Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2003. Том 44, № 3

УДК 517.977

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ

С. Я. Серовайский

Аннотация: Рассматривается задача оптимального управления для системы, описываемой сингулярным уравнением параболического типа. Для ее исследования применяется специфический метод регуляризации. Устанавливаются существование решения регуляризованной задачи и соответствующие необходимые условия оптимальности. Полученные результаты позволяют найти приближенное решение исходной задачи даже в отсутствие ее разрешимости

Ключевые слова: оптимальное управление, сингулярные системы, регуляризация, приближенное решение

1. Понятие приближенного решения экстремальной задачи

Для уточнения используемого в дальнейшем понятия приближенного решения рассмотрим сначала некоторую абстрактную экстремальную задачу. Пусть заданы линейные топологические пространства V, W, подмножество V_0 из V, оператор $A : V \to W$ и функционал I на V_0. Определим множество допустимых значений $U = \{v \in V_0 \mid Av = 0\}$. Имеем следующую постановку экстремальной задачи.

Задача 1. *Необходимо минимизировать функционал I на множестве U.*

В приложениях значение v представляет собой пару «управление-состояние», соотношение $Av = 0$ является уравнением состояния, характеризующим зависимость функции состояния системы от управления, а множество V_0 описывает явные ограничения, налагаемые на систему.

При ограниченности снизу функционала I существует его нижняя грань $\inf I(U)$ на множестве U. Тогда можно найти такую последовательность $\{v_k\}$ из U, называемую минимизирующей (см., например, [1]), что имеет место сходимость $I(v_k) \to \inf I(U)$. Зная минимизирующую последовательность, в качестве приближенного решения задачи 1 можно выбрать элемент этой последовательности с достаточно большим номером. Тем самым для любого $\delta > 0$ определяется такое значение $v^* \in U$, называемое приближенным решением задачи, что справедливо неравенство $I(v^*) \leq \inf I(U) + \delta$. Таким образом, приближенное решение есть такое допустимое значение, функционал на котором сколь угодно близок к его нижней грани на множестве допустимых значений. Отметим, что точное решение задачи v_0 может при этом даже не существовать, а в случае его существования близость значения v^* к v_0 в топологии пространства V не гарантирована.

В теории оптимального управления особый интерес представляют экстремальные задачи, корректные в смысле Тихонова (см., например, [2]). Они заведомо разрешимы, а любая минимизирующая последовательность сходится к их решению. Минимизирующую последовательность назовем *тихоновской*, если она сходится к решению задачи. Естественно, в корректных экстремальных задачах всякая минимизирующая последовательность является тихоновской. С помощью тихоновской минимизирующей последовательности можно обеспечить не только близость соответствующего функционала к его нижней грани, но и близость самого выбранного приближения к решению задачи v_0. Тогда для любого $\delta > 0$ и любой окрестности $O(v_0)$ точки v_0 может быть определено такое значение $v^* \in U$, называемое *тихоновским приближенным решением* задачи 1, что справедливы включение $v^* \in O(v_0)$ и неравенство $I(v^*) \leq \inf I(U) + \delta$.

Отметим, что условие минимизируемости последовательности можно записать и в виде неравенства $I(v_0) \leq \inf \lim I(v_k) \leq \inf I(U)$, а предшествующее соотношение — в виде $I(v_0) \leq I(v^*) \leq \inf I(U) + \delta$. Тихоновское приближенное решение есть допустимое значение, сколь угодно близкое к решению задачи, с функционалом, сколь угодно близким к его нижней грани. Любое тихоновское приближенное решение является обычным приближенным решением, причем для корректных задач эти два понятия эквивалентны.

Заметим, что в прикладных задачах, даже и не очень сложных, построение тихоновских минимизирующих последовательностей и соответствующих приближенных решений, как правило, оказывается чрезвычайно сложной и подчас непреодолимой проблемой. В этой связи представляется целесообразным ослабить требования, предъявляемые к приближенному решению задачи. В частности, коль скоро мы считаем приемлемым минимизацию функционала с какой-то погрешностью, было бы логичным допустить, чтобы и равенство $Av = 0$ выполнялось не абсолютно точно, а лишь с какой-то (по возможности достаточно высокой) степенью точности. Тем самым приходим к понятию *слабой минимизирующей последовательности.* Под ней будем понимать такую последовательность $\{v_k\}$ из V_0, сходящуюся в смысле V к решению v_0 задачи 1, что реализуются сходимость $Av_k \to 0$ в W и соотношение $I(v_0) \leq \inf \lim I(v_k) \leq \inf I(U)$. С ее помощью можно определить новую форму приближенного решения задачи. При этом для любого $\delta > 0$, любой окрестности $O(v_0)$ точки v_0 и любой окрестности $O(0)$ нуля в пространстве W может быть определено такое значение $v^* \in (V_0 \cap O(v_0))$, называемое *слабым приближенным решением* задачи, что справедливы включение $Av^* \in O(0)$ и соотношение $I(v_0) \leq I(v^*) \leq \inf I(U) + \delta$. Слабое приближенное решение есть значение, удовлетворяющее явным ограничениям на систему, а также данному уравнению с достаточной степенью точности, сколь угодно близкое к решению задачи, с функционалом, сколь угодно близким к его нижней грани. Любое тихоновское приближенное решение задачи является ее слабым приближенным решением.

Хотя поиск слабого приближенного решения экстремальной задачи связан с существенно меньшими трудностями по сравнению с тихоновским приближенным решением, зачастую и эта проблема оказывается чрезвычайно сложной, а возможно, и просто неразрешимой. Известно, что экстремальные задачи, как правило, не имеют решения, т. е. нижняя грань функционала на заданном множестве часто оказывается недостижимой. Тем не менее отсутствие минимума функционала еще не делает задачу бессмысленной (см., например, [3]), поскольку его нижняя грань существует, а значит, может быть достигнута с определенной степенью точности. Таким образом, приближенное решение экстремальной задачи может существовать и в отсутствие ее разрешимости. Однако в этом случае уже не имеют смысла понятия тихоновского и слабого приближенных решений задачи, поскольку здесь явным образом используется понятие ее точного решения. Отказываясь от оптимальности значения v_0 в определении слабой минимизирующей последовательности и приближенного решения задачи, приходим к ослабленным формам этих понятий.

Под *ослабленной минимизирующей последовательностью* будем понимать такую последовательность $\{v_k\}$ из V_0, что имеют место сходимость $v_k \to v_0$ в V и $Av_k \to 0$ в W, а также неравенство $I(v_0) \leq \inf \lim I(v_k) \leq \inf I(U)$. Единственным отличием от предшествующего понятия здесь является отсутствие каких-либо требований, предъявляемых к значению v_0. В условиях недостижимости нижней грани функционала оно заведомо не может быть решением задачи, что не мешает определить еще один класс приближенных решений экстремальной задачи. Предположим, что для некоторого значения v_0 пространства V для любого $\delta > 0$, любой окрестности $O(v_0)$ точки v_0 и любой окрестности $O(0)$ нуля в пространстве W можно быть определено такое значение $v^* \in (V_0 \cap O(v_0))$, называемое *ослабленным приближенным решением задачи*, что справедливы включение $Av^* \in O(0)$ и соотношение $I(v_0) \leq I(v^*) \leq \inf I(U) + \delta$. Ослабленное приближенное решение есть значение, сколь угодно близкое к множеству допустимых значений, обеспечивающее в определенном смысле близость функционала к его нижней грани. Поскольку единственным отличием от предшествующего понятия является отсутствие требования оптимальности v_0, слабо приближенное решение задачи наверняка оказывается ослабленным приближенным.

В определении ослабленного приближенного решения смущает прежде всего отсутствие каких-либо требований к точке v_0, кроме ее принадлежности пространству V. В этих условиях ее, казалось бы, следует исключить из приведенных определений, упростив последние без ущерба для их смысла. Более того, в отсутствие оптимальности v_0 ослабленная минимизирующая последовательности в пределе может дать значение функционала, не равное в точности его нижней грани, что вызывает сомнение в правомочности использования здесь термина «минимизирующая последовательность», хотя бы и ослабленном смысле. Однако отметим, что получаемое предельное значение функционала никак не может быть больше его нижней грани, в то время как справедливость уравнения состояния в пределе обеспечивается со все возрастающей степенью точности. Эти обстоятельства дают определенные основания удовлетвориться данными понятиями в отсутствие чего-либо более приемлемого.

Отметим также, что можно легко описать класс экстремальных задач, для которых любая ослабленная минимизирующая последовательность и ослабленное приближенное решения совпадают с соответствующими слабыми понятиями. Значение v_0 при этом оказывается оптимальным, что и служит основанием для его использования в приведенных выше определениях. Действительно, если множество V_0 замкнуто в V, то справедливо включение $v_0 \in V_0$. Если же оператор A непрерывен точке v_0, то имеет место сходимость $Av_k \to Av_0$ в W, а значит, $Av_0 = 0$. Таким образом, v_0 оказывается допустимым управлением, которое в силу неравенства $I(v_0) \leq \inf I(U)$ является также и оптимальным. Тем самым в условиях замкнутости множества V_0 и непрерывности оператора

A понятия слабого и ослабленного приближенных решений и соответствующие минимизирующие последовательности совпадают.

Ниже будет рассмотрена задача оптимального управления для сингулярного параболического уравнения. Ее разрешимость устанавливается лишь при определенных ограничениях на параметры системы. Тем не менее даже в ее общей постановке будет описан алгоритм, позволяющий строить ослабленные минимизирующие последовательности, а значит, находить ослабленные приближенные решения задачи. При этом показывается, что в условиях существования решения экстремальной задачи тот же алгоритм дает уже слабо минимизирующую последовательность, обеспечив и сколь угодно точное выполнение уравнения состояния, и сколь угодно высокую степень близости определяемого приближенного решения задачи к ее точному решению, и достижение нижней грани функционала с произвольной степенью точности. В качестве частного случая здесь получаются известные результаты из монографии Ж.-Л. Лионса [4].

2. Постановка оптимизационной задачи для сингулярного уравнения

Пусть Ω — открытая ограниченная область из $\mathbb{R}^n$ с границей S, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = S \times (0,T)$. Рассматривается система, описываемая уравнением

$$y' = \Delta y + |y|^\rho y + u \quad \text{на } Q \tag{2.1}$$

с условиями

$$y|_{t=0} = y^0 \text{ на } \Omega, \quad y = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{2.2}$$

где $y' = \partial y/\partial t$, $\rho > 0$, u — управление, y^0 — известная функция класса $H_0^1(\Omega)$. Уравнение (2.1) при данном знаке перед нелинейным членом не имеет априорных оценок. Оно оказывается сингулярным в том смысле, что краевая задача (2.1), (2.2) на конкретном управлении, вообще говоря, не имеет глобального решения (см. [4, с. 48]). Тем не менее для некоторых управлений такое решение существует, вследствие чего можно поставить оптимизационную задачу на множестве возможных решений данной системы.

Рассматривается функционал

$$I(u,y) = \frac{1}{r}\|y - z\|_r^r + \frac{\nu}{q}\|u\|_q^q,$$

где z — известная функция класса $L_r(Q)$, $\nu > 0$, $r > 1$, $q > 1$, а через $\|\cdot\|_p$ обозначаются нормы в пространстве $I_p(Q)$. Пусть задано выпуклое замкнутое подмножество U_0 пространства $L_q(Q)$. В соответствии с общей концепцией исследования сингулярных управляемых систем [4] *допустимой парой* для системы (2.1), (2.2) назовем пару $u \in U_0$, $y \in Y$, которая удовлетворяет указанным соотношениям, где $Y = W_s^{2,1}(Q) \cap L_r(Q)$, $W_s^{2,1}(Q)$ — пространство функций, интегрируемых со степенью s вместе со вторыми производными по пространственным переменным и первой производной по времени, $s = \min\{q, a\}$, $a = r/(\rho + 1)$ при $r > \rho + 1$ и $s = q$ при $r \le \rho + 1$.

Сформулируем следующую задачу оптимального управления.

Задача 2. *Необходимо минимизировать функционал I на множестве допустимых пар системы* (2.1), (2.2).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *При $r > \rho + 1$ задача 2 разрешима.*

Доказательство. В силу ограниченности снизу функционала I для задачи 2 существует минимизирующая последовательность, т. е. такая последовательность допустимых пар $\{v_k\} = \{u_k, y_k\}$, что справедливо условие

$$I(v_k) \to \inf I, \tag{2.3}$$

где нижняя грань берется по множеству всех допустимых пар. В силу коэрцитивности функционала в пространстве $L_q(Q) \times L_r(Q)$ из условия (2.3) следует ограниченность на нем рассматриваемой последовательности.

Поскольку пара (u_k, y_k) является допустимой, ее компоненты связаны равенством

$$y_{k'} = \Delta y_k + |y_k|^\rho y_k + u_k.$$

Тем самым функция y_k оказывается решением краевой задачи

$$y_k' = \Delta y_k + f_k \quad \text{на } Q, \tag{2.4}$$

$$y_k|_{t=0} = y^0 \text{ на } \Omega, \quad y_k = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{2.5}$$

где $f_k = |y_k|^\rho y_k + u_k$. Учитывая установленный ранее результат, заключаем, что при $r > \rho + 1$ последовательность $\{f_k\}$ ограничена в классе $L_s(Q)$. Тогда, пользуясь классической теорией линейных уравнений параболического типа (см., например, [4, с. 36]), установим ограниченность решений задачи (2.4), (2.5), т. е. последовательности $\{y_k\}$ в пространстве $W_s^{2,1}(Q)$, а значит, и в Y. После выделения подпоследовательности (с сохранением прежнего обозначения) имеем сходимость

$$u_k \to u \text{ слабо в } L_q(Q), \quad y_k \to y \text{ слабо в } Y. \tag{2.6}$$

Учитывая компактность вложения пространства $W_s^{2,1}(Q)$ в $L_{\beta-\alpha}(Q)$ (см. [5, теорема 5.1, с. 70]), где $\alpha > 0$, $1/\beta = 1/s + 1/(n+2)$, установим, что $y_k \to y$ сильно в $L_{\beta-\alpha}(Q)$ и п. в. на Q. Имея сходимость $|y_k|^\rho y_k \to |y|^\rho y$ п. в. на Q и ограниченность последовательности $\{|y_k|^\rho y_k\}$ в пространстве $L_a(Q)$, с помощью леммы 1.3 (см. [5, с. 25]) получаем, что $|y_k|^\rho y_k \to |y|^\rho y$ слабо в $L_a(Q)$. Переходя к пределу в задаче (2.4), (2.5), установим справедливость соотношений (2.1), (2.2). Учитывая выпуклость и замкнутость множества U_0, заключаем, что пара $v = (u, y)$ является допустимой.

Пользуясь условиями (2.6), получаем неравенство

$$\lim I(v_k) \geq I(v),$$

откуда в силу (2.3) следует, что значение v является оптимальным. Теорема доказана.

Задача 2 исследовалась Ж.-Л. Лионсом (см. [4]) при $\rho = 2$, $q = 2$, $r = 6$. В частности, теорема 1 является естественным обобщением теоремы 1.3 (см. [4, с. 33]). Далее в [4] производилась регуляризация задачи с помощью метода адаптированного штрафа и устанавливались необходимые условия оптимальности для регуляризованной задачи. Эти результаты могут быть легко распространены на общий случай в условиях разрешимости задачи 2, т. е. при $r > \rho + 1$. Однако при доказательстве сходимости метода штрафа (см. [4, с. 52]) эти ограничения на параметры задачи носят принципиальный характер, а имеющейся регулярности рассматриваемых функций уже недостаточно для перехода к пределу в условиях оптимальности для регуляризованной задачи при стремлении к нулю параметра регуляризации. В данном случае возможность анализа поставленной задачи без указанных ограничений на ее параметры и даже при возможной неразрешимости задачи 2 обусловлена применением несколько иной формы метода регуляризации и ослаблением самого понятия приближенного решения задачи.

3. Регуляризованная оптимизационная задача

Рассмотрим задачу 2 в общей постановке, т. е. в отсутствие ограничений на параметры, использованных в [4], без обязательного выполнения неравенства $r > \rho+1$ и при возможной неразрешимости задачи 2. Мы также будем использовать метод штрафа, но не адаптированный, поскольку последний предполагает явное использование (а значит, существование) оптимального управления. С целью получения дополнительных априорных оценок в регуляризованный функционал добавим дополнительное слагаемое, в некотором смысле аналогичное стабилизатору в методе регуляризации Тихонова (см., например, [2]).

Прежде всего приведем задачу к описанной ранее общей форме. Определим в качестве V произведение пространств $L_q(Q) \times L_r(Q)$, наделенное соответствующей слабой топологией. Определим множество

$$V_0 = \{(u, y) \mid u \in U_0,\ y \in Y,\ y|_{t=0} = y^0\}$$

и оператор A, определенный на произведении $L_q(Q) \times Y$, в соответствии с равенством

$$A(u, y) = y' - \Delta y - |y|^\rho y - u.$$

Тогда множество допустимых пар системы (2.1), (2.2) может быть представлено в виде

$$U = \{v \in V_0 \mid Av = 0\}.$$

В результате рассматриваемая задача сводится к абстрактной экстремальной задаче 1.

Зададим вспомогательный функционал

$$I_\varepsilon(u, y) = I(u, y) + \frac{\varepsilon\gamma}{b}\|y\|_b^b + \frac{1}{\varepsilon q}\|A(u, y)\|_q^q,$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр регуляризации, $\gamma = 0$ при $r > \rho+1$ и $\gamma = 1$ при $r \le \rho+1$, $b = \rho+1+\alpha$, $\alpha > 0$. В условиях теоремы существования решения задачи 2 мы имеем стандартный метод штрафа [4], а при $r \le \rho+1$ функционал включает в себя еще одно слагаемое, обеспечивающее получение дополнительной априорной оценки и стремящееся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Поставим регуляризованную экстремальную задачу.

Задача 3. *Необходимо минимизировать функционал I_ε на множестве V_0.*

По аналогии с теоремой 1 установим справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ задача 3 разрешима.*

Доказательство. В силу ограниченности снизу функционала I_ε на множестве V_0 существует минимизирующая последовательность $\{u_k, y_k\}$ из V_0, т. е. справедливо условие $I_\varepsilon(u_k, y_k) \to \inf I_\varepsilon(V_0)$. Тогда из определения I_ε следует ограниченность последовательности $\{y_k\}$ в пространстве $L_c(Q)$ и последовательностей $\{u_k\}$ и $\{g_k\}$ в $L_q(Q)$, где

$$g_k = y_k' - \Delta y_k - |y_k|^\rho y_k - u_k, \quad c = \begin{cases} r & \text{при } r > \rho + 1, \\ b & \text{при } r \le \rho + 1. \end{cases}$$

Отсюда следует ограниченность последовательности $\{f_k\}$ в пространстве $L_d(Q)$, где $f_k = g_k + |y_k|^\rho y_k + u_k$, $d = \min\{q, c/(\rho+1)\}$. В результате оказывается, что функция y_k является решением задачи (2.4), (2.5), а значит, она ограничена в пространстве $W_d^{2,1}(Q)$ (см. доказательство теоремы 1). После выделения подпоследовательностей установим, что $u_k \to u$ слабо в $L_q(Q)$, $y_k \to y$ слабо в $Z = W_d^{2,1}(Q) \cap L_c(Q)$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, выводим соотношение

$$\lim I_\varepsilon(u_k, y_k) \geq I_\varepsilon(u, y),$$

откуда следует, что пара (u, y) является решением задачи 3. Теорема доказана.

Безусловная разрешимость задачи 3 обеспечивается наличием дополнительной априорной оценки для элементов минимизирующей последовательности, получаемой с помощью второго слагаемого в определении регуляризованного функционала.

Условия оптимальности для задачи 3 дает следующее утверждение.

Теорема 3. *Для того чтобы пара $v_\varepsilon = (u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ была решением задачи 3, необходимо выполнение соотношения*

$$\int\limits_Q (\nu|u_\varepsilon|^{q-2}u_\varepsilon + p_\varepsilon)(w - u_\varepsilon)\, dQ \geq 0 \quad \forall w \in U_0, \tag{3.1}$$

где p_ε — решение краевой задачи

$$p_\varepsilon' + \Delta p_\varepsilon + (p+1)|y_\varepsilon|^\rho p_\varepsilon = -|y_\varepsilon - z|^{r-2}(y_\varepsilon - z) - \gamma\varepsilon|y_\varepsilon|^{b-2}y_\varepsilon \quad \text{на } Q, \tag{3.2}$$

$$p_\varepsilon|_{t=T} = 0 \text{ на } \Omega, \quad p_\varepsilon = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{3.3}$$

а y_ε — решение задачи

$$y_\varepsilon' - \Delta y_\varepsilon - |y_\varepsilon|^\rho y_\varepsilon - u_\varepsilon = \varepsilon^{1/(q-1)}|p_\varepsilon|^{q'-1}p_\varepsilon \quad \text{на } Q, \tag{3.4}$$

$$y_\varepsilon|_{t=0} = y_0 \text{ на } \Omega, \quad y_\varepsilon = 0 \text{ на } \Sigma. \tag{3.5}$$

Доказательство. Поскольку множество V_0 включает в себя ограничения на первый аргумент функционала I_ε и не содержит ограничений на второй аргумент (кроме задания функционального класса и начального условия), необходимыми условиями экстремума для задачи 3 будут вариационное неравенство по первому аргументу и условие стационарности по второму аргументу (см., например, [1]):

$$I_{\varepsilon u}(v_\varepsilon)(w - u_\varepsilon) \geq 0 \quad \forall w \in U, \tag{3.6}$$

$$I_{\varepsilon y}(v_\varepsilon) = 0, \tag{3.7}$$

где $I_{\varepsilon u}$ и $I_{\varepsilon y}$ — частные производные функционала I_ε. Естественно, существование этих производных нуждается в обосновании.

Поскольку в соответствии с теоремой 2 оптимальное состояние y_ε для задачи 3 оказывается элементом пространства Z, под $I_{\varepsilon y}$ можно понимать соответствующую производную по подпространству Z из Y. Это означает (см. [6]), что при варьировании функционала по второму аргументу приращение можно выбирать из класса Z. Для обеспечения справедливости условия (2.2) указанное приращение должно удовлетворять нулевым начальным условиям, что опять-таки согласуется с определением производной по подпространству Z_0 из Z функций, равных нулю при $t = 0$, и с понятием расширенной производной оператора [7]. Таким образом, под $I_{\varepsilon y}$ в равенстве (3.7) будет пониматься частная производная по подпространству Z_0.

Для любых функций u, g из $L_q(Q)$, y из Z и числа σ справедливо равенство

$$I_\varepsilon(u+\sigma g, y) - I_\varepsilon(u,y) = \frac{\nu}{q}\int\limits_0 [|u+\sigma g|^q - |u|^q]\,dQ$$
$$+ \frac{1}{q\varepsilon}\int\limits_Q [|A(u+\sigma g, y)|^q - |A(u,y)|^q]\,dQ$$
$$= \sigma\nu\int\limits_Q |u|^{q-2}ug\,dQ + \frac{\sigma}{\varepsilon}\int\limits_Q [|A(u,y)|^{q-2}A(u,y)g]\,dQ + o(\sigma).$$

В результате находим производную функционала по первому аргументу из условия

$$I_{\varepsilon u}(u,y)g = \nu\int\limits_Q |u|^{q-2}ug\,dQ + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_Q [|A(u,y)|^{q-2}A(u,y)g]\,dQ \quad \forall g \in L_q(Q).$$

Подставляя это значение в неравенство (3.6), установим соотношение (3.1), где

$$p_\varepsilon = \varepsilon^{-1}|A(u_\varepsilon, y_\varepsilon)|^{q-2}A(u_\varepsilon, y_\varepsilon).$$

Учитывая, что значение оператора A на решении задачи 3 принадлежит пространству $L_q(Q)$, получаем включение $p_\varepsilon \in L_{q'}(Q)$, где $1/q + 1/q' = 1$. Из предшествующего равенства следует также справедливость условия (3.4). Краевые условия (3.5) выполняются, поскольку решение задачи 3 должно удовлетворять соотношениям (1.2).

Аналогично для любых функций u из пространства $L_q(Q)$, y из Z, h из Z_0 и числа σ справедливо равенство

$$I_\varepsilon(u, y+\sigma h) - I_\varepsilon(u,y) = \frac{1}{r}\int\limits_Q [|y+\sigma h - z|^r - |y-z|^r]\,dQ$$
$$+ \frac{\varepsilon y}{b}\int\limits_Q [|y+\sigma h|^b - |y|^b]\,dQ + \frac{1}{q\varepsilon}\int\limits_Q [|A(u, y+\sigma h)|^q - |A(u,y)|^q]\,dQ$$
$$= \sigma\int\limits_Q |y-z|^{r-2}(y-z)h\,dQ + \sigma\varepsilon\gamma\int\limits_Q |y|^{b-2}yh\,dQ$$
$$+ \frac{\sigma}{\varepsilon}\int\limits_Q \{|A(u,y)|^{q-2}A(u,y)[h' - \Delta h - (\rho+1)|y|^\rho h]\}\,dQ + o(\sigma).$$

Отсюда следует соотношение

$$I_{\varepsilon y}(u,y)h = \int\limits_Q |y-z|^{r-2}(y-z)h\,dQ + \varepsilon y\int\limits_Q |y|^{b-2}yh\,dQ$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_Q \{|A(u,y)|^{q-2}A(u,y)[h' - \Delta h - (\rho+1)|y|^\rho h]\}\,dQ \quad \forall h \in Z.$$

В результате условие (3.7) принимает вид

$$\int\limits_Q \{[|y_\varepsilon - z|^{r-2}(y_\varepsilon - z) + \varepsilon y|y_\varepsilon|^{b-2}y_\varepsilon]h + p_\varepsilon[h' - \Delta h - (\rho+1)|y_\varepsilon|^\rho h]\}\,dQ = 0 \quad \forall h \in Z_0.$$

Тогда функция p_ε оказывается решением краевой задачи (3.2), (3.3) из класса $L_{q'}(Q)$. Теорема доказана.

Необходимые условия оптимальности для регуляризованной задачи немного отличаются по форме от тех, что приводятся в [4] при $\rho = 2$, $q = 2$, $r = 6$. Тем не менее с помощью эквивалентных преобразований они могут быть записаны в одном и том же виде. Теоремы 2 и 3 являются обобщениями аналогичных результатов из [4], поскольку они не связаны указанными ограничениями на параметры задачи. Однако это обобщение не столь уж принципиально, поскольку обоснование разрешимости и условий оптимальности для регуляризованной задачи, в основном, осуществлялось в соответствии с математическим аппаратом, описанным в [4]. Отличиями здесь являются лишь использование производной по подпространству и применение некоторой версии метода регуляризации Тихонова совместно с методом штрафа. Однако первый прием не столь уж существенный, а второй, хотя и обеспечивает безусловную разрешимость регуляризованной задачи (чего не удается достичь при использовании метода регуляризации из [4]), не использует новых технических приемов при доказательстве разрешимости задачи 3 и построении для нее условий оптимальности.

Решающее отличие здесь связано с обоснованием сходимости метода регуляризации. Используемая в [4] методика ориентирована на получение слабого (в смысле принятой выше терминологии) приближенного решения задачи 2. В этом случае отказ от условий $\rho = 2$, $q = 2$, $r = 6$ и их непринципиальных обобщений, допускающих реализацию с помощью описанного в [4] математического аппарата, приводит здесь к существенным трудностям, непреодолимым в рамках указанного подхода. В отсутствие же разрешимости рассматриваемой задачи подобная техника вообще теряет смысл. Ослабление требований, предъявляемых к приближенному решению задачи, позволяет установить некоторые положительные результаты и в общем случае.

4. Приближенное решение оптимизационной задачи

Для любого $\varepsilon > 0$ задача 3 имеет решение $v_\varepsilon = (u_\varepsilon, y_\varepsilon)$, которое, в принципе, может быть найдено в процессе решения соотношений (3.1)–(3.5). Установим свойства семейства $\{v_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$. Поскольку параметр ε можно уменьшать дискретно, выражение $\{v_\varepsilon\}$ мы будем для простоты называть последовательностью, а не направленностью, каковой она в действительности является. В дальнейшем мы будем также выделять из $\{v_\varepsilon\}$ подсемейства, называя их подпоследовательностями. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Последовательность $\{v_\varepsilon\}$ является ослабленной минимизирующей для задачи* 2.

Доказательство. Поскольку функционал I ограничен снизу на множестве U, существует его нижняя грань на этом множестве, а значит, и приближенное решение задачи 2 в определенном ранее смысле. Тогда для любого $\delta > 0$ существует такое значение $v^\delta = (u^\delta, y^\delta)$ из U, что имеет место неравенство

$$I(v^\delta) \le \inf I(U) + \delta.$$

Учитывая оптимальность пары v_ε для задачи 3, установим соотношение

$$I_\varepsilon(v_\varepsilon) = \min I_\varepsilon(V_0) \le I_\varepsilon(v^\delta) = I(v^\delta) + \frac{\gamma\varepsilon}{b}\|y^\delta\|_b^b \le \inf I(U) + \delta + \frac{\gamma\varepsilon}{b}\|y^\delta\|_b^b.$$

В результате получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(v_\varepsilon) \le \inf I(U) + \delta.$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$, будем иметь

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(v_\varepsilon) \le \inf I(U). \tag{4.1}$$

Пользуясь неравенством (4.1) и определением регуляризованного функционала, установим следующие оценки:

$$\|y_\varepsilon\|_r \le \text{const}, \quad \|u_\varepsilon\|_q \le \text{const}, \tag{4.2}$$

$$\|Av_\varepsilon\|_q \le \varepsilon^{1/q}\,\text{const}, \tag{4.3}$$

в правых частях которых находятся различные константы, не зависящие от ε. Учитывая полученные неравенства в соответствии с теоремой Банаха — Алаоглу, из $\{v_\varepsilon\}$ выделим такую подпоследовательность (сохраняя для простоты исходные обозначения), что имеет место сходимость

$$y_\varepsilon \to y_0 \text{ слабо в } L_r(Q), \quad u_\varepsilon \to u_0 \text{ слабо в } L_q(Q), \tag{4.4}$$

$$Av_\varepsilon \to 0 \quad \text{слабо в } L_q(Q). \tag{4.5}$$

Условия (4.4) равносильны соотношению $v_\varepsilon \to v_0$ в V, где $v_0 = (u_0, y_0)$. Тогда, учитывая выпуклость и непрерывность функционала I в пространстве $I_q(Q) \times L_r(Q)$, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(v_\varepsilon) \ge I(v_0). \tag{4.6}$$

Из определения регуляризованного функционала следует неравенство $I_\varepsilon(v) \ge I(v)$ для всех $v \in V$. Отсюда вытекает, что $I_\varepsilon(v_\varepsilon) \ge I(v_\varepsilon)$, а значит,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(v_\varepsilon) \ge \lim_{\varepsilon\to 0} I(v_\varepsilon).$$

Тогда, пользуясь соотношениями (4.1) и (4.4), будем иметь

$$I(v_\varepsilon) \le \lim_{\varepsilon\to 0} I(v_\varepsilon) \le \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(v_\varepsilon) \le \inf I(U). \tag{4.7}$$

Из условий (4.4), (4.5) и (4.7) следует, что последовательность $\{v_\varepsilon\}$ является ослабленной минимизирующей для задачи 3. Теорема доказана.

Убедимся, что при выполнении условия $r > \rho + 1$, гарантирующего в соответствии с теоремой 2 разрешимость задачи 2, последовательность $\{v_\varepsilon\}$, определяемая соотношениями (3.1)–(3.5), оказывается также слабой минимизирующей.

Теорема 5. *При $r > \rho + 1$ последовательность $\{v_\varepsilon\}$ является слабой минимизирующей для задачи 2.*

Доказательство. Из оценки (4.3) получим, что функция y_ε является решением краевой задачи

$$y'_\varepsilon - \Delta y_\varepsilon = |y_\varepsilon|^\rho y_\varepsilon + u_\varepsilon + f_\varepsilon \quad \text{на } Q, \tag{4.8}$$

$$y_\varepsilon|_{t=0} = y^0 \text{ на } \Omega, \quad y_\varepsilon = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{4.9}$$

причем для f_ε имеет место сходимость

$$f_\varepsilon \to 0 \quad \text{слабо в } L_q(Q). \tag{4.10}$$

При выполнении неравенства $r > \rho + 1$ в силу соотношений (4.4), (4.10) выражение в правой части уравнения (4.8) ограничено в пространстве $L_s(Q)$ (см.

доказательство теоремы 1). Тогда последовательность $\{y_\varepsilon\}$ ограничена в пространстве $W_s^{2,1}(Q)$, а значит, и в Y. Таким образом, имеет место сходимость

$$y_\varepsilon \to y_0 \quad \text{слабо в } Y. \tag{4.11}$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, установим, что

$$|y_\varepsilon|^\rho y_\varepsilon \to |y_0|^\rho y_\varepsilon \quad \text{слабо в } L_a(Q). \tag{4.12}$$

Переходя к пределу в равенстве (4.8) с учетом условий (4.4), (4.10)–(4.12), приходим к соотношению

$$y_0' = \Delta y_0 + |y_0|^\rho y_0 + u_0 \quad \text{на } Q.$$

Учитывая непрерывность вложения пространства Y в $C(0,T;L_2(\Omega))$ (см. [8, теорема 1.17, с. 177]), на основе (4.11) получаем сходимость

$$y_\varepsilon|_{t=0} \to y_0|_{t=0} \quad \text{слабо в } L_2(\Omega).$$

Переходя к пределу в равенствах (4.9), заключаем, что функция y_0 удовлетворяет краевым условиям

$$y_0|_{t=0} = y^0 \text{ на } \Omega, \quad y_0 = 0 \text{ на } \Sigma.$$

В силу выпуклости и замкнутости множества U_0 справедливо включение $u_0 \in U_0$. На основании полученных результатов приходим к выводу, что пара $v_0 = (u_0, y_0)$ оказывается допустимой, т. е. элементом множества U. Тем самым справедливо равенство $Av_0 = 0$. Совместно с условиями (4.4), (4.5) это означает непрерывность оператора $A : V \to W$ в точке v_0, где под W понимается пространство $L_q(Q)$, наделенное слабой топологией.

Как уже отмечалось ранее, непрерывность оператора A в точке v_0 гарантирует тот факт, что последовательность $\{v_\varepsilon\}$ является слабой минимизирующей для задачи 2. Действительно, в процессе доказательства теоремы 4 было установлено соотношение (4.7). Отсюда в силу включения $y_0 \in U$ следует, что значение v_0, будучи пределом последовательности $\{v_\varepsilon\}$, оказывается еще и решением задачи 2. Теорема доказана.

Итак, мы имеем конструктивный алгоритм решения задачи 2 для сингулярного уравнения параболического уравнения. При этом используется регуляризованная задача 3, для которой получена система необходимых условий оптимальности (3.1)–(3.5). Отсюда, в принципе, можно определить «приближенное решение». При достаточно малых значениях параметра регуляризации оно со сколь угодно высокой степенью точности будет удовлетворять имеющемуся уравнению и в определенном смысле приближать функционал I к его нижней грани. Если же, кроме того, выполнено неравенство $r > \rho + 1$, то значение v_ε оказывается также достаточно близким (в топологии пространства V) к решению задачи 2.

5. Замечания

1. Использованную схему регуляризации можно понимать как своего рода синтез методов штрафа и регуляризации Тихонова. Однако последний обычно подразумевает добавление к функционалу нормы управления (а не состояния) с целью преодоления трудностей, обусловленных некорректностью экстремальной задачи (см., в частности, [2]). В данном случае дополнительный член вводится ради получения недостающей априорной оценки. В условиях разрешимости задачи необходимость в подобной оценке отпадает и соответствующее слагаемое обращается в нуль, хотя экстремальная задача, по-видимому, так и остается некорректной. Действительно, мы не отвечаем за свойства произвольной минимизирующей последовательности, поскольку в теореме 5 речь идет лишь о конкретной последовательности $\{v_\varepsilon\}$. Ее элементы и не являются допустимыми парами, вследствие чего приведенные утверждения вообще не имеют отношения к корректности задачи. Таким образом, несмотря на определенную аналогию с методом Тихонова, применяемая регуляризация задачи имеет иной смысл.

2. Строго говоря, в теоремах 4 и 5 устанавливаются свойства минимизируемости не самой последовательности $\{v_\varepsilon\}$, а лишь ее подпоследовательности. Однако если бы существовала такая подпоследовательность из $\{v_\varepsilon\}$, которая не обладала бы указанными свойствами, то для нее можно было бы вновь применить все приведенные выше рассуждения, установив при этом сходимость в соответствующем смысле. Не исключено, однако, что задача 2 имеет несколько решений, которые оказываются различными предельными точками $\{v_\varepsilon\}$, хотя сама последовательность не сходится. Это обстоятельство тем не менее не будет столь уж серьезной неприятностью при практическом решении задачи, поскольку, обрывая последовательность $\{v_\varepsilon\}$, мы все равно получим приближенное в указанном смысле решение задачи. Однако остается не известным, всякое ли решение может быть аппроксимировано указанным способом. Впрочем, подобное сомнение высказывает и Ж.-Л. Лионс (см., в частности, [4, с. 53]) при исследовании задачи 2 для конкретных значений параметров. Наивно рассчитывать, что в общем случае мы получим более сильный результат, т. е. гарантированное нахождение любого оптимального управления.

3. Естественно, конструктивность описанного алгоритма решения задачи 2 носит условный характер. Предполагается, что имеется метод решения регуляризованной задачи 3, который на самом деле в полной степени не описан. Однако мы имеем здесь дело с заведомо разрешимой задачей. Она обладает лучшими свойствами по сравнению с задачей 2, где не гарантировано не только существование оптимального управления, но даже разрешимость уравнений состояния на произвольном управлении. При аппроксимации сингулярной задачи семейством регулярных задач основные трудности возникают на стадии обоснования сходимости метода аппроксимации. В данном случае подобные результаты дают теоремы 4 и 5. Разработка же принципиальных методов решения сравнительно хорошо обусловленной задачи 3 не входит в наши планы. Мы лишь привели для нее необходимые условия оптимальности (теорема 3), чем ограничиваются в своих работах Ж.-Л. Лионс (см., в частности, [1, 4]) и абсолютное большинство других авторов. Есть определенная надежда, что для приближенного решения системы (3.1)–(3.5), в принципе, можно воспользоваться известными итерационными методами решения необходимых условий оптимальности (см., например, [9]). Мы, конечно, отдаем себе отчет в том, что никакой информации о достаточности условий оптимальности (3.1)–(3.5) не имеется, ровно как и гарантии сходимости соответствующих итерационных алгоритмов. Однако подобные результаты отсутствуют и для несравненно более простых регулярных задач. Дополнительные трудности возникают также и при практическом решении далеко не простых уравнений (3.2) и (3.4) на каждом шаге итерационного процесса и метода регуляризации. Сказанное выше никоим образом не перечеркивает приведенные результаты, а лишь уточняет суть дела. Когда мы говорим о приближенном решении сингулярной задачи 2, мы подразумеваем лишь принципиальную возможность ее сведения к семейству регулярных экстремальных задач (заведомо разрешимых в силу теоремы 2), для которых установлены необходимые условия оптимальности (теорема 3) и гарантирована аппроксимация исходной задачи, регуляризованной в соответствующем смысле (см. теоремы 4 и 5).

4. Поскольку приведенные выше результаты позволяют в определенном смысле исследовать экстремальную задачу даже при ее возможной неразрешимости, они вписываются в общую концепцию методов расширения экстремальных задач (см., например, [3, 10]). Однако в отличие от известных методов здесь не просто осуществляется переход от исходной экстремальной задачи к заведомо разрешимой и расширенной так, что нижняя грань исходного функционала совпадает с минимумом функционала в расширенной задаче. Решающим моментом здесь является принципиальный переход от поиска (возможно, отсутствующего) оптимального управления к построению заведомо существующей минимизирующей последовательности. Данный подход можно формализовать, вводя некоторое отношение эквивалентности последовательностей управлений (точнее, пар «управление-состояние»), подразумевающее, помимо всего прочего, совпадение предельных значений соответствующих последовательностей функционалов. Получаемое в результате фактор-множество может быть выбрано в качестве расширенного класса управлений. Ему соответствует расширенный функционал, равный пределу исходного функционала на последовательности управлений, определяющей элемент расширенного множества. Таким образом, нижней грани (возможно, недостижимой) исходного функционала будет соответствовать класс эквивалентных минимизирующих последовательностей, являющийся (наверняка существующим) решением расширенной задачи. Подобный прием положен в основу секвенциального расширения экстремальных задач [11] и в значительной степени аналогичен схеме определения действительных чисел по Кантору, технике пополнения равномерного пространства (см., например, [12]) и секвенциальной теории распределений Я. Микусинского [13].

5. Область применения описанной методики не ограничивается задачей 2. Специфические особенности уравнения здесь принципиального значения не имеют. Полученные результаты могут быть распространены и на другие сингулярные системы (использование подобного аппарата для исследования регулярных задач едва ли оправдано), в частности, на другие уравнения, рассмотренные в [4]. Здесь также можно рассчитывать на расширение класса параметров, при которых могут быть получены положительные результаты. Понятно, что степень аппроксимируемости решаемой задачи в этих случаях также будет слабой, т. е. речь идет лишь о возможности доказательства для указанных задач утверждений, аналогичных теоремам 2–5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.

2. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

3. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.

4. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987.

5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

6. *Авербух В. И., Смолянов О. Г.* Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22, № 6. С. 201–260.

7. *Серовайский С. Я.* Теорема об обратной функции и расширенная дифференцируемость в банаховых пространствах // Изв. вузов. Математика. 1995. № 8. С. 39–49.

8. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

9. *Крылов И. А., Черноусько Ф. Л.* Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1972. № 12. С. 14–34.

10. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Мир, 1977.

11. *Серовайский С. Я.* Секвенциальное расширение экстремальных задач. Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы «Казахстан в 3-м тысячелетии» // Материалы междунар. конф. Алма-Ата, 2000. С. 13.

12. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.

13. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. М.: Мир, 1976.

Статья поступила 27 ноября 2001 г.

Серовайский Семен Яковлевич
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
пр. аль-Фараби, 71, Алматы 480078, Казахстан
serovajskys@mail.ru