Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 510.6

КРИТЕРИЙ ДОПУСТИМОСТИ ПРАВИЛ ВЫВОДА ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА $S4$–ЛОГИК, НЕ ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВОМ ВЕТВЛЕНИЯ

Е. М. Голованова

Аннотация: Рассматривается модальная финитно-аппроксимируемая $S4$-логика, не обладающая свойством ветвления. Несмотря на то, что критерий В. В. Рыбакова неприменим, используя его метод, удалось получить алгоритмический критерий допустимости правил вывода для данной логики.

Ключевые слова: суперинтуиционистская логика, модальная логика, допустимые правила вывода, разрешимость по допустимости

1. Введение

В работе Л. Л. Максимовой [1] приведено исследование свойств строгой разрешимости модальных и интуиционистских исчислений. Рассмотрена проблема строгой разрешимости проективного свойства Бета над интуиционистским пропозициональным исчислением и отмечено, что для доказательства строгой разрешимости проективного свойства Бета над интуиционистским пропозициональным исчислением достаточно решить проблему разрешимости по допустимости суперинтуиционистских логик с таким свойством. Ранее [2] было показано, что существует точно 16 суперинтуиционистских логик, обладающих проективным свойством Бета. Из результатов В. В. Рыбакова [3] следует разрешимость проблемы допустимости для всех логик с таким свойством, кроме логик под номером 9, 13, 15 из полного списка логик с проективным свойством Бета [1].

В данной работе представлено решение проблемы допустимости правил вывода для суперинтуиционистской логики μ_1, порожденной классом всех конечных корневых фреймов F, удовлетворяющих условию

$$(xRy\&y\bar{R}x\&yRz\&yRu) \to \exists v(zRv\&uRv), \tag{1}$$

где R — отношение на фрейме F. Данная логика указана под номером 9 в полном списке логик с проективным свойством Бета [1].

Ввиду известной связи между модальными и суперинтуиционистскими логиками (см. [3, теорема 3.2.2]) проблему допустимости правил вывода для логики μ_1 достаточно решить для наибольшего модального напарника $\sigma(\mu_1)$ логики μ_1 над $S4$. Решение вопроса существования алгоритма, распознающего

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00248).

допустимость правил вывода в модальной $S4$-логике, было получено В. В. Рыбаковым в [4]. Затем им были построены алгоритмические критерии допустимости правил вывода для модальных логик над $K4$ [3]. Применяя критерий В. В. Рыбакова, нетрудно показать, что столь важные логики, как $K4$, $S4$, Grz, разрешимы по допустимости. Кроме того, на основе техники, разработанной В. В. Рыбаковым, проблема допустимости правил вывода решена для различных индивидуальных логик (см., например, [5–7]).

Однако не для всякого расширения логики $S4$ алгоритмический критерий допустимости правил вывода применим. В теореме 3.5.2 из [3] одним из условий является наличие свойства ветвления ниже k. Модальная $S4$-логика μ_2, порожденная классом всех конечных корневых фреймов F, удовлетворяющих условию (1), не обладает свойством ветвления ниже k ни для какого k. Поэтому непосредственно критерий В. В. Рыбакова из [3] неприменим. Однако использование его метода позволяет исследование логики μ_2 свести к работе над логикой $S4.2$, к которой применим алгоритмический критерий допустимости правил вывода (см. [3, теорема 3.5.2]). Важным моментом при исследовании вышеописанной логики является модификация понятия свойства реализации возможностей.

В данной работе представлено решение проблемы допустимости правил вывода для модальной $S4$-логики μ_2, а также для $\mu_2 \oplus Grz$, откуда следует разрешимость по допустимости логики μ_1.

2. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Определение 1. *Допустимым правилом вывода* $r := \alpha_1, \dots, \alpha_n/\beta$ *для логики* λ мы называем правило вывода $r := \alpha_1, \dots, \alpha_n/\beta$, относительно которого логика λ замкнута.

Обозначим через $Sl_k(F)$ совокупность сгустков фрейма F глубины k, через $S_k(F)$ — совокупность сгустков фрейма F глубины не больше чем k.

Определение 2. Если $F := \langle W, R\rangle$ — фрейм и $X \subseteq F$, то

$$X^{R\leq} := \{a \mid a \in F \& (\exists b \in X)(bRa)\}$$

$$X^{R<} := \{a \mid a \in F \& (\exists b \in X)(bRa) \& (\forall b \in X)\neg(aRb)\}.$$

Определение 3. Пусть X — антицепь сгустков из фрейма $F = \langle W, R\rangle$. Будем говорить, что сгусток C является *конакрытием для* X, если $C^{R<} = X^{R\leq}$.

Определение 4. Модель Крипке K_n называется *n-характеристической для нормальной модальной логики* λ, если означивание V из K_n задано на переменных $p_1, \dots, p_n$ и для любой формулы $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ выполняется условие

$$\alpha(p_1, \dots, p_n) \in \lambda \Leftrightarrow K_n \Vdash \alpha(p_1, \dots, p_n).$$

Пусть λ — нормальная финитно-аппроксимируемая модальная логика, расширяющая $K4$. Модель $Ch_\lambda(n)$, построенную в [3, § 3.3], можно определить так: она является p-морфным образом прямого объединения $\mathscr{N}$ всех конечных λ-фреймов, на которых заданы все возможные означивания, полученные следующим образом: 1) внутри каждого сгустка модели $\mathscr{N}$ склеиваем элементы, имеющие одинаковое означивание; 2) сгустки первого слоя модели $\mathscr{N}$, имеющие одинаковое означивание, склеиваем; 3) сгустки второго слоя, из которых достижим только один сгусток первого слоя и которые имеют одинаковое означивание с достижимым сгустком первого слоя, подклеиваем к достижимому сгустку первого слоя; 4) сгустки второго слоя, которые имеют одинаковое означивание и из которых достижимы одни и те же сгустки первого слоя модели $\mathscr{N}$, склеиваем. Продолжая аналогичные сжатия в следующих слоях модели $\mathscr{N}$, получим модель $Ch_\lambda(n)$.

Определение 5. Для любой пропозициональной буквы p положим

$$T(p) := \Box p, \quad T(\alpha \wedge \beta) := T(\alpha) \wedge T(\beta), \quad T(\alpha \vee \beta) := T(\alpha) \vee T(\beta),$$
$$T(\alpha \to \beta) := \Box(T(\alpha) \to T(\beta)), \quad T(\neg\alpha) := \Box\neg T(\alpha).$$

Определение 6. Пусть λ — суперинтуиционистская логика. Модальную логику λ_1 будем называть *модальным напарником логики* λ, если $\alpha \in \lambda \Leftrightarrow T(\alpha) \in \lambda_1$ для любой формулы α.

Определение 7. Для любой суперинтуиционистской логики λ положим $\tau(\lambda) := S4 \oplus \{T(\alpha) \mid \alpha \in \lambda\}$.

Отметим, что по теореме трансляции Думметта — Леммона [8] логика $\tau(\lambda)$ является наименьшим модальным напарником для логики λ среди логик над $S4$.

Определение 8. Для любой суперинтуиционистской логики λ обозначим

$$\sigma(\lambda) := \lambda(\{S(\mathfrak{U}) \mid \mathfrak{U} \in \mathrm{Var}(H), \mathfrak{U} \models \lambda\}),$$

где $S(\mathfrak{U})$ — обертывающая алгебра для псевдо-булевой алгебры $\mathfrak{U}$.

В работе [9] было показано, что для любой суперинтуиционистской логики λ логика $\sigma(\lambda)$ является наибольшим модальным напарником для λ над $S4$.

Определение 9. Пусть λ — модальная $S4$-логика или суперинтуиционистская логика, m — натуральное число. Предположим, что существует конечный корневой λ-фрейм F глубины k, $m < k$, с одноэлементным корневым сгустком $C = \{a\}$ и C имеет точно d непосредственных попарно несравнимых последователей. Тогда будем говорить, что λ *допускает d-ветвление ниже m*.

Определим свойство ветвления для $S4$-логики и суперинтуиционистской логики.

Определение 10. Будем говорить, что финитно-аппроксимируемая логика λ *обладает свойством ветвления ниже* m, если выполняется следующее. Пусть $\mathscr{W}$ — конечно порожденный подфрейм компоненты из $Ch_\lambda(k)$, глубина подфрейма $\mathscr{W}$ не меньше чем m и $\mathscr{W}$ имеет n корней, $n \leq d$. Если λ допускает d-ветвление ниже k, то фрейм $\mathscr{W}_1$, полученный из $\mathscr{W}$ добавлением нового одноэлементного корня, является λ-фреймом.

Далее приведем теоремы и леммы, необходимые для доказательства основного результата.

Теорема 11 [3, теорема 3.2.2]. *Правило вывода $r := \alpha_1, \dots, \alpha_n/\beta$ допустимо в суперинтуиционистской логике λ тогда и только тогда, когда $T(r) := T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n)/T(\beta)$ допустимо в наибольшем модальном напарнике $\sigma(\lambda)$ логики λ.*

Теорема 12 [3, теорема 3.3.3]. *Пусть K_n, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность n-характеристических моделей для логики λ. Правило вывода $r := \alpha_1, \dots, \alpha_m/\beta$ допустимо в λ тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждого формульно определимого означивания S переменных из r в K_n выполняется следующее утверждение: если $S(\alpha_1) = K_n, \dots, S(\alpha_m) = K_n$, то $S(\beta) = K_n$.*

Теорема 13 [3, теорема 3.3.6]. *Для любой модальной финитно-аппроксимируемой логики λ, расширяющей $K4$, модель Крипке $Ch_\lambda(n)$ является n-характеристической для λ.*

Теорема 14 [3, теорема 3.3.7]. *Любой элемент модели $Ch_{K4}(n)$ является формульно определимым. Для любой финитно-аппроксимируемой логики λ, расширяющей $K4$, любой элемент модели $Ch_\lambda(n)$ является формульно определимым.*

Пусть μ является одной из логик μ_2 или $\mu_2 \oplus Grz$.

Определение 15. Элемент d μ-фрейма F со свойством (1) будем называть *висячей вершиной*, если элемент d видит несравнимые сгустки первого слоя фрейма F.

Определение 16. Множество всех элементов, из которых достижим только один фиксированный сгусток C_i первого слоя модели $\mathscr{M}$ логики μ, будем называть *квазикомпонентой $Qw_i(\mathscr{M})$ модели $\mathscr{M}$*.

Модель $\mathscr{M}$ допускает d-ветвление при любом d внутри любой квазикомпоненты из $Ch_\lambda(n)$, но поскольку висячая вершина не может быть достижимой ни из какого другого сгустка, то модель $\mathscr{M}$ не обладает свойством ветвления. Следовательно, непосредственно алгоритмический критерий допустимости правил вывода [3, теорема 3.5.2] неприменим к $\mathscr{M}$. Поэтому переопределим свойство реализации возможностей с учетом существования висячих вершин.

Пусть $\mathscr{M}$ — модель с означиванием V. Пусть x — элемент из $|\mathscr{M}|$ ($|\mathscr{M}|$ — множество элементов модели $\mathscr{M}$), Y — конечное множество формул, замкнутое относительно подформул, и пусть все пропозициональные буквы из Y содержатся в $\mathrm{Dom}(V)$. Положим

$$\Diamond(x, Y) := \{\alpha \mid \alpha \in Y, x \Vdash_V \Diamond\alpha\}, \quad V(x, Y) := \{\alpha \mid \alpha \in Y, x \Vdash_V \alpha\}.$$

Определение 17. Будем говорить, что μ-модель $\mathscr{M} := \langle M, R, V\rangle$ *обладает свойством реализации возможностей для Y* на E (ниже m), если выполняется следующее утверждение. Пусть E — нетривиальная антицепь, содержащая элемент глубины, большей или равной m. Если E не содержит висячих вершин, то существует элемент x_E такой, что глубина x_E не меньше m и

$$\Diamond(x_E, Y) = \bigcup\{\Diamond(y, Y) \cup V(y, Y) \mid y \in E\} \cup V(x_E, Y).$$

3. Основные результаты

В данной работе рассматривается модальная финитно-аппроксимируемая $S4$-логика, не обладающая свойством ветвления. Модификация метода В. В. Рыбакова позволила получить алгоритмический критерий допустимости правил вывода для данной логики.

Прежде чем перейти к доказательству леммы 18, определим функцию $\Gamma(n)$ следующим образом:

$$\Gamma(n) = (1 + \gamma(2) + \ldots + \gamma(2^n + 1)),$$

где $\gamma(p + 1)$ — некоторая функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\gamma(1) = 1, \quad \gamma(2) \le 2^{2^k}, \quad \gamma(p + 1) \le 2^{\gamma(p)}.$$

Лемма 18. *Пусть правило вывода $r := \alpha_1, \dots, \alpha_n/\beta$ от k переменных не допустимо в логике μ. Тогда существует μ-модель $\mathscr{M} := \langle M, R, S\rangle = (\bigsqcup \mathscr{M}_j) \cup B_{\mathscr{M}}$, где $\mathscr{M}_j$ — открытая подмодель $\mathscr{M}$ такая, что $\exists c_j \forall x \in \mathscr{M}_j$ (xRc_j) и $B_{\mathscr{M}}$ — множество висячих вершин модели $\mathscr{M}$, удовлетворяющая условиям:*

(а) *подфрейм $S_1(\mathscr{M})$ изоморфен подфрейму $S_1(Ch_\mu(k))$;*

(б) *модель $\mathscr{M}$ имеет не более чем $2^{2^k}\Gamma(n) + (1 + 2^{\Gamma(n)})^{2^{2^k}-1}$ сгустков, где n — число подформул правила r;*

(в) *модель $\mathscr{M}$ имеет свойство реализации возможностей относительно подформул правила r для каждой антицепи E, не содержащей висячих вершин, причем если E — антицепь, не содержащая висячих вершин, и $E \subset \mathscr{M}_j$, то существует элемент $x_E \in \mathscr{M}_j$, для которого выполняется свойство реализации возможностей для антицепи E;*

(г) *модель $\mathscr{M}$ опровергает правило r.*

Доказательство. Пусть правило r недопустимо в логике μ. Тогда в силу теорем 3.3.3, 3.3.6 из [3] существует означивание переменных правила r, опровергающее r во фрейме некоторой модели $Ch_\mu(n)$. По лемме 3.4.2 из [3] существует означивание S переменных правила r, при котором правило r опровергается в модели $Ch_\mu(k)$.

Построим модель $\mathscr{M}$ так. Вначале определим модель $\max(Y) \cup S_1(Ch_\mu(k))$. Пусть $Z \subseteq Y$ и

$$H_Z := \{a \mid a \in Ch_\mu(k), a \Vdash_S \bigwedge\{\alpha \mid \alpha \in Z\}\ \forall \beta \in (Y \setminus Z)(a \nVdash_S \beta)\},$$

где Y — множество всех подформул правила r. Таким образом, H_Z — это множество элементов из $Ch_\mu(k)$, на которых истинны только формулы из Z. Определим теперь QH_Z следующим образом:

$$QH_Z := \{a \mid a \in Ch_\mu(k) \setminus S_1(Ch_\mu(k)), a \in qm(H_Z)\},$$

где $qm(H_Z)$ — множество всех квазимаксимальных элементов из H_Z (для подмножества A множества W элемент $a \in W$ будем называть *квазимаксимальным в* A, если $a \in A$ и $\forall w \in W$ $(w \in a^{R<} \to w \notin A)$). Другими словами, QH_Z — множество всех квазимаксимальных элементов глубины > 1 модели $Ch_\mu(k)$, на которых выполняются формулы только из Z.

Тогда подмножество $\max(Y)$ модели $Ch_\mu(k)$ определим так: оно состоит из всех сгустков, содержащих элементы из множества $\bigcup\limits_{Z \subseteq Y} QH_Z$. Объединяя множество $\max(Y)$ и $S_1(Ch_\mu(k))$ и перенося отношение и означивание на построенное множество с модели $Ch_\mu(k)$, получаем модель $\max(Y) \cup S_1(Ch_\mu(k))$. Основное свойство построенной модели заключается в сохранении истинности формул из Y (см. [3, лемма 3.4.6]).

По построению модель $\mathscr{W} = \max(Y) \cup S_1(Ch_\mu(k))$ адекватна логике μ. Рассмотрим следующий, заданный индуктивно p-морфизм модели $\mathscr{W}$. Сгустки второго слоя, которые имеют одинаковое означивание и из которых достижимы одни и те же сгустки первого слоя модели $\mathscr{W}$, склеиваем. Отметим, что во втором слое квазикомпоненты преобразованной модели $\mathscr{W}$ (так же, как и во втором слое квазикомпоненты модели $Ch_\mu(k)$) содержится меньше 2^{2^k} элементов. Продолжая аналогичные сжатия в следующих слоях, получим μ-модель $\mathscr{M} = (\bigsqcup \mathscr{M}_j) \cup B_{\mathscr{M}}$, где $\mathscr{M}_j$ — открытая подмодель $\mathscr{M}$ такая, что $\exists c_j \forall x \in \mathscr{M}_j$ (xRc_j) и $B_{\mathscr{M}}$ — множество висячих вершин модели $\mathscr{M}$.

П. (а) выполняется по построению модели $\mathscr{M}$.

(б) Оценим мощность модели $\mathscr{M}$. Вначале оценим мощность одной квазикомпоненты $Qw_i(\mathscr{M})$. Пусть в $S_p(Qw_i(\mathscr{M}))$ содержится не более чем $\gamma(p)$ сгустков. Тогда количество антицепей в $S_p(Qw_i(\mathscr{M}))$ не превышает числа $2^{\gamma(p)}$ и, следовательно, $(p+1)$-й слой квазикомпоненты $Qw_i(\mathscr{M})$ содержит не более чем $2^{\gamma(p)}$ сгустков. Ранее отмечено, что количество сгустков во втором слое $Qw_i(\mathscr{M})$ не более чем 2^{2^k}, значит, $\gamma(2) \leq 2^{2^k}$. Таким образом, получаем следующие рекуррентные неравенства для оценки количества сгустков в $(p+1)$-м слое квазикомпоненты $Qw_i(\mathscr{M})$: $\gamma(1) = 1$, $\gamma(2) \leq 2^{2^k}$, $\gamma(p+1) \leq 2^{\gamma(p)}$. В $Qw_i(\mathscr{M})$ выберем цепь элементов L. Пусть $L_1, L_2 \in L$. Тогда по построению модели $\mathscr{M}$ имеем, что $\{\phi \mid L_1 \Vdash_S \phi, \phi \in Y\} \neq \{\phi \mid L_2 \Vdash_S \phi, \phi \in Y\}$, где Y — множество всех подформул правила r. Поэтому глубина $Qw_i(\mathscr{M})$ не больше чем $1 + 2^n$, где n — число элементов в множестве Y. Следовательно, квазикомпонента $Qw_i(\mathscr{M})$ содержит не более чем $\Gamma(n) = (1 + \gamma(2) + \ldots + \gamma(2^n + 1))$ сгустков. По определению квазикомпоненты количество квазикомпонент не более чем 2^{2^k}. Тогда количество сгустков в модели $\mathscr{M}$ без учета висячих вершин не более чем $2^{2^k}\Gamma(n)$. Оценим количество висячих вершин в модели $\mathscr{M}$. Количество висячих вершин модели $\mathscr{M}$, видящих i несравнимых сгустков первого слоя, не превышает $C^i_{2^{2^k}-1} * 2^{\Gamma(n)*i}$. Отсюда количество висячих вершин модели $\mathscr{M}$ не превышает

$$\sum_{i=2}^{2^{2^k}-1} C^i_{2^{2^k}-1} * 2^{\Gamma(n)*i} < (1 + 2^{\Gamma(n)})^{2^{2^k}-1}.$$

В итоге получаем, что количество сгустков модели $\mathscr{M}$ не превышает

$$2^{2^k}\Gamma(n) + (1 + 2^{\Gamma(n)})^{2^{2^k}-1}.$$

Утверждение (б) доказано.

(в) Покажем, что модель $\mathscr{W}$ имеет свойство реализации возможностей для каждой антицепи E, не содержащей висячих вершин. В силу задания логики μ модель $Ch_\mu(k)$ имеет разложение $Ch_\mu(k) = (\bigsqcup H_j) \cup B_{Ch_\mu(k)}$, где H_j — квазикомпонента модели $Ch_\mu(k)$, $B_{Ch_\mu(k)}$ — множество висячих вершин модели $Ch_\mu(k)$. По построению модель $\mathscr{W}$ представима в виде $\mathscr{W} = (\bigsqcup \mathscr{W}_j) \cup B_{\mathscr{W}}$, где $\mathscr{W}_j \subseteq H_j$ и $\mathscr{W}_j$ — открытая подмодель $\mathscr{W}$ такая, что $\exists c_j \forall x \in \mathscr{W}_j\ (xRc_j)$, $B_{\mathscr{W}}$ — множество висячих вершин модели $\mathscr{M}$. Отметим, что нетривиальной будем называть антицепь, количество сгустков в которой больше 1. В случае, если антицепь E является тривиальной, очевидно, что для любого x_E, принадлежащего сгустку E, выполняется свойство реализации возможностей. Пусть E является нетривиальной антицепью. Тогда по построению $Ch_\mu(k)$ антицепь E обладает одноэлементным конакрытием $\{c\}$ в модели $Ch_\mu(k)$, причем если $E \subset H_j$, то $c \in H_j$. Рассмотрим два возможных случая: $c \in \mathscr{W}$, $c \notin \mathscr{W}$. Если $c \in \mathscr{W}$, то для c выполняется свойство

$$\Diamond(c, Y) = \bigcup \{\Diamond(y, Y) \cup S(y, Y) \mid y \in E\} \cup S(c, Y).$$

Следовательно, модель $\mathscr{W}$ имеет свойство реализации возможностей для данной антицепи E, причем если $E \subset \mathscr{W}_j$, то $c \in \mathscr{W}_j$. Если $c \notin \mathscr{W}$, то по построению модели $\mathscr{W}$ элемент c не является квазимаксимальным и, значит, существует элемент $c' \in QH_Z$ такой, что cRc' и $S(c', Y) = S(c, Y)$. При этом если $c \in H_j$, то $c' \in H_j$ и $c' \in \mathscr{W}_j$. Отсюда в силу того, что c является одноэлементным конакрытием, получаем, что c' удовлетворяет определению 17 и модель $\mathscr{W}$ имеет свойство реализации возможностей для антицепи E, не содержащей висячих вершин, причем если $E \subset \mathscr{W}_j$, то $c' \in \mathscr{W}_j$.

Модель $\mathscr{M}$ является p-морфным образом модели $\mathscr{W}$, следовательно, она имеет свойство реализации возможностей относительно подформул правила r для каждой антицепи E, не содержащей висячих вершин, причем если E — антицепь, не содержащая висячих вершин, и $E \subset \mathscr{M}_j$, то существует элемент $x_E \in \mathscr{M}_j$, для которого выполняется свойство реализации возможностей для антицепи E. Утверждение (в) доказано.

(г) В силу того, что для модели $\mathscr{W}$ справедливо утверждение (в), заключаем, что модель $\mathscr{M}$ опровергает правило r. Лемма доказана.

Лемма 19. *Пусть существует μ-модель $\mathscr{M}$, описанная в лемме* 18. *Тогда правило вывода $r := \alpha_1, \dots, \alpha_n/\beta$ от k переменных недопустимо в логике μ.*

Доказательство. Пусть μ-модель $\mathscr{M} = \langle M, R, S\rangle$ имеет строение, описанное в лемме 18. Фрейм $\langle M, R\rangle$ является μ-фреймом, следовательно, в силу построения $Ch_\mu(k)$ без ограничения общности $\langle M, R\rangle$ можно рассматривать как открытый подфрейм $Ch_\mu(k)$. По теореме 3.3.7 [3] каждый элемент $Ch_\mu(k)$ с означиванием V является формульно определимым. Тем самым можно эффективно построить формулы, определяющие имеющееся означивание S переменных правила r во фрейме $\langle M, R\rangle$ как открытом конечном подфрейме $Ch_\lambda(k)$. По свойству (г) модели $\mathscr{M}$ означивание S опровергает правило r в этой модели. Продолжим означивание S на всю модель $Ch_\mu(k)$, при котором правило вывода r будет опровергаться в $Ch_\mu(k)$. По теореме 3.3.3 из [3] этим и будет доказано, что правило вывода r недопустимо в логике μ.

В силу задания логики μ модель $Ch_\mu(k)$ имеет разложение

$$Ch_\mu(k) = \Big(\bigsqcup H_j\Big) \cup B_{Ch_\mu(k)},$$

где $B_{Ch_\mu(k)}$ — множество висячих вершин модели $Ch_\mu(k)$. По построению модели $\mathscr{M}$ фрейм $\langle M, R\rangle$ является μ-фреймом. Фрейм $\mathscr{M}_j$ — это открытый подфрейм фрейма $\langle M, R\rangle$, следовательно, он является μ-фреймом для всех j. По построению $Ch_\mu(k)$ получаем, что фрейм $\mathscr{M}_j$ для всех j является открытым подфреймом $Ch_\mu(k)$. Отсюда по свойству (а) модели $\mathscr{M}$ выводим, что фрейм $\mathscr{M}_j$ является открытым подфреймом фрейма H_j для всех j.

В силу задания логики μ при удалении всех висячих вершин из фрейма $Ch_\mu(k)$ получим фрейм, совпадающий с фреймом $Ch_{S4.2}(k)$ (если $\mu = \mu_2$) либо с фреймом $Ch_{Grz.2}(k)$ в случае $\mu = \mu_2 \oplus Grz$.

По следствию 3.5.9 из [3] логики $S4.2$, $Grz.2$ удовлетворяют условию леммы 3.4.9 из [3]. Следовательно, к данным логикам применима лемма 3.4.10 из [3]. Отсюда, учитывая свойство (в) модели $\mathscr{M}$, получаем, что, применяя способ предложенный в доказательстве леммы 3.4.10 из [3], означивание S, заданное на фрейме $\mathscr{M}_j$, можно формульно продолжить на фрейм H_j для всех j с сохранением истинности посылки правила r в каждом фрейме H_j. Пусть S^1 — это вышеописанное формульное продолжение означивания S с $\bigsqcup\limits_j \mathscr{M}_j$ на $\bigsqcup\limits_j H_j$.

По теореме 3.3.7 из [3] каждый элемент модели $Ch_\mu(k)$ является формульно определимым. Поэтому сгусток $C_j \subseteq S_1(Ch_\mu(k))$ определяется формулой σ_j для каждого j, $j \in J$. Зададим формулу η_j следующим образом: $\eta_j = \Diamond\sigma_j \wedge \bigwedge\limits_{l \neq j} \neg\Diamond\sigma_l$. Очевидно, что формула η_j при означивании V истинна только на соответствующей компоненте H_j модели $Ch_\mu(k)$. По построению S^1 является формульно определимым, т. е. $S^1(p_i) = \{z \mid z \Vdash_V \omega_i\}$. Кроме того, означивание S^1 совпадает на $\bigsqcup_j H_j$ с означиванием T, заданным так:

$$T(p_i) = \Big\{z \mid z \Vdash_V \bigvee_j (\omega_i \wedge \eta_j)\Big\},$$

причем $\forall p \in \mathrm{Var}(r)(T(p) \cap B_{Ch_\mu(k)}) = \varnothing$.

Перейдем к рассмотрению висячих вершин. Пусть

$$U_x = \{\theta \mid \theta \in \mathrm{Sub}(r),\ \exists u(xRu \wedge u \Vdash_T \theta)\},$$

где x — висячая вершина модели $Ch_\mu(k)$. Введем формулу ϕ_x следующим образом:

$$\phi_x = \bigwedge_{\theta \in U_x} \Diamond\theta \wedge \bigwedge_{\zeta \in \mathrm{Sub}(r)\setminus U_x} \neg\Diamond\zeta.$$

Пусть $\phi_x(\omega_i/p_i)$ — формула, полученная из формулы ϕ_x заменой всех вхождений пропозициональных переменных p_i соответствующими формулами ω_i. На модели $Ch_\mu(k)$ определим означивание S^2:

$$\forall p \in \mathrm{Var}(r)\ \Big(S^2(p) := \Big\{z \mid z \Vdash_V \bigvee_{x \in B_{\mathscr{M}}, x \Vdash_S p} (\phi_x(\omega_i/p_i) \wedge \bigwedge_{i: xRC_i} \Diamond\sigma_i \wedge \bigwedge_{j: x\overline{R}C_j} \neg\Diamond\sigma_j)\Big\}\Big), \qquad (2)$$

где $\mathrm{Var}(r)$ — множество переменных, входящих в правило r. Подформула $\bigwedge_{i:xRC_i} \Diamond\sigma_i$ содержит не менее двух конъюнктивных членов, следовательно,

$$\forall p \in \mathrm{Var}(r) \forall j\ (S^2(p) \cap H_j) = \varnothing.$$

Предложение 20. *Пусть y — висячая вершина из $Ch_\mu(k)$. Тогда*

$$\exists x_y \in \mathscr{M}(\Diamond(x_y, \mathrm{Sub}(r)) = U_y \cup S(x_y, \mathrm{Sub}(r))).$$

Доказательство. Пусть y — произвольная висячая вершина из $Ch_\mu(k)$. Тогда $y \Vdash_T \bigwedge_{\theta \in U_y} \Diamond\theta \wedge \bigwedge_{\zeta \in \mathrm{Sub}(r)\setminus U_y} \neg\Diamond\zeta$. Покажем, что существует $x_y \in \mathscr{M}$ такой, что $\Diamond(x_y, \mathrm{Sub}(r)) = U_y \cup S(x_y, \mathrm{Sub}(r))$.

Пусть $y^{R<} = \{y_1, \dots, y_n\}^{R\leq}$. Отметим, что поскольку y является висячей вершиной, то элементы $y_1, \dots, y_n$ принадлежат нескольким различным квазикомпонентам k-характеристической модели $Ch_\mu(k)$ и ввиду условия

$$y \Vdash_T \bigwedge_{\theta \in U_y} \Diamond\theta \wedge \bigwedge_{\zeta \in \mathrm{Sub}(r)\setminus U_y} \neg\Diamond\zeta$$

получаем, что

$$y_i \Vdash_T \bigwedge_{\{\theta \mid \theta \in U_y, y_i \Vdash_{S^1} \theta\}} \theta \wedge \bigwedge_{\zeta \in \mathrm{Sub}(r)\setminus U_y} \neg\Diamond\zeta, \quad i \in [1, n].$$

В силу свойств означивания S^1 (см. [3, лемма 3.4.10]) и условия

$$\forall p \in \mathrm{Var}(r)\ (T(p) = S^1(p))$$

имеем

$$\forall y_i \Big(y_i \Vdash_T \bigwedge_{\{\theta \mid \theta\in U_y, y_i\Vdash_T\theta\}} \theta \wedge \bigwedge_{\zeta\in \mathrm{Sub}(r)\setminus U_y} \neg\Diamond\zeta \\ \to \exists x_i \in (\mathscr{M}\setminus B_{\mathscr{M}})(x_i \Vdash_T \bigwedge_{\{\theta \mid \theta\in U_y, y_i\Vdash_T\theta\}} \theta)\Big).$$

Пусть X — множество, состоящее из всех таких x_i. В множестве X возьмем все квазиминимальные элементы, полученное множество обозначим через QX. Определим теперь подмножество CQX модели $\mathscr{M}$ следующим образом. Множество CQX состоит из всех сгустков, содержащих элементы из множества QX. По построению CQX не содержит висячих вершин и $CQX \subset \mathscr{M}$. Отсюда в силу п. (в) леммы 18 получаем, что для множества CQX существует элемент x_{CQX}, реализующий такие же возможности, что и CQX, т. е.

$$\Diamond(x_{CQX}, \mathrm{Sub}(r)) = \bigcup\{\Diamond(u, \mathrm{Sub}(r)) \cup S(u, \mathrm{Sub}(r)) \mid u \in CQX\} \cup S(x_{CQX}, \mathrm{Sub}(r)).$$

В силу построения множества CQX элемент x_{CQX} реализует такие же возможности, что и множество $y_1, \dots, y_n$, т. е.

$$\Diamond(x_{CQX}, \mathrm{Sub}(r)) \\ = \bigcup\{\Diamond(v, \mathrm{Sub}(r)) \cup S(v, \mathrm{Sub}(r)) \mid v \in \{y_1, \dots, y_n\}\} \cup S(x_{CQX}, \mathrm{Sub}(r)). \quad (3)$$

Таким образом, выбирая в качестве элемента x_y элемент x_{CQX}, получаем

$$\Diamond(x_y, \mathrm{Sub}(r)) = U_y \cup S(x_y, \mathrm{Sub}(r)).$$

Предложение 20 доказано.

Предложение 21. *Пусть y — произвольная висячая вершина из $Ch_\mu(k)$, $x_y \in \mathscr{M}$ — элемент, определенный в доказательстве предложения* 20. *Тогда если $\psi \in \mathrm{Sub}(r)$, где $\mathrm{Sub}(r)$ — множество всех подформул правила r, то*

$$y \Vdash_{S^2} \psi \Leftrightarrow x_y \Vdash_{S^2} \psi.$$

Доказательство. Если $y \in \mathscr{M}$, то, выбирая в качестве x_y элемент y, получим, что предложение 21 справедливо. Рассмотрим случай, когда $y \notin \mathscr{M}$.

Индукцией по длине формулы ψ покажем, что $y \Vdash_{S^2} \psi \Leftrightarrow x_y \Vdash_{S^2} \psi$. Если ψ — пропозициональная переменная, то утверждение справедливо в силу определения означивания $S^2(p)$. В самом деле,

$$y \Vdash_{S^2} p \Leftrightarrow y \Vdash_V \bigvee_{x\Vdash_S\, p, x\in B_{\mathscr{M}}} (\phi_x(\omega_i/p_i) \\ \wedge \bigwedge_{i:xRC_i} \Diamond\sigma_i \wedge \bigwedge_{j:x\bar{R}C_j} \neg\Diamond\sigma_j)\}) \Leftrightarrow \exists x_y \in B_{\mathscr{M}}(x_y \Vdash_S p).$$

В силу того, что $\forall p \in \mathrm{Var}(r)$ $(S(p) = S^2(p))$, на модели $\mathscr{M}$ получаем, что $x_y \Vdash_S p \Leftrightarrow x_y \Vdash_{S^2} p$.

Пусть $\psi = \delta \vee \eta$. В данном случае имеем $y \Vdash_{S^2} \delta \vee \eta \Leftrightarrow y \Vdash_{S^2} \delta$ или $y \Vdash_{S^2} \eta$. Формулы δ, η содержат логических связок меньше, чем формула $\delta \vee \eta$, следовательно, по индуктивному предположению $y \Vdash_{S^2} \delta$ или $y \Vdash_{S^2} \eta \Leftrightarrow x_y \Vdash_{S^2} \delta$, или $x_y \Vdash_{S^2} \eta$. По определению связки $\vee$ имеем, что $x_y \Vdash_{S^2} \delta$ или $x_y \Vdash_{S^2} \eta \Leftrightarrow x_y \Vdash_{S^2} \delta \vee \eta$. Таким образом, для данного случая утверждение справедливо.

Пусть $\psi = \neg\delta$. По определению $\neg$ получим $y \Vdash_{S^2} \neg\delta \Leftrightarrow y \nVdash_{S^2} \delta$. По индуктивному предположению для формулы δ утверждение верно, следовательно, $y \nVdash_{S^2} \delta \Leftrightarrow x_y \nVdash_{S^2} \delta$. По определению связки $\neg$ будет $x_y \nVdash_{S^2} \delta \Leftrightarrow x_y \Vdash_{S^2} \neg\delta$.

Перейдем к рассмотрению модальной логической связки $\Diamond$. Пусть $y \Vdash_{S^2} \Diamond\delta$. Тогда возможны следующие случаи: 1) $y \Vdash_{S^2} \delta$, 2) $y \nVdash_{S^2} \delta$. В случае 1, так как формула δ содержит меньше логических связок, чем $\Diamond\delta$, по индуктивному предположению $x_y \Vdash_{S^2} \delta$. Поскольку $Ch_\mu(k)$ является рефлексивной моделью, то $x_y \Vdash_{S^2} \Diamond\delta$. Рассмотрим случай 2. Пусть $y \nVdash_{S^2} \delta$. Тогда по определению модальной связки $\Diamond$ в силу предположения $y \Vdash_{S^2} \Diamond\delta$ существует u такой, что yRu и $u \Vdash_{S^2} \delta$. Следовательно, $\delta \in U_y$. Отсюда по предложению 20 получаем, что $\delta \in \Diamond(x_y, \mathrm{Sub}(r))$. Значит, $x_y \Vdash_{S^2} \Diamond\delta$. Таким образом, если $y \Vdash_{S^2} \Diamond\delta$, то $x_y \Vdash_{S^2} \Diamond\delta$.

Пусть $x_y \Vdash_{S^2} \Diamond\delta$. Отдельно разберем возможные случаи: 1) $x_y \Vdash_{S^2} \delta$, 2) $x_y \nVdash_{S^2} \delta$. В случае 1 по индуктивному предположению получаем, что $y \Vdash_{S^2} \delta$. В силу того, что $Ch_\mu(k)$ является рефлексивной моделью, будет $y \Vdash_{S^2} \Diamond\delta$. Рассмотрим случай 2. Пусть $x_y \Vdash_{S^2} \Diamond\delta$ и $x_y \nVdash_{S^2} \delta$. Тогда существует элемент u такой, что x_yRu и $u \Vdash_{S^2} \delta$. Очевидно, элемент u не является висячей вершиной. Далее по выбору элемента x_y (см. (3)) получаем, что $\delta \in \Diamond(y_k, \mathrm{Sub}(r)) \cup S(y_k, \mathrm{Sub}(r))$ для некоторого $k \in [1, n]$, где $\{y_1, \dots, y_n\}^{R\leq} = y^{R<}$. Отсюда, поскольку $y^{R<} = \{y_1, \dots, y_n\}^{R\leq}$, имеем, что $y \Vdash_{S^2} \Diamond\delta$. В итоге мы показали, что если $\psi = \Diamond\delta$, то $y \Vdash_{S^2} \psi \Leftrightarrow x_y \Vdash_{S^2} \psi$. Так как все остальные логические связки можно выразить через рассмотренные, предложение 21 доказано для всех формул из $\mathrm{Sub}(r)$. Предложение 21 доказано.

В силу выбора означивания $T(p)$ и $S^2(p)$ являются формульно определимыми. Тогда означивание $S' = T \cup S^2$ формульно определимо. Поскольку $\forall p \in \mathrm{Sub}(r)$ $(T(p) \cap S^2(p)) = \varnothing$, по предложению 21, лемме 3.4.10 [3] и п. (г) из леммы 18 означивание S' опровергает правило r в конечной подмодели $\mathscr{M}$, а посылка правила r истинна при означивании S' на всей модели $Ch_\mu(k)$. Следовательно, означивание S' опровергает правило r в модели $Ch_\mu(k)$. Лемма доказана.

Используя леммы 18 и 19, мы можем построить алгоритм для распознавания допустимости правил вывода в модальной $S4$-логике μ_2, порожденной классом всех конечных корневых фреймов, удовлетворяющих условию (1), и логике $\mu_2 \oplus Grz$.

Теорема 22 (алгоритмический критерий допустимости). *Модальная логика μ разрешима относительно допустимости правил вывода.*

Доказательство. Пусть r — правило вывода от k переменных. Для того чтобы определить, допустимо или нет правило вывода r в логике μ, достаточно определить, существует ли μ-модель $\mathscr{M}$, удовлетворяющая условиям (а)–(г) леммы 18.

Если такая модель существует, то по лемме 19 правило вывода r недопустимо в логике μ. Предположим, что модели с вышеописанными свойствами не существует. Тогда правило вывода r допустимо в логике μ. В самом деле, предположим противное. Пусть правило вывода r недопустимо в логике μ. Тогда по лемме 18 существует μ-модель с вышеописанными свойствами, что противоречит условию доказываемого утверждения. Ясно, что существование модели $\mathscr{M}$, удовлетворяющей условиям (а)–(г) леммы 18, можно проверить за конечное число шагов, так как таких моделей ограниченной мощности конечное число. Теорема доказана.

Следствие 23. *Суперинтуиционистская логика μ_1, наименьший модальный напарник $\tau(\mu_1)$ и наибольший модальный напарник $\sigma(\mu_1)$ логики μ_1 над $S4$ разрешимы относительно допустимости правил вывода.*

Доказательство. По теоремам 9.68, 9.70 из [10] соответственно получаем, что $\sigma(\mu_1) = \mu_2 \oplus Grz$, $\tau(\mu_1) = \mu_2$. Следовательно, в силу теоремы 22 логики $\sigma(\mu_1)$, $\tau(\mu_1)$ разрешимы относительно допустимости правил вывода. Ввиду разрешимости по допустимости логики $\sigma(\mu_1)$ по теореме 3.2.2 [3] получаем, что логика μ_1 разрешима относительно допустимости правил вывода. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Maksimova L. L.* Strongly decidabile properties of modal and intuitionistic calculi // Logic J. IGPL. 2000. V. 8, N 6. P. 797–819.
2. *Maksimova L. L.* Intuitionistic logic and implicit definability // Ann. Pure Appl. Logic. 2000. V. 105, N 1–3. P. 83–102.
3. *Rybakov V. V.* Admissible logical inference rules. New York; Amsterdam: North-Holland, 1997. (Elseiver Sci. Publ. Stud. Logic Found. Math.; 136).
4. *Рыбаков В. В.* Критерий допустимости правил в модальной системе $S4$ и интуиционистской логике // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 5. С. 369–384.
5. *Besgacheva U. V.* Admissible rules for the logic LinTGrz // Bull. Sect. Logic. 1997. V. 26, N 2. P. 60–67.
6. *Бабенышев С. В.* Разрешимость проблемы допустимости правил вывода в модальных логиках $S4.1$ и $S4.2$ и суперинтуиционистской логике KC // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 4. С. 341–360.
7. *Кияткин В. Р.* Правила вывода с метапеременными и логические уравнения в предтабличной модальной логике PM1 // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 88–97.
8. *Dummett M., Lemmon E.* Modal logics between $S4$ and $S5$ // Z. Math. Log. Grundl. Math. 1959. Bd 5. S. 260–264.
9. *Максимова Л. Л., Рыбаков В. В.* Решетка нормальных модальных логик // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 2. С. 105–122.
10. *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford: Clarendon press, 1997.

Статья поступила 24 апреля 2002 г.

Голованова Екатерина Михайловна
Красноярский гос. университет, пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
glvnv@home.krasnoyrsk.ru