{A} \to \widehat{A}'$, равен β, а полученного в результате отождествлений $B \to B'$ и $\widehat{B} \to \widehat{B}'$, равен γ, т. е. указанное на рис. 7 отождествление граней по правилу (1) дает коническое многообразие $O_{k,l,m}$ с сингулярным множеством Борромеевы кольца, изображенным на рис. 1. Таким образом, додекаэдр $D(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2})$ является фундаментальным многогранником конического многообразия $O_{k,l,m}$, полученного спонтанной хирургией на всех компонентах зацепления Борромеевы кольца, и реализуется в гиперболическом пространстве при $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 2\pi$, в евклидовом пространстве при $\alpha = \beta = \gamma = 2\pi$ и в сферическом — при $2\pi < \alpha, \beta, \gamma < 4\pi$.

В результате доказана

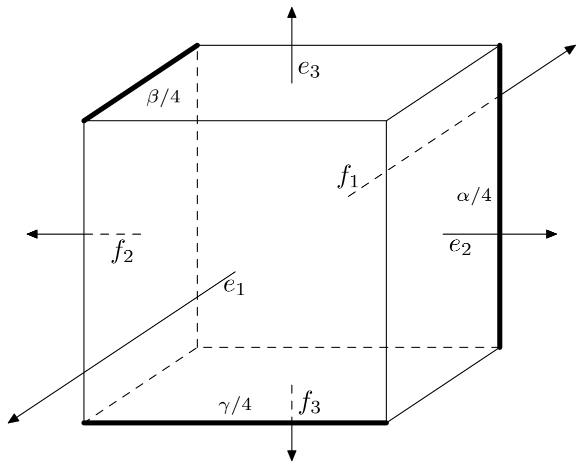

Рис. 8.

Теорема 1. *Коническое многообразие $O_{k,l,m} = B((0,k),(0,l),(0,m))$ является гиперболическим, если $k,l,m > 1$; евклидовым, если $k,l,m = 1$; сферическим, если $\frac{1}{2} < k,l,m < 1$.*

Замечание 1. С топологической точки зрения при указанном на рис. 7 отождествлении граней додекаэдра $D(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2})$ по правилу (1) получается трехмерный тор $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$, где $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Внутри тора содержатся три непересекающиеся окружности $S^1 \times \{1\} \times \{1\}$, $\{1\} \times S^1 \times \{1\}$, $\{1\} \times \{1\} \times S^1$, являющиеся компонентами сингулярного множества.

Следующая теорема устанавливает метрические свойства гиперболического конического многообразия $O_{k,l,m} = B((0,k),(0,l),(0,m))$.

Теорема 2. *Длины сингулярных геодезических L_α, L_β, L_γ гиперболического конического многообразия $O_{k,l,m} = B((0,k),(0,l),(0,m))$ с коническими углами $\alpha = \frac{2\pi}{k}$, $\beta = \frac{2\pi}{l}$, $\gamma = \frac{2\pi}{m}$ соответственно удовлетворяют следующим правилам:*

$$\frac{\operatorname{ch}\frac{L_\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{4}}\frac{\operatorname{sh}\frac{L_\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{4}}\frac{\operatorname{sh}\frac{L_\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{4}} = 1 \quad (\textit{правило синусов-косинусов}),$$

$$\frac{\operatorname{th}\frac{L_\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}} = \frac{\operatorname{th}\frac{L_\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}} = \frac{\operatorname{th}\frac{L_\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}} = T \quad (\textit{правило тангенсов}),$$

где T — положительный корень алгебраического уравнения

$$A^2B^2C^2T^4 + (1 + A^2 + B^2 + C^2)T^2 - 1 = 0, \quad A = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4},\ B = \operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\ C = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}.$$

Доказательство. Рассечем додекаэдр $D(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2})$ с существенными углами $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$, тремя взаимно перпендикулярными плоскостями на восемь кубов Ламберта с существенными углами $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\beta}{4}$, $\frac{\gamma}{4}$ при ребрах, длины которых равны $\frac{L_\alpha}{2}$, $\frac{L_\beta}{2}$, $\frac{L_\gamma}{2}$ соответственно (см. рис. 8).

Рассмотрим куб Ламберта $Q(\frac{\alpha}{4}, \frac{\beta}{4}, \frac{\gamma}{4})$ в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$, которое реализуется как верхняя полость $\mathscr{H}^+$: $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$, $x_0 >$

0, двуполостного гиперболоида $\mathscr{H}$: $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$, в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{3,1}$ со скалярным произведением

$$((x_0, x_1, x_2, x_3), (y_0, y_1, y_2, y_3)) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

(см. [8, с. 14]). Обозначим через $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$ единичные векторы внешних нормалей к плоскостям граней Q, как на рис. 8. Заметим, что грани, векторы нормалей к которым обозначены через e_1, e_2, e_3, попарно ортогональны, т. е.

$$(e_1, e_2) = (e_2, e_3) = (e_1, e_3) = 0$$

(см. [8, с. 90]), и пересекаются в одной точке, которую можно задать как $\{\lambda e_4, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ для некоторого вектора e_4 такого, что $(e_4, e_4) = -1$. Имеем

$$(e_1, e_4) = (e_2, e_4) = (e_3, e_4) = 0, \quad (e_1, e_1) = (e_2, e_2) = (e_3, e_3) = 1.$$

Таким образом, векторы $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{3,1}$. Разложим по этому базису векторы f_1, f_2, f_3. Пусть

$$f_1 = a_1 e_1 + b_1 e_2 + c_1 e_3 + d_1 e_4.$$

Заметим, что, с одной стороны, (f_1, e_1) можно расписать по свойствам скалярного произведения, а с другой стороны, $(f_1, e_1) = -\operatorname{ch} \frac{L_\beta}{2}$ (см. [8, с. 90]), т. е.

$$\begin{aligned}(f_1, e_1) &= a_1(e_1, e_1) + b_1(e_2, e_1) + c_1(e_3, e_1) + d_1(e_4, e_1) \\ &= a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + d_1 \cdot 0 = -\operatorname{ch} \frac{L_\beta}{2}.\end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$(f_1, e_2) = b_1 = -\cos \frac{\alpha}{4}, \quad (f_1, e_3) = c_1 = 0, \quad (f_1, e_4) = d_1.$$

Таким образом,

$$f_1 = -\operatorname{ch} \frac{L_\beta}{2} e_1 - \cos \frac{\alpha}{4} e_2 + d_1 e_4.$$

Аналогично

$$f_2 = -\operatorname{ch} \frac{L_\gamma}{2} e_2 - \cos \frac{\beta}{4} e_3 + d_2 e_4,$$

$$f_3 = -\cos \frac{\gamma}{4} e_1 - \operatorname{ch} \frac{L_\alpha}{2} e_3 + d_3 e_4.$$

Найдем d_1, d_2, d_3 из условий взаимной ортогональности f_1, f_2, f_3 и условий $(f_1, f_1) = (f_2, f_2) = (f_3, f_3) = 1$. Несложными вычислениями получаем

$$(f_1, f_1) = \operatorname{ch}^2 \frac{L_\beta}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{4} - {d_1}^2 = 1,$$

$$(f_2, f_2) = \operatorname{ch}^2 \frac{L_\gamma}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{4} - {d_2}^2 = 1,$$

$$(f_3, f_3) = \operatorname{ch}^2 \frac{L_\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{4} - {d_3}^2 = 1,$$

откуда

$${d_1}^2 = -1 + \operatorname{ch}^2 \frac{L_\beta}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{4}, \; {d_2}^2 = -1 + \operatorname{ch}^2 \frac{L_\gamma}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{4}, \; {d_3}^2 = -1 + \operatorname{ch}^2 \frac{L_\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{4}.$$

Исходя из условий ортогональности f_1, f_2, f_3, приходим к равенствам

$$(f_1, f_2) = \operatorname{ch}\frac{L_\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{4} - d_1 d_2 = 0,$$

$$(f_2, f_3) = \operatorname{ch}\frac{L_\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{4} - d_2 d_3 = 0,$$

$$(f_1, f_3) = \operatorname{ch}\frac{L_\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{4} - d_1 d_3 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{ch}\frac{L_\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{4} = d_1 d_2, \quad \operatorname{ch}\frac{L_\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{4} = d_2 d_3, \quad \operatorname{ch}\frac{L_\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{4} = d_1 d_3.$$

Возводя эти равенства в квадрат и используя выражения для d_1^2, d_2^2, d_3^2, элементарными преобразованиями получаем

$$\operatorname{ch}^2\frac{L_\gamma}{2}\cos^2\frac{\alpha}{4} = d_1^2 d_2^2 = d_1^2\left(\operatorname{ch}^2\frac{L_\gamma}{2} + \cos^2\frac{\beta}{4} - 1\right),$$

$$\left(\cos^2\frac{\alpha}{4} - \operatorname{ch}^2\frac{L_\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{4} + 1\right)\operatorname{ch}^2\frac{L_\gamma}{2} = -d_1^2\sin^2\frac{\beta}{4},$$

$$\operatorname{sh}^2\frac{L_\beta}{2}\operatorname{ch}^2\frac{L_\gamma}{2} = d_1^2\sin^2\frac{\beta}{4}.$$

Несложно заметить, что все величины, входящие в последнее равенство, положительны. Таким образом, окончательно имеем

$$d_1 = \frac{\operatorname{sh}\frac{L_\beta}{2}\operatorname{ch}\frac{L_\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{4}}.$$

Аналогично

$$d_2 = \frac{\operatorname{sh}\frac{L_\gamma}{2}\operatorname{ch}\frac{L_\alpha}{2}}{\sin\frac{\gamma}{4}}, \quad d_3 = \frac{\operatorname{sh}\frac{L_\alpha}{2}\operatorname{ch}\frac{L_\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{4}}.$$

Подставляя полученные значения d_1, d_2, d_3 в условия ортогональности векторов f_1, f_2, f_3, получаем правила синусов-косинусов

$$\frac{\operatorname{ch}\frac{L_\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{4}}\frac{\operatorname{sh}\frac{L_\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{4}}\frac{\operatorname{sh}\frac{L_\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{4}} = 1, \quad \frac{\operatorname{sh}\frac{L_\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{4}}\frac{\operatorname{ch}\frac{L_\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{4}}\frac{\operatorname{sh}\frac{L_\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{4}} = 1, \quad \frac{\operatorname{sh}\frac{L_\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{4}}\frac{\operatorname{sh}\frac{L_\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{4}}\frac{\operatorname{ch}\frac{L_\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{4}} = 1.$$

Попарное деление этих равенств друг на друга дает следующие равенства:

$$\frac{\operatorname{cth}\frac{L_\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}}\frac{\operatorname{th}\frac{L_\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}} = 1, \quad \frac{\operatorname{cth}\frac{L_\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{4}}\frac{\operatorname{th}\frac{L_\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}} = 1, \quad \frac{\operatorname{cth}\frac{L_\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}}\frac{\operatorname{th}\frac{L_\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}} = 1.$$

Обозначая

$$\frac{\operatorname{cth}\frac{L_\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}} = \frac{1}{T},$$

получаем правило тангенсов

$$\frac{\operatorname{th}\frac{L_\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}} = \frac{\operatorname{th}\frac{L_\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}} = \frac{\operatorname{th}\frac{L_\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}} = T.$$

Найдем уравнение для T. Пусть

$$A = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4},\ B = \operatorname{tg}\frac{\beta}{4},\ C = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}, \quad X = \operatorname{th}\frac{L_\alpha}{2},\ Y = \operatorname{th}\frac{L_\beta}{2},\ Z = \operatorname{th}\frac{L_\gamma}{2}.$$

Используя элементарные тригонометрические формулы, имеем

$$\cos^2\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}} = \frac{1}{1+A^2}, \quad \sin^2\frac{\alpha}{4} = \frac{A^2}{1+A^2},$$

$$\operatorname{ch}^2\frac{L_\alpha}{2} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2\frac{L_\alpha}{2}} = \frac{1}{1-X^2}, \quad \operatorname{sh}^2\frac{L_\alpha}{2} = \frac{X^2}{1-X^2}.$$

Для синусов и косинусов углов $\frac{\beta}{4}$, $\frac{\gamma}{4}$ имеют место аналогичные выражения через B, C, Y, Z. Возведем в квадрат обе части правила синусов-косинусов

$$\frac{\operatorname{ch}\frac{L_\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{4}}\frac{\operatorname{sh}\frac{L_\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{4}}\frac{\operatorname{sh}\frac{L_\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{4}} = 1$$

и перепишем его в виде

$$\frac{(1+A^2)}{(1-X^2)}\frac{Y^2(1+B^2)}{B^2(1-Y^2)}\frac{Z^2(1+C^2)}{C^2(1-Z^2)} = 1.$$

Аналогично перепишем правило тангенсов в виде $X/A = Y/B = Z/C = T$, возведем в квадрат и выразим X^2, Y^2, Z^2. Подставляя эти значения в последнее выражение, получаем

$$\frac{(1+A^2)}{(1-T^2A^2)}\frac{(1+B^2)T^2}{(1-T^2B^2)}\frac{(1+C^2)T^2}{(1-T^2C^2)} = 1.$$

Заметим, что $T^2 = -1$ является корнем этого уравнения, а само уравнение может быть переписано в виде

$$(T^2+1)(A^2B^2C^2T^4 + (1+A^2+B^2+C^2)T^2 - 1) = 0.$$

Следующая теорема дает интегральное представление для объема гиперболического конического многообразия $O_{k,l,m} = B((0,k),(0,l),(0,m))$.

Теорема 3. *Объем гиперболического конического многообразия $O_{k,l,m} = B((0,k),(0,l),(0,m))$, полученного спонтанной хирургией с параметрами $(0,k)$, $(0,l)$, $(0,m)$ на компонентах зацепления Борромеевы кольца, вычисляется по формуле*

$$\operatorname{Vol} O_{k,l,m} = -2\int_0^T \log\left|\frac{(1+A^2)(1+B^2)(1+C^2)t^4}{(1-t^2A^2)(1-t^2B^2)(1-t^2C^2)}\right|\frac{dt}{t^2+1},$$

где T — положительный корень алгебраического уравнения

$$A^2B^2C^2T^4 + (1+A^2+B^2+C^2)T^2 - 1 = 0, \quad A = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2k},\ B = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2l}\ C = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2m}.$$

Доказательство. Объем $V = \operatorname{Vol} O_{k,l,m}$ конического многообразия $O_{k,l,m}$ совпадает с объемом додекаэдра $D(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2})$, который, как ранее замечено, состоит из восьми кубов Ламберта $Q(\frac{\alpha}{4}, \frac{\beta}{4}, \frac{\gamma}{4})$ с существенными углами $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\beta}{4}$, $\frac{\gamma}{4}$ при ребрах, длины которых равны $\frac{L_\alpha}{2}$, $\frac{L_\beta}{2}$, $\frac{L_\gamma}{2}$ соответственно. Таким образом, объем додекаэдра $D(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2})$ равен восьми объемам куба Ламберта $Q(\frac{\alpha}{4},\frac{\beta}{4},\frac{\gamma}{4})$, и по формулам Шлефли (см. [8, с. 127]) удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha}=-\frac{L_\alpha}{2},\quad \frac{\partial V}{\partial\beta}=-\frac{L_\beta}{2},\quad \frac{\partial V}{\partial\gamma}=-\frac{L_\gamma}{2}.$$

Отметим, что $V\to 0$ при $\alpha,\beta,\gamma\to 2\pi$. Действительно, поскольку каждая грань фундаментального додекаэдра $D(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2})$ является пятиугольником с четырьмя прямыми углами и одним углом из набора $\{\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2}\}$, то при $\alpha,\beta,\gamma\to 2\pi$ грань стремится к бесконечно малому четырехугольнику с прямыми углами, а сам додекаэдр стремится к бесконечно малому евклидову кубу.

Положим

$$\widetilde{V}=\int\limits_0^T F(t,A,B,C)\,dt,$$

где

$$F(t,A,B,C)=\frac{-2}{t^2+1}\log\left|\frac{(1+A^2)(1+B^2)(1+C^2)t^4}{(1-t^2A^2)(1-t^2B^2)(1-t^2C^2)}\right|.$$

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\widetilde{V}$ обладает свойствами

(i) $\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\alpha}=-\frac{L_\alpha}{2}$, $\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\beta}=-\frac{L_\beta}{2}$, $\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\gamma}=-\frac{L_\gamma}{2}$,

(ii) $\widetilde{V}\to 0$ при $\alpha,\beta,\gamma\to 2\pi$.

Проверим свойство (i). Используя формулу Лейбница дифференцирования по параметру, получаем

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\alpha}=F(T,A,B,C)\frac{\partial T}{\partial\alpha}+\int\limits_0^T\frac{\partial F(t,A,B,C)}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\,dt.$$

По теореме синусов-косинусов имеем

$$F(T,A,B,C)=\frac{-2}{T^2+1}\log\left|\frac{(1+A^2)(1+B^2)(1+C^2)T^4}{(1-T^2A^2)(1-T^2B^2)(1-T^2C^2)}\right|=0,$$

поскольку выражение под логарифмом равно 1. Следовательно,

$$F(t,A,B,C)\frac{\partial T}{\partial\alpha}=0.$$

Далее,

$$\frac{\partial F(T,A,B,C)}{\partial A}=\frac{-2}{t^2+1}\Big(\frac{2A}{1+A^2}+\frac{2At^2}{1-t^2A^2}\Big)=\frac{-4A}{(1+A^2)(1-t^2A^2)}$$

и

$$\frac{\partial A}{\partial\alpha}=\frac{d(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4})}{d\alpha}=\frac{1+A^2}{4}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\alpha}=\int\limits_0^T\frac{-4A(1+A^2)\;dt}{4(1+A^2)(1-t^2A^2)}=\int\limits_0^T\frac{-A\,dt}{1-t^2A^2}=-\operatorname{arth}(AT)=-\frac{L_\alpha}{2}.$$

Аналогично проверяются равенства

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\beta}=-\frac{L_\beta}{2},\quad \frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\gamma}=-\frac{L_\gamma}{2}.$$

Проверим свойство (ii). Если $\alpha,\beta,\gamma\to 2\pi$, то $A,B,C\to+\infty$ и $T\to 0$. В силу сходимости интеграла имеем $\widetilde{V}\to 0$.

Утверждение 1. *Объем гиперболического конического многообразия $O_{k,l,m} = B((0,k),(0,l),(0,m))$, полученного спонтанной хирургией с параметрами $(0,k),(0,l),(0,m)$, равен объему гиперболического конического многообразия*

$$O^{2k,2l,2m} = B((2k,0),(2l,0),(2m,0)),$$

полученного орбифолдной хирургией с параметрами $(2k,0),(2l,0),(2m,0)$ на компонентах зацепления Борромеевы кольца, т. е. $\operatorname{Vol} O_{k,l,m} = \operatorname{Vol} O^{2k,2l,2m}$.

Доказательство. Положим $k' = 2k$, $l' = 2l$, $m' = 2m$. Тогда $O^{k',l',m'} = B((k',0),(l',0),(m',0))$ — коническое многообразие, полученное орбифолдной хирургией с параметрами $(k',0)$, $(l',0)$, $(m',0)$ на трех компонентах зацепления Борромеевы кольца. Из рассмотренной выше ситуации такого же типа заметим, что фундаментальным многогранником полученного таким образом многообразия является додекаэдр $D(\alpha,\beta,\gamma)$ с существенными углами $\alpha = \frac{2\pi}{k'}$, $\beta = \frac{2\pi}{l'}$, $\gamma = \frac{2\pi}{m'}$ или с учетом замены додекаэдр с существенными углами, равными $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$.

Ранее показано, что фундаментальным многогранником конического многообразия $O_{k,l,m} = B((0,k),(0,l),(0,m))$ является додекаэдр $D(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2})$, где $\alpha = \frac{2\pi}{k}$, $\beta = \frac{2\pi}{l}$, $\gamma = \frac{2\pi}{m}$, т. е. додекаэдр с существенными углами, равными $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$.

Таким образом, конические многообразия $O_{k,l,m}$ и $O^{k',l',m'}$ имеют равные фундаментальные многогранники, а значит, их объемы совпадают.

2. Спонтанная хирургия на одной из компонент зацепления Борромеевы кольца

По аналогии с предыдущим пунктом с помощью спонтанной хирургии с параметром $(0,k)$ на одной из компонент зацепления Борромеевы кольца и орбифолдной хирургии с параметрами $(l,0)$, $(m,0)$ на оставшихся компонентах перестроим компактное многообразие $\overline{O}$ в коническое многообразие, которое обозначим через $O_k^{l,m} = B((0,k),(l,0),(m,0))$. Как и прежде, сделаем перестройку многогранника $\overline{D}$ (см. рис. 3), которая соответствует орбифолдной и спонтанной хирургиям на многообразии $\overline{O}$. Вместо отрезанных окрестностей вклеиваем две конструкции, подобные конструкции вида 2 (см. рис. 5), и четыре конструкции, подобные конструкции вида 1 (см. рис. 4), сохраняя при этом отождествление граней, указанное на рис. 3. В результате получаем многогранник, изображенный на рис. 9, где $\frac{\alpha}{2}$, β, γ — существенные углы при ребрах, длины которых равны L_α, $\frac{L_\beta}{2}$, $\frac{L_\gamma}{2}$. Обозначим его через $M(\frac{\alpha}{2},\beta,\gamma)$.

Указанное на рис. 10 отождествление граней по правилу (1) дает коническое многообразие $O_k^{l,m}$ с коническими углами $\alpha = \frac{2\pi}{k}$, $\beta = \frac{2\pi}{l}$, $\gamma = \frac{2\pi}{m}$ вдоль сингулярных компонент, длины которых равны L_α, L_β, L_γ соответственно. Таким образом, многогранник $M(\frac{\alpha}{2},\beta,\gamma)$ является фундаментальным многогранником конического многообразия $O_k^{l,m}$, полученного спонтанной хирургией на одной из компонент зацепления Борромеевы кольца и орбифолдной хирургией на двух других компонентах. По теореме Андреева (см. [8, с. 119]) он реализуется в гиперболическом пространстве при $0 \le \alpha < 2\pi$, $0 \le \beta,\gamma < \pi$ и условии $\alpha + 2\beta < 2\pi, \alpha + 2\gamma < 2\pi$. В результате имеет место следующая

Теорема 4. *Коническое многообразие $O_k^{l,m} = B((0,k),(l,0),(m,0))$ является гиперболическим, если $k > 1$, $l > 2$, $m > 2$ и $\frac{1}{k} + \frac{2}{l} < 1$, $\frac{1}{k} + \frac{2}{m} < 1$.*

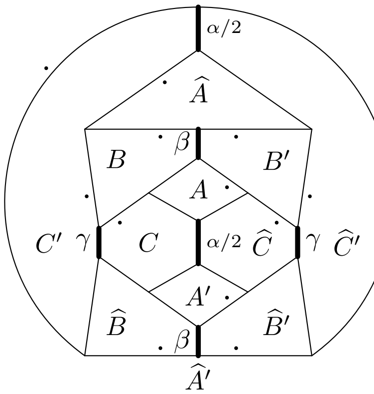

Рис. 9.

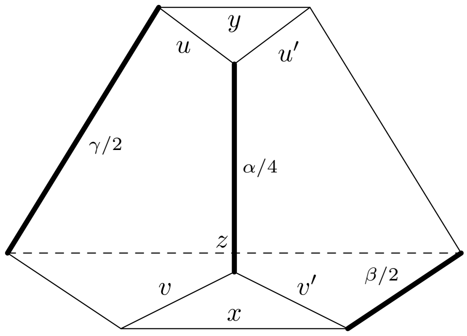

Рис. 10.

Заметим, что сечение многогранника $M(\frac{\alpha}{2},\beta,\gamma)$ тремя взаимно перпендикулярными плоскостями дает восемь дважды усеченных тетраэдров $N(\frac{\alpha}{4},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2})$ с существенными углами $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ при ребрах, длины которых равны $\frac{L_\alpha}{2}$, $\frac{L_\beta}{4}$, $\frac{L_\gamma}{4}$ соответственно (см. рис. 10).

Рассмотрим, что происходит с $N(\frac{\alpha}{4},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2})$ при $\alpha\to 0$, $\beta,\gamma\to\pi$. Для треугольных граней по второй теореме косинусов (см. [9, с. 136]) имеем

$$\operatorname{ch} x=\frac{\cos(\alpha/4)+\cos(\beta/2)\cos(\pi/2)}{\sin(\beta/2)\sin(\pi/2)}\to 1,$$

следовательно, $x\to 0$ и $v,v'\to\infty$. Аналогично $y\to 0$ и $u,u'\to\infty$. В четырехугольных гранях из соотношений для четырехугольников (см. [9, с. 143]) получаем

$$\operatorname{ch} z=\frac{\operatorname{ch} x}{\sin(\gamma/2)}\to 1,$$

следовательно, $z\to 0$. А из соотношения для пятиугольников (см. [9, с. 145) $\operatorname{th} u\operatorname{ch}\frac{L_\alpha}{2}\operatorname{th} v=1$ при $u,v\to\infty$ вытекает, что $\operatorname{ch}\frac{L_\alpha}{2}\to 1$. Отсюда $L_\alpha\to 0$. Таким образом, тетраэдр вырождается в плоский четырехугольник с углами $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 0, т. е. четырехугольник Ламберта и, следовательно, объем тетраэдра стремится к нулю.

Рассмотрим $N(\frac{\alpha}{4},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2})$ в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$, которое реализуется как верхняя полость $\mathscr{H}^+: -x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$, $x_0>0$, двуполостного гиперболоида $\mathscr{H}: -x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$ в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{3,1}$ со скалярным произведением $((x_0,x_1,x_2,x_3),(y_0,y_1,y_2,y_3))=-x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ (см. [8, с. 14]). Далее, используя тот же метод, что и в доказательстве теоремы 2, и действуя по аналогии, приходим к следующему результату.

Теорема 5. *Длины сингулярных геодезических $L_\alpha, L_\beta, L_\gamma$ гиперболического конического многообразия $O_k^{l,m}=B((0,k),(l,0),(m,0))$ с коническими углами $\alpha=\frac{2\pi}{k}$, $\beta=\frac{2\pi}{l}$, $\gamma=\frac{2\pi}{m}$ соответственно удовлетворяют следующим правилам:*

$$\frac{\operatorname{ch}\frac{L_\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{4}}\,\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\operatorname{sh}\frac{L_\beta}{4}}\,\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{sh}\frac{L_\gamma}{4}}=1\quad(\textit{правило синусов-косинусов}),$$

$$\frac{\operatorname{th}\frac{L_\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{th}\frac{L_\beta}{4}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{th}\frac{L_\gamma}{4}}=T\quad(\textit{правило тангенсов}),$$

где T — положительный корень алгебраического уравнения

$$(1+A^2)T^2-(1+B^2+C^2-A^2B^2C^2)=0,\quad A=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4},\ B=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},\ C=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Следующая теорема дает интегральное представление для объема гиперболического конического многообразия $O_k^{l,m}=B((0,k),(l,0),(m,0))$.

Теорема 6. *Объем гиперболического конического многообразия $O_k^{l,m}=B((0,k),(l,0),(m,0))$, полученного хирургией с параметрами $(0,k),(l,0),(m,0)$ на компонентах зацепления Борромеевы кольца, вычисляется по следующей формуле*

$$\operatorname{Vol}O_k^{l,m}=2\int\limits_T^\infty \log\left|\frac{(1+A^2)(t^2-B^2)(t^2-C^2)}{(1-t^2A^2)(1+B^2)(1+C^2)}\right|\frac{dt}{t^2+1},$$

где T — положительный корень алгебраического уравнения

$$(1+A^2)T^2-(1+B^2+C^2-A^2B^2C^2)=0,\quad A=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2k},\ B=\operatorname{tg}\frac{\pi}{l},\ C=\operatorname{tg}\frac{\pi}{m}.$$

Доказательство. Объем $V=\operatorname{Vol}O_k^{l,m}$ конического многообразия $O_k^{l,m}$ совпадает с объемом многогранника $M(\frac{\alpha}{2},\beta,\gamma)$, который, как ранее замечено, состоит из восьми многогранников $N(\frac{\alpha}{4},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2})$ с существенными углами $\frac{\alpha}{4},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2}$ при ребрах, длины которых равны $\frac{L_\alpha}{2},\frac{L_\beta}{4},\frac{L_\gamma}{4}$ соответственно. Таким образом, объем многогранника $M(\frac{\alpha}{2},\beta,\gamma)$ равен восьми объемам многогранника $N(\frac{\alpha}{4},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2})$ и по формулам Шлефли (см. [8, с. 127]) удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha}=-\frac{L_\alpha}{2},\quad \frac{\partial V}{\partial\beta}=-\frac{L_\beta}{2},\quad \frac{\partial V}{\partial\gamma}=-\frac{L_\gamma}{2}.$$

Из описанного выше процесса вырождения фундаментального многогранника $M(\frac{\alpha}{2},\beta,\gamma)$ многообразия $O_k^{l,m}$ следует, что при $\alpha\to0$, $\beta,\gamma\to\pi$ его объем V стремится к 0.

Положим

$$\widetilde V=\int\limits_T^\infty F(t,A,B,C)\,dt,$$

где

$$F(t,A,B,C)=\frac{2}{t^2+1}\log\left|\frac{(1+A^2)(t^2-B^2)(t^2-C^2)}{(1-t^2A^2)(1+B^2)(1+C^2)}\right|.$$

Для доказательства достаточно проверить, что $\widetilde V$ обладает свойствами

$$\frac{\partial\widetilde V}{\partial\alpha}=-\frac{L_\alpha}{2},\quad \frac{\partial\widetilde V}{\partial\beta}=-\frac{L_\beta}{2},\frac{\partial\widetilde V}{\partial\gamma}=-\frac{L_\gamma}{2},\tag{i}$$

$$\widetilde V\to0\quad\text{при } \alpha\to0,\ \beta,\gamma\to\pi.\tag{ii}$$

Проверяем свойство (i).

Используя формулу Лейбница дифференцирования по параметру, получаем

$$\frac{\partial\widetilde V}{\partial\alpha}=-F(T,A,B,C)\frac{\partial T}{\partial\alpha}+\int\limits_T^\infty\frac{\partial F(t,A,B,C)}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\,dt.$$

По теореме синусов-косинусов имеем

$$F(T,A,B,C)=\frac{2}{T^2+1}\log\left|\frac{(1+A^2)(T^2-B^2)(T^2-C^2)}{(1-T^2A^2)(1+B^2)(1+C^2)}\right|=0,$$

поскольку выражение под логарифмом равно 1. Следовательно,

$$F(T,A,B,C)\frac{\partial T}{\partial\alpha}=0.$$

Далее,

$$\frac{\partial F(t,A,B,C)}{\partial A}=\frac{2}{t^2+1}\Big(\frac{2A}{1+A^2}+\frac{2At^2}{1-t^2A^2}\Big)=\frac{4A}{(1+A^2)(1-t^2A^2)},$$

$$\frac{\partial A}{\partial\alpha}=\frac{d(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4})}{d\alpha}=\frac{1+A^2}{4}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\alpha}=\int\limits_T^\infty\frac{4A(1+A^2)\,dt}{4(1+A^2)(1-t^2A^2)}=\int\limits_T^\infty\frac{A\,dt}{1-t^2A^2}=\operatorname{arth}At\Big|_T^\infty.$$

Из рассмотренного выше процесса вырождения тетраэдра $N(\frac{\alpha}{4},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2})$ имеем $L_\alpha\to 0$ при $\alpha\to 0$, $T\to+\infty$, следовательно, $AT=\operatorname{th}\frac{L_\alpha}{2}\to 0$. Таким образом,

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\alpha}=-\operatorname{acth}AT=-\frac{L_\alpha}{2}.$$

Далее,

$$\frac{\partial F(t,A,B,C)}{\partial B}=\frac{2}{t^2+1}\left(\frac{-2B}{t^2-B^2}-\frac{2B}{1+B^2}\right)=\frac{-4B}{(1+B^2)(t^2-B^2)},$$

$$\frac{\partial B}{\partial\beta}=\frac{d(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2})}{d\beta}=\frac{1+B^2}{2},$$

откуда

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\beta}=\int\limits_T^\infty\frac{-4B(1+B^2)\,dt}{2(1+B^2)(t^2-B^2)}=2B\int\limits_T^\infty\frac{dt}{B^2-t^2}=-2\operatorname{arth}\frac{B}{T}=-\frac{L_\beta}{2}.$$

Аналогичным образом проверяется равенство $\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\gamma}=-\frac{L_\gamma}{2}$.

Проверим свойство (ii). Если $\alpha\to 0,\beta,\gamma\to\pi$, то $A\to 0, B,C\to+\infty$ и $T\to+\infty$. В силу сходимости интеграла имеем $\widetilde{V}\to 0$.

3. Спонтанная хирургия на двух компонентах зацепления Борромеевы кольца

По аналогии с п. 1 с помощью спонтанной хирургии с параметрами $(0,k)$, $(0,l)$ на двух компонентах зацепления Борромеевы кольца и орбифолдной хирургии с параметром $(m,0)$ на оставшейся компоненте перестроим компактное многообразие $\overline{O}$ в коническое, которое обозначим через

$$O^m_{k,l}=B((0,k),(0,l),(m,0)).$$

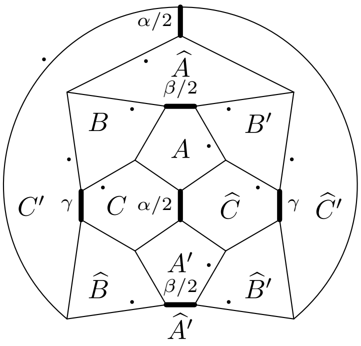

Рис. 11.

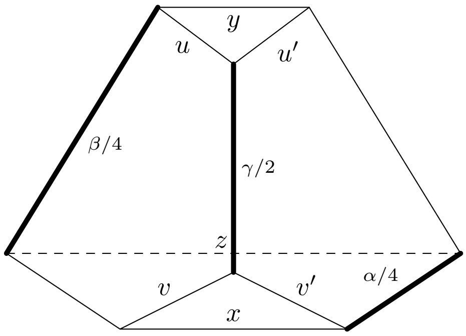

Рис. 12.

Сделаем перестройку многогранника $\overline{D}$ (см. рис. 3), которая соответствует орбифолдной и спонтанной хирургиям на многообразии $\overline{O}$. Вместо отрезанных окрестностей вклеиваем четыре конструкции, подобные конструкции вида 2 (см. рис. 5), и две конструкции, подобные конструкции вида 1 (см. рис. 4), сохраняя при этом отождествление граней, указанное на рис. 3. В результате получаем многогранник, изображенный на рис. 11, где $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \gamma$ — существенные углы при ребрах, длины которых равны $L_\alpha, L_\beta, \frac{L_\gamma}{2}$. Обозначим его через $M(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \gamma)$.

Указанное на рис. 12 отождествление граней по правилу (1) дает коническое многообразие $O^m_{k,l}$ с коническими углами $\alpha = \frac{2\pi}{k}, \beta = \frac{2\pi}{l}, \gamma = \frac{2\pi}{m}$ вдоль сингулярных компонент, длины которых равны $L_\alpha, L_\beta, L_\gamma$ соответственно. Таким образом, многогранник $M(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \gamma)$ является фундаментальным многогранником конического многообразия, полученного спонтанной хирургией на двух компонентах зацепления Борромеевы кольца и орбифолдной хирургией на оставшейся компоненте. По теореме Андреева (см. [8, с. 119]) он реализуется в гиперболическом пространстве при $0 \le \alpha, \beta < 2\pi$, $0 \le \gamma < \pi$ и условии $\beta + 2\gamma < 2\pi$, $\alpha + 2\gamma < 2\pi$. В результате имеет место следующая

Теорема 7. *Коническое многообразие* $O^m_{k,l} = B((0,k),(0,l),(m,0))$ *является гиперболическим, если*

$$k, l > 1, \quad m > 2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{l} + \frac{2}{m} < 1, \quad \frac{1}{k} + \frac{2}{m} < 1.$$

Заметим, что сечение многогранника $M(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \gamma)$ тремя взаимно перпендикулярными плоскостями дает восемь дважды усеченных тетраэдров $N(\frac{\alpha}{4}, \frac{\beta}{4}, \frac{\gamma}{2})$ с углами $\frac{\alpha}{4}, \frac{\beta}{4}, \frac{\gamma}{2}$ при ребрах, длины которых равны $\frac{L_\alpha}{2}, \frac{L_\beta}{2}, \frac{L_\gamma}{4}$ соответственно (см. рис. 12).

Рассмотрим что происходит с $N(\frac{\alpha}{4}, \frac{\beta}{4}, \frac{\gamma}{2})$ при $\alpha, \beta \to 2\pi, \gamma \to 0$. Для треугольных граней по второй теореме косинусов (см. [9, с. 136]) имеем

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{ch}(\gamma/2) + \cos(\alpha/4)\cos(\pi/2)}{\sin(\alpha/4)\sin(\pi/2)} \to 1,$$

следовательно, $x \to 0$ и $v, v' \to \infty$. Аналогично $y \to 0$ и $u, u' \to \infty$. В четырехугольных гранях из соотношений для четырехугольников (см. [9, с. 143]) получим

$$\operatorname{ch} z = \frac{\operatorname{ch} x}{\sin(\beta/4)} \to 1,$$

следовательно, $z \to 0$. А из соотношения для пятиугольников (см. [9, с. 145]) $\operatorname{th} u \operatorname{ch} \frac{L_\gamma}{4} \operatorname{th} v = 1$ при $u, v \to \infty$ следует, что $\operatorname{ch} \frac{L_\gamma}{4} \to 1$. Откуда получаем, что $L_\gamma \to 0$. Таким образом, тетраэдр вырождается в плоский четырехугольник с углами $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 0, т. е. четырехугольник Ламберта.

Рассмотрим $N(\frac{\alpha}{4}, \frac{\beta}{4}, \frac{\gamma}{2})$ в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$, которое реализуется как верхняя полость $\mathscr{H}^+$: $-x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$, $x_0>0$, двуполостного гиперболоида $\mathscr{H}$: $-x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$ в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{3,1}$ со скалярным произведением

$$((x_0, x_1, x_2, x_3), (y_0, y_1, y_2, y_3)) = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

(см. [8, с. 14]). Далее, используя тот же метод, что и в доказательстве теоремы 2, и действуя по аналогии, получаем следующий результат.

Теорема 8. *Длины сингулярных геодезических $L_\alpha, L_\beta, L_\gamma$ гиперболического конического многообразия $O^m_{k,l} = B((0,k),(0,l),(m,0))$ удовлетворяют следующим правилам:*

$$\frac{\operatorname{ch} \frac{L_\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{4}} \frac{\operatorname{sh} \frac{L_\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{4}} \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{sh} \frac{L_\gamma}{4}} = 1 \quad (\textit{правило синусов-косинусов}),$$

$$\frac{\operatorname{th} \frac{L_\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}} = \frac{\operatorname{th} \frac{L_\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{4}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{th} \frac{L_\gamma}{4}} = T \quad (\textit{правило тангенсов}),$$

где T — положительный корень алгебраического уравнения

$$(1 + A^2 + B^2 - A^2B^2C^2)T^2 - (1 + C^2) = 0, \quad A = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4},\ B = \operatorname{tg} \frac{\beta}{4},\ C = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Следующая теорема дает интегральное представление для объема гиперболического конического многообразия $O^m_{k,l} = B((0,k),(0,l),(m,0))$.

Теорема 9. *Объем гиперболического конического многообразия*

$$O^m_{k,l} = B((0,k),(0,l),(m,0)),$$

полученного хирургией с параметрами $(0,k),(0,l),(m,0)$ на компонентах зацепления Борромеевы кольца, вычисляется по формуле

$$\operatorname{Vol} O^m_{k,l} = -2 \int_0^T \log \left| \frac{(1+A^2)(1+B^2)(t^2-C^2)t^2}{(1-t^2A^2)(1-t^2B^2)(1+C^2)} \right| \frac{dt}{t^2+1},$$

где T — положительный корень алгебраического уравнения

$$(1 + A^2 + B^2 - A^2B^2C^2)T^2 - (1 + C^2) = 0, \quad A = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2k},\ B = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2l},\ C = \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.

Утверждение 2. *Объем гиперболического конического многообразия*

$$O^{l,m}_k = B((0,k),(l,0),(m,0)),$$

полученного хирургией с параметрами $(0,k),(l,0),(m,0)$, равен объему гиперболического конического многообразия

$$O^{2k}_{l/2,m/2} = B((2k,0),(0,l/2),(0,m/2)),$$

полученного хирургией с параметрами $(2k,0),(0,l/2),(0,m/2)$ *на компонентах зацепления Борромеевы кольца, т. е.* $\operatorname{Vol} O_k^{l,m} = \operatorname{Vol} O_{l/2,m/2}^{2k}$.

Доказательство. Положим $k'=2k$, $l'=l/2$, $m'=m/2$. Тогда

$$O_{l',m'}^{k'} = B((k',0),(0,l'),(0,m'))$$

— коническое многообразие, полученное хирургией с параметрами $(k',0)$, $(0,l')$, $(0,m')$, т. е. на одной компоненте зацепления произведена орбифолдная хирургия, а на двух других — спонтанная. Из выше рассмотренной ситуации такого же типа заметим, что фундаментальным многогранником многообразия $O_{l',m'}^{k'}$ является многогранник $M(\alpha,\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2})$ с существенными углами

$$\alpha = \frac{2\pi}{k'}, \quad \frac{\beta}{2} = \frac{2\pi}{l'}, \quad \frac{\gamma}{2} = \frac{2\pi}{m'}$$

или с учетом замены многогранник с существенными углами, равными $\frac{\pi}{k}$, $\frac{2\pi}{l}$, $\frac{2\pi}{m}$.

Ранее было показано, что фундаментальным многогранником конического многообразия $O_k^{l,m} = B((0,k),(l,0),(m,0))$ является многогранник $M(\frac{\alpha}{2},\beta,\gamma)$, где

$$\alpha = \frac{2\pi}{k}, \quad \beta = \frac{2\pi}{l}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{m},$$

т. е. многогранник с существенными углами, равными

$$\frac{\pi}{k}, \quad \frac{2\pi}{l}, \quad \frac{2\pi}{m}.$$

Таким образом, конические многообразия $O_k^{l,m}$ и $O_{l',m'}^{k'}$ имеют равные фундаментальные многогранники, а значит, их объемы совпадают.

Замечание 2. Объемы гиперболических конических многообразий

$$O_{k,l,m} = B((0,k),(0,l),(0,m)),$$

$$O_k^{l,m} = B((0,k),(l,0),(m,0)),$$

$$O_{k,l}^{m} = B((0,k),(0,l),(m,0)),$$

подсчитанные при различных наборах (k,l,m) по формулам, указанным в теоремах 3, 6 и 9 соответственно, совпадают с объемами, подсчитанными при помощи компьютерной программы Snappea [10].

(k,l,m)	$\operatorname{Vol} O_{k,l,m}$	$\operatorname{Vol} O_k^{l,m}$	$V = \operatorname{Vol} O_{k,l}^{m}$
$(5,5,5)$	6.758142374	5.551582122	6.025570686
$(3,4,6)$	6.382217212	4.707920842	5.789645185
$(6,3,4)$	6.382217212	3.883477731	5.010777067
$(5,6,12)$	6.965854182	6.409215182	6.847595196
$(5,5,8)$	6.868907673	5.994077312	6.593458115

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hilden H. M., Lozano M. T., Montesinos-Amilibia J. M.* On a remarkable polyhedron geometrizing the figure eight knot cone manifolds // J. Math. Sci. Tokyo 2. 1995. V. 3. P. 501–561.
2. *Kellerhals R.* On the volume of hyperbolic polyhedra // Math. Ann. 1989. V. 285. P. 541–569.
3. *Derevnin D. A., Mednykh A. D.* On the volume of spherical Lambert cube. Research Institute of Mathematics Global Analysis Research Center. Seoul National University, 2003. (Preprint Series 03–02).
4. *Rivin I., Hodgson C. D.* A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space // Invent. Math. 1993. V. 111, N 1. P. 77–111. Corrigendum: 1994. V. 117. P. 359.
5. *Hilden H. M., Lozano M. T., Montesinos-Amilibia J. M.* On the Borromean orbifolds: geometry and arithmetic // Topology'90. Berlin: de Gruyter, 1992. V. 1. P. 133–167.
6. *Thurston W.* The Geometry and Topology of Three-Manifolds. Princeton: Princeton Univ. Press, 1980.
7. *Diaz R.* A characterization of Gram matrices of polytopes // Discrete Comput. Geom. 1999. V. 21. P. 581–601.
8. *Винберг Э. Б.* Геометрия-2. Современные проблемы математики. Т. 29. М.: ВИНИТИ, 1988. (Итоги науки и техники).
9. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986.
10. *Weeks J.* Snappea, Software for hyperbolic 3-manifolds, available at ftp://ftp.geom.umn.edu/pub/software/snappea.

Статья поступила 29 декабря 2002 г.

Пашкевич Марина Геннадьевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
pashkevich@math.nsc.ru