Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2003. Том 44, № 3

УДК 517.711.2: 577.4

ЛОКАЛЬНЫЕ И ГЛОБАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ В МОДЕЛЯХ КОНКУРЕНЦИИ

В. Г. Ильичев

Аннотация: Разработан принцип наследования локальных свойств глобальным отображением Пуанкаре для неавтономных динамических систем. А именно, если свойство является равномерно локально универсальным и полугрупповым, то им обладает и глобальное отображение Пуанкаре. При исследовании глобальной динамики конкурентов в периодической среде решающую роль играет мультипликативная полугруппа так называемых знак-инвариантных матриц. Приведены геометрические критерии устойчивости равновесий (периодических решений) в моделях конкуренции.

Ключевые слова: универсальность, полугруппа, грубость, знак-инвариантные матрицы, конкуренция, глобальная устойчивость

Введение

При исследовании динамики неавтономных моделей с T-периодической гладкой правой частью

$$\dot{X} = F(X, t), \tag{0.1}$$

ключевую роль играет сдвиг-отображение во временном интервале $[t, t+h]$ по траекториям системы (0.1) $X^{t+h} = P(X^t, t, h)$, где $h > 0$ и X — вектор с компонентами $(x_1, \dots, x_n)$. Отметим специально отображение (Пуанкаре) — сдвиг за время $[0, T]$, которое будем записывать кратко в виде $X^T = P(X^0)$. Разумеется, свойства отображения Пуанкаре определяют поведение системы (0.1). Однако нахождение таких свойств представляет собой трудную задачу. Напротив, совсем просто находятся свойства аппроксимации локальных отображений (0.1):

$$X^{t+h} = L(X^t, t, h) = X^t + hF(X^t, t),$$

где h мало. Очевидно, при h фиксированном L — гладкое T-периодическое отображение $R^n \times R$ в себя. Актуальна проблема: какие свойства локального отображения L наследуются глобальным отображением P?

Ниже рассмотрим частную задачу о наследовании свойств DL (дифференциала L) в DP (дифференциала P).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00–01–00725).

1. Наследуемые свойства

Промежуточное положение между отображениями P и L занимают $\pi(X,t,h)$ — локальные сдвиг-отображения за время $[t,t+h]$ по траекториям системы (0.1) с началом в точке X при малых $h>0$. Очевидно, L и π действуют в одном и том же фазовом пространстве. Ниже будет использована

Лемма Адамара (см. [1]). *Пусть f — дифференцируемая (класса C^r) функция, равная в точке $x=0$ нулю. Тогда $f(x)=xg(x)$, где g — дифференцируемая (класса C^{r-1} в окрестности точки $x=0$) функция.*

Очевидно, если f — гладкая функция, то и g — гладкая функция. Представление $f(x)=xg(x)$ справедливо для всех x.

Отметим, что из леммы Адамара вытекает соотношение

$$\pi(X,t,h)=L(X,t,h)+h^2G(X,t,h), \tag{1.1}$$

где $G(X,t,h)$ — некоторое гладкое отображение.

Ниже будем рассматривать «гладкие» свойства (ρ) дифференциала произвольного отображения Q, допускающего координатное представление $(Q_1,\ldots,Q_n)$. Формально свойство ρ в точке (X,t) задается «своим» неравенством

$$\rho(DQ)=\rho(q_{11},\ldots,q_{nn})>0, \tag{1.2}$$

где ρ — гладкая функция от n^2 аргументов; DQ — дифференциал отображения Q в точке (X,t), задаваемый набором чисел $q_{ij}=\partial Q_i/\partial x_j$ по всем $i,j=1,\ldots,n$. Например, в одномерном случае свойство

$$\rho\left(\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right)\equiv\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}>0$$

означает монотонной рост Q в малой окрестности точки (x,t).

Более конкретно, гладкое свойство ρ для дифференциала отображения $L=L(X,t,h)$ в точке (X,t) определяется неравенством (1.2), в котором h задано и

$$q_{ij}=\frac{\partial L_i(X,t,h)}{\partial x_j},$$

а $(L_1,\ldots,L_n)$ — координатное представление L. Отметим, что

$$q_{ii}=1+h\frac{\partial F_i(X,t)}{\partial x_i}$$

для всех i и

$$q_{ij}=h\frac{\partial F_i(X,t)}{\partial x_j}$$

для $i\neq j$.

Совершенно аналогично определяется гладкое свойство и для дифференциала отображения $\pi(X,t,t+h)$.

Приведем полезные понятия, характеризующие гладкое свойство ρ для отображений DL, $D\pi$ и DP системы (0.1).

1. Пусть M — фиксированное множество из расширенного фазового пространства системы (0.1). Тогда *локальная универсальность* ρ для DL на M означает, что неравенство

$$\rho(DL)>0$$

имеет место в каждой точке M при всех достаточно малых h $(0 < h < \delta)$. Формально выполнение ρ для достаточно малых h означает, что данное неравенство справедливо при всех $0 < h < \delta$. Разумеется, значение δ может зависеть от (X, t).

Далее, будем говорить, что имеет место *равномерная локальная универсальность* ρ на M для отображения DL, если удается выбрать общую для всех (X, t) из M границу δ^*. Например, при $n = 1$ для всех (X, t) выполняется неравенство

$$\rho\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + h\frac{\partial F}{\partial x} > 0,$$

когда $0 < h < \delta^* = 1/(1 + a)$. Здесь $a = \max|\partial F/\partial x|$ по всем (X, t) из M. Ясно, что локальная универсальность ρ для всякого отображения DL легко устанавливается.

Аналогично определяется равномерная локальная универсальность ρ на M и для отображения $D\pi$.

Пусть теперь M — некоторое множество из пространства R^n. Тогда (глобальная) универсальность ρ на M для DP означает, что неравенство

$$\rho(DP) > 0$$

выполняется в каждой точке X из M.

2. Свойство ρ назовем *полугрупповым*, когда все отображения, обладающие свойством ρ, образуют полугруппу с операцией композиции. Например, при $n = 1$ «тождественное» свойство

$$\rho(D\pi) \equiv \frac{\partial \pi(X, t, h)}{\partial x} > 0$$

является полугрупповым, поскольку композиция монотонно возрастающих функций оказывается монотонно возрастающей функцией. Напротив, свойство

$$\rho(D\pi) \equiv -\frac{\partial \pi}{\partial x} > 0$$

не является полугрупповым, так как композиция монотонно убывающих функций не является таковой.

По сути, полугрупповые свойства оказываются «мотором» данной схемы наследования.

Ниже при обсуждении отображений DL и $D\pi$ под множеством M (из $R^n \times R$) подразумевается кусок траектории (0.1) с началом в точке $(X^0, 0)$ и концом в (X^T, T), а при исследовании отображения P — проекция данного M на R^n. В этой связи «выражение на M» далее опускается. Справедлива почти тривиальная

Теорема 1. *Пусть гладкое свойство ρ является полугрупповым и равномерно локально универсальным для $D\pi$. Тогда дифференциал глобального отображения Пуанкаре (DP) наследует ρ.*

Доказательство. Из равномерной локальной универсальности ρ для π следует существование такого δ^*, что $\rho(D\pi(X, t, h) > 0$ для всех (X, t) из M и всех h из $(0, \delta^*)$.

Далее, выберем натуральное n из условия $T/n < \delta^*$ и разобьем траекторию M на n равных временных участков. На каждом i-м участке соответствующее локальное отображение $D\pi_i$ обладает свойством ρ. Поскольку $DP = D\pi_1 \times \dots \times D\pi_n$ и ρ — полугрупповое свойство, то и DP обладает свойством ρ на M.

Наконец, так как M — произвольная траектория, то DP обладает свойством ρ во всем фазовом пространстве (0.1), что и требовалось доказать.

В связи с теоремой 1 возникает проблема нахождения критериев равномерной локальной универсальности ρ для $D\pi$. С учетом компактности M весьма привлекательной представляется

Гипотеза. *Пусть ρ локально универсально для DL, тогда ρ равномерно локально универсально для DL и $D\pi$.*

Вероятно, без дополнительных ограничений на гладкую функцию ρ эта гипотеза неверна. Так, рассмотрим близкую задачу из математического анализа. Пусть $u(x, h)$ — гладкая функция и для каждого x из $[0, 1]$ существует свое локальное $\delta(x) > 0$ такое, что $u(x, h) > 0$ для всех h из интервала $(0, \delta(x))$. Верно ли, что здесь существует универсальное δ^*? В следующем примере (В. М. Каплицкого) неравенство

$$u(x, h) = h(h - x)(h - 2x) > 0$$

выполняется при $\delta(x) = x$ для $x > 0$, а при $x = 0$ в качестве δ можно взять, например, 1. Однако универсального δ^* здесь не существует.

В этой связи приведем одну из простейших версий дополнительных ограничений, достаточных для справедливости этой гипотезы (для простоты возьмем $n = 2$). Обозначим $k_{ij} = \partial F_i(X, t)/\partial x_j$ и рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(h) = \rho(DL(X, t, h)) = \rho(1 + hk_{11}, hk_{12}, hk_{21}, 1 + hk_{22}) = a + hb(X, t, h).$$

Здесь согласно лемме Адамара $a = \rho(1, 0, 0, 1)$ — константа и $b(X, t, h)$ — гладкая функция; в частности,

$$b(X, t, 0) = k_{11}d_1 + k_{12}d_2 + k_{21}d_3 + k_{22}d_4,$$

где постоянный вектор $\langle d_1, d_2, d_3, d_4\rangle$ является градиентом функции ρ в точке $(1, 0, 0, 1)$.

Из локальной универсальности DL следует, что $a \geq 0$. А если $a = 0$, то $b(X, t, h) > 0$ при всех (X, t) из M и $0 < h < \delta(X, t)$. Очевидно, $a = \varphi(0)$ и $b(X, t, 0) = \varphi'(0)$. Ниже будем говорить, что ρ — *грубое свойство* (в нуле), если функция ρ гладкая и соответствующая вспомогательная функция φ удовлетворяет хотя бы одному из двух условий:

1) $\varphi(0) > 0$;

2) если $\varphi(0) = 0$, то $\varphi'(0) > 0$ для всех (X, t) из M.

Установим более слабый вариант вышеприведенной гипотезы.

Теорема 2. *Если грубое свойство ρ локально универсально для DL, то оно равномерно локально универсально и для DL, и для $D\pi$.*

Доказательство. Как и ранее, обозначим через M кусок произвольной траектории из расширенного фазового пространства с началом в точке $(X^0, 0)$ и концом в точке (X^T, T).

1. Сначала покажем «равномерность» для DL. Так, из локальной универсальности следует, что $a + hb(X, t, h) > 0$ для всех $0 < h < \delta(X, t)$. В силу грубости ρ здесь должен выполняться один из следующих двух вариантов.

(а) $a > 0$. Обозначим $B = \min\{b(X,t,h) : (X,t,h) \in M \times [0,1]\}$. Тогда при $h > 0$ имеет место неравенство

$$a + hb(X,t,h) \geq a + hB.$$

При $B \geq 0$ положим $\Delta = 1$. Если $B < 0$, то положим $\Delta = \min(1, -a/B)$. Ясно, что при всех h из $(0,\Delta)$ правая часть данного неравенства положительна. Значит, будет положительной и левая часть.

(б) $a = 0$ и $b(X,t,0) > 0$ для всех (X,t) из M. Воспользуемся адамаровским представлением

$$b(X,t,h) = b(X,t,0) + hc(X,t,h),$$

где $c(X,t,h)$ — гладкая функция. Пусть β — минимальное значение функции $b(X,t,0)$ при (X,t) из M. Тогда $\beta > 0$. Пусть γ — минимальное значение $c(X,t,h)$ по всем (X,t) из M и $0 \leq h \leq 1$. Для таких h выполняется неравенство

$$b(X,t,h) \geq \beta + h\gamma.$$

Очевидно, при $\gamma \geq 0$ имеет место $b(X,t,h) > 0$ равномерно для всех $h \leq 1$. А при $\gamma < 0$ справедливо $b(X,t,h) > 0$ равномерно для всех $h \leq \beta/|\gamma|$.

2. Теперь с учетом оценок из предыдущего пункта покажем «равномерность» для $D\pi$. А именно, построим адамаровское представление (до членов порядка h^3)

$$\lambda(h) = \rho(D\pi(X,t,h)) = a + hb(X,t,0) + h^2c(X,t,h).$$

Поскольку $D\pi$ совпадает с DL с точностью до h^2, в этом представлении a и b имеют прежний смысл, а c — гладкая по всем переменным функция.

Обозначим через B и C минимальные значения гладких функций $b(X,t,0)$ и $c(X,t,h)$ по всем (X,t) из компакта M и $0 \leq h \leq 1$. Построим специальную квадратичную форму

$$\mu(h) = a + hB + h^2C.$$

Очевидно, $\lambda(h) > \mu(h)$ для всех $h > 0$. Оценим снизу μ при малых h. Здесь возникают следующие варианты.

(а) $a > 0$. Тогда найдется малое $\Delta > 0$ такое, что при всех h из $(0,\Delta)$ имеет место $\mu(h) > 0$. Значит, тем более $\lambda(h) > 0$ для таких h.

(б) $a = 0$. Поскольку $b(X,t,0) > 0$ для всех (X,t) из M, то $B > 0$. Следовательно, найдется $\Delta > 0$ такое, что при всех h из $(0,\Delta)$ имеет место

$$\mu(h) = h(B + hC) > 0.$$

Поэтому тем более $\lambda(h) > 0$ для таких h, что и требовалось доказать.

Ясно, что понятие грубого свойства можно последовательно «смягчать», используя все более и более длинные адамаровские представления $\varphi(h)$. Например, можно было бы «более тонко» определить грубое свойство ρ так: в каждой точке (X,t) из M функция $\varphi(h) = \rho(DL(X,t,h))$ удовлетворяет хотя бы одному из трех условий:

1) $\varphi(0) > 0$;

2) $\varphi'(0) > 0$;

3) если $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0) = 0$, то $\varphi''(0) > 0$.

Приведем простые примеры грубых свойств.

Пример 1. Свойство определителя дифференциала локальных отображений DL и $D\pi$ быть положительным числом является грубым. Действительно, в этом случае (для наглядности $n = 2$) имеем

$$\varphi(h) = \rho(1 + hk_{11}, hk_{12}, hk_{21}, 1 + hk_{22}) = (1 + hk_{11})(1 + hk_{22}) - h^2 k_{12} k_{21}$$

и, значит, $\varphi(0) = 1$. Далее, положительные числа образуют полугруппу по умножению. Поэтому $|DP| > 0$, т. е. $P(X)$ — локальный диффеоморфизм, сохраняющий ориентацию.

Пример 2. Проведем качественный анализ общей модели динамики численности популяции (x) в T-периодической среде [2]:

$$\dot{x} = xf(x,t), \tag{1.3}$$

где $f(x,t)$ — гладкая функция и $\partial f/\partial x < 0$; $f(x,t) = f(x,t+T)$; для некоторой универсальной константы N выполняется неравенство $f(x,t) < 0$ для всех $x > N$ и t.

Отметим, что $dx/dt \leq xf(0,t)$. Следовательно, решение (1.3) растет не быстрее экспоненты и, значит, продолжается вперед неограниченно. Имеют место следующие свойства.

Свойство монотонности. Для каждой пары (x,t) выполняется

$$\rho\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + h\frac{\partial[xf(x,t)]}{\partial x} > 0$$

при малых h. Очевидно, такое ρ — грубое свойство. Далее, поскольку положительные числа образуют полугруппу по умножению, то $\partial P/\partial x > 0$. Тем самым P монотонно возрастает.

Свойство сжимаемости. Сделаем замену $y = \ln(x)$, тогда уравнение (1.3) приобретает вид

$$\frac{dy}{dt} = f(\exp(y), t).$$

В этом случае

$$\rho\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + hf'_x(\exp(y), t)\exp(y).$$

Из $f'_x < 0$ следует, что $0 < \partial L/\partial y < 1$ при малых $h > 0$. Поскольку числа из интервала (0,1) образуют полугруппу по умножению и ρ — грубое свойство, то

$$0 < \frac{\partial P}{\partial y} < 1.$$

Поэтому если в данном уравнении существует равновесие (r), то оно единственно и глобально устойчиво.

Условия существования. Обозначим через λ интеграл от функции $f(0,t)$ на $[0,T]$ и через $x^T = R(x^0)$ — отображение Пуанкаре для уравнения (1.3). Имеет место простое

Утверждение 1. *Пусть $\lambda > 0$, тогда отображение R имеет единственную положительную неподвижную точку (r^*).*

Доказательство. В силу предыдущих свойств достаточно установить существование положительной неподвижной точки. При начальном x^0 обозначим через $M = M(x^0)$ максимальное значение переменной x^t на временном промежутке $[0, T]$. Очевидно, $M(x) \to 0$ при $x \to 0$. Обозначим через μ интеграл от функции $f(M, t)$ при изменении t в интервале $[0, T]$. Разумеется, $\mu \leq \lambda$. Отметим, что $\mu \to \lambda$ при $M \to 0$.

Далее, на $[0, T]$ выполняется неравенство

$$\frac{dx}{dt} \geq x f(M, t),$$

и, значит, $x^T = R(x^0) \geq x^0 \exp(\mu)$. Следовательно, $R'(0) > 1$, и при малых x график R лежит выше биссектрисы первого квадранта.

Пусть теперь $x^0 > N$, где N — универсальная константа (см. ограничения к (1.3)). Тогда решение (1.3) убывает вплоть до значения N и после этого уже не превосходит N. Поэтому $R(x^0) < x^0$ и, значит, здесь график R лежит ниже биссектрисы. Окончательно получаем, что в промежутке $(0, N)$ график R пересекает биссектрису в некоторой (неподвижной для R) точке, что и требовалось доказать.

В заключение этого раздела отметим, что из монотонного роста R следует: при $x^0 < r^*$ происходит движение вперед (т. е. $x^0 < x^T$), а при $x^0 > r^*$ происходит движение назад (т. е. $x^0 > x^T$).

2. Наследуемость знак-инвариантных матриц

Различные приемы позволяют расширить класс наследуемых свойств. Так, из обоснования теорем 1 и 2 сразу получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть каждое из грубых свойств ρ_i локально универсально для DL. Если $\rho = \min(\rho_1, \dots, \rho_n)$ — полугрупповое свойство, то и дифференциал отображения Пуанкаре (DP) наследует ρ.*

Такого сорта кусочно-гладкие свойства возникают при описании характера монотонности компонент многомерных отображений Пуанкаре. Например, для $Q\colon R^2 \to R^2$ возникают 16 типичных вариантов знаковой структуры

$$DQ = \begin{pmatrix} \partial Q_1/\partial x_1 & \partial Q_1/\partial x_2 \\ \partial Q_2/\partial x_1 & \partial Q_2/\partial x_2 \end{pmatrix}.$$

Всякая знаковая структура DQ может быть задана с помощью операции min. Так, система неравенств

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} > 0, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} < 0, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} < 0, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} > 0$$

эквивалентна одному неравенству

$$\min\left\{\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}, -\frac{\partial Q_1}{\partial x_2}, -\frac{\partial Q_2}{\partial x_1}, \frac{\partial Q_2}{\partial x_2}\right\} > 0.$$

В частности, для $Q = L(X, t, h)$ при $n = 2$ имеем

$$DL = \begin{pmatrix} 1 + h\partial F_1/\partial x_1 & h\partial F_1/\partial x_2 \\ h\partial F_2/\partial x_1 & 1 + h\partial F_2/\partial x_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь при малых $h > 0$ диагональные элементы всегда положительны. Пусть, кроме того, $\partial F_1/\partial x_2$ и $\partial F_2/\partial x_1$ сохраняют свои знаки при всех (X, t). Тогда абсолютная величина каждого элемента DL является локально универсальным и грубым свойством.

Поставим теперь специальный вопрос о «наследовании». Пусть все DL представляются одной и той же знаковой матрицей Σ для всех (X,t). Когда DP описывается той же матрицей Σ?

Для удобства вместо знаков $+$ и $-$ будем писать $+1$ и -1 соответственно. Оказывается, все такие (*знак-инвариантные*) матрицы допускают полное описание [3]. Формально они задаются таблицей $\Sigma(c_1,\dots,c_n)=(\sigma_{ij})$, элементы которой равны $\sigma_{ij}=c_ic_j$. Здесь каждый параметр c_i может принимать одно из двух значений ±1. Например, при $n=2$ существуют только две разные знак-инвариантные матрицы

$$\Sigma(1,1)=\Sigma(-1,-1)=\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +1 & +1\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Sigma(-1,1)=\Sigma(1,-1)=\begin{pmatrix}+1 & -1\\ -1 & +1\end{pmatrix}.$$

Матрицы с фиксированной знак-инвариантной структурой $\Sigma(c_1,\dots,c_n)$, очевидно, образуют полугруппу по умножению. Отсюда вытекает

Теорема 3. *Если все DL принадлежат одной и той же знак-инвариантной структуре (Σ), то и DP принадлежит Σ.*

Представляет интерес задача описания всех полугрупп матриц с операцией умножения. Укажем частный (геометрический) способ построения таких полугрупп. Пусть V — некоторое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Тогда семейство (M) всех матриц (размера $n\times n$), переводящих V в себя, является, очевидно, полугруппой по умножению. Если V отлично от нулевого вектора и от всего $\mathbb{R}^n$, то будем говорить, что M *допускает* (*нетривиальное*) *геометрическое представление* V. В частности,

а) полугруппа $\Sigma(1,-1)$ представляется четвертым квадрантом плоскости;

б) полугруппа вращений представляется сферой с центром в начале координат.

Всякая ли мультипликативная полугруппа матриц допускает геометрическое представление?

Утверждение 2. *Полугруппа вырожденных матриц не допускает геометрического представления.*

Доказательство. Пусть x — ненулевой вектор из V. Тогда для любого y из $\mathbb{R}^n$ выполняется соотношение $y=Mx$ для некоторой вырожденной матрицы M. Значит, V совпадает с $\mathbb{R}^n$, что и требовалось доказать.

Ниже на основании различных наследуемых грубых свойств проводится исследование неавтономных моделей конкуренции.

3. Динамика двух конкурентов и матрицы $\boldsymbol{\Sigma(1,-1)}$

Рассмотрим систему двух конкурентов в общем виде:

$$\dot x_1=x_1f_1(x_1,x_2,t),\quad \dot x_2=x_2f_2(x_1,x_2,t), \tag{3.1}$$

где f_i является T-периодической (по времени t) функцией роста i-й популяции. Напомним [4] традиционные здесь допущения:

1) каждая f_i — гладкая функция, строго убывающая по x_i и x_j;

2) существует универсальная константа $N>0$ такая, что при $\max\{x_1,x_2\} > N$ выполняется $f_i(x_1,x_2,t)<0$ для всех t и $i=1,2$;

3) существует другая универсальная константа $m > 0$ такая, что $f_i(x_1, x_2, t) > -m$ для всех x_1, x_2, t и $i = 1, 2$.

Далее, дифференциал локального отображения (3.1) представляется знак-инвариантной структурой $\Sigma(1, -1)$. Тем самым в силу признака наследования знаковая структура дифференциала глобального отображения Пуанкаре $P = (P_1, P_2)$ также имеет вид $\Sigma(1, -1)$. Иными словами, каждая функция P_i монотонно возрастает по «своей» переменной (x_i) и убывает по «чужой» переменной.

На точках плоскости R^2_+ зададим следующее отношение полупорядка. Пусть даны две точки $A = (a_1, a_2)$ и $B = (b_1, b_2)$. Положим $A \ll B$, если выполняются неравенства $a_1 \leq b_1$ и $a_2 \geq b_2$. Из свойств монотонности P устанавливаем, что данное отношение полупорядка и отображение P «согласованы». А именно, справедлива

Лемма 2. *Если $A \ll B$, то и $P(A) \ll P(B)$.*

В общем случае пусть $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Если дифференциал DP описывается знак-инвариантной структурой $\Sigma(c_1, \dots, c_2)$, то следующее отношение полупорядка $(A \ll B)$:

$$a_i c_i \leq b_i c_i \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n,$$

сохраняется при действии P.

Пусть на плоскости заданы две точки A и B, связанные отношением $A \ll B$. Тогда рассмотрим конусный отрезок $\Pi(A, B)$ — множество промежуточных точек X, удовлетворяющих одновременно условиям $A \ll X$ и $X \ll B$. Геометрически $\Pi(A, B)$ — прямоугольник, в котором самая «слабая» точка (A) находится на северо-западе, а самая «сильная» точка (B) лежит на юго-востоке. Из леммы 2 вытекает

Теорема 4. *Под действием P образ конусного отрезка $\Pi(A, B)$ вложен в конусный отрезок $\Pi(P(A), P(B))$.*

Будем говорить, что отображение P *стягивает компакт* D, если образ $P(D)$ вложен в D. Когда D — конусный отрезок $\Pi(A, B)$, для проверки «стягивания» достаточно установить, что «экстремальные» точки A и B отображаются вовнутрь D (см. теорему 4).

Дальнейшее развитие теории конкуренции двух популяций может быть основано на анализе геометрического расположения изоклин E_1 и E_2 в $R{+}^2$, где

$$E_i = \left\{ \left(x_1^0, x_n^0\right) \middle| \; x_i^0 = x_i^T > 0 \right\}.$$

Очевидно, уравнение $x_i = P_i(x_1, x_2)$ — аналитический способ задания множества E_i. Исследуем свойства изоклин на примере E_1. Обозначим через λ_1 интеграл от функции $f_1(0, 0, t)$ на $[0, T]$. Имеет место

Лемма 3. *Пусть $\lambda_1 > 0$, тогда изоклина E_1 непуста и представляет собой график некоторой непрерывной функции $x_2 = E_1(x_1)$.*

Доказательство. Пусть сначала (ордината) $x_2 = 0$, тогда на оси абсцисс переменная x_1 описывается уравнением вида (1.3). Согласно утверждению 1 здесь существует неподвижная точка (r_1). Таким образом, точка $\langle r_1, 0 \rangle$ принадлежит E_1 и, значит, E_1 непусто.

Возьмем произвольное x_1^0 из $(0, r_1]$, и пусть L — вертикальная прямая (L) из R^2_+, проходящая через точку $\langle x_1^0, 0 \rangle$. Исследуем поведение функции P_1 (первой компоненты отображения P) на L. В силу монотоности P_1 убывает при возрастании x_2.

Далее, под действием P «самая нижняя» начальная точка $\langle x_1^0, 0\rangle$ движется вперед по оси абсцисс (т. е. $x_1^0 < x_1^T$).

Теперь возьмем «достаточно высокую» начальную точку на данной прямой $\langle x_1^0, x_2\rangle$, где $x_2 > N\exp(mT)$. Из допущения 3 следует, что $x_2^t > N$ для всех $t \le T$. Значит, в силу допущения 2 на данном временном интервале переменная x_1 убывает. Поэтому здесь имеем $x_1^0 > x_1^T$.

Следовательно, существует промежуточное (и единственное) x_2^0, для которого $x_1^0 = P_1\big(x_1^0, x_2^0\big)$. Иными словами, для каждого $x_1 < r_1$ найдется единственная точка (x_1, x_2), принадлежащая E_1.

Наконец, рассмотрим уравнение $H(x_1, x_2) = x_1 - P_1(x_1, x_2) = 0$. Очевидно, $\partial H/\partial x_2 > 0$, поэтому переменная x_2 локально и однозначно выразима через x_1 гладким образом. После «склеивания» всех таких локальных представлений получаем искомую функцию E_1, что и требовалось доказать.

Аналогично изоклина E_2 задается некоторой кривой $x_1 = E_2(x_2)$. Каждая из этих функций определена на своем полуинтервале $(0, r_i]$. Будем говорить, что точка $X^0 = \big(x_1^0, x_2^0\big)$ *находится ниже изоклины* J_i, если $P_i\big(x_1^0, x_2^0\big) - x_i^0 > 0$. Из монотонности P следует, что кривая E_i «притягивает» фазовые точки (см. рис. 1):

1) если $\langle x_1^0, x_2^0\rangle$ находится ниже кривой E_i, то $x_i^0 < x_i^T$;

2) если $\langle x_1^0, x_2^0\rangle$ находится выше кривой E_i, то $x_i^0 > x_i^T$.

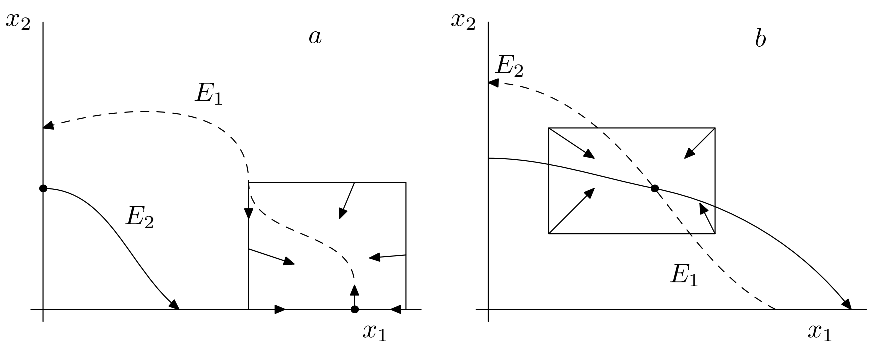

Рис. 1. Стягивающиеся под действием P конусные отрезки в зависимости от расположения изоклин системы (3.1). Здесь изоклины E_1 — пунктирная и E_2 — сплошная линии.

Пусть $\lambda_i > 0$ для всех i. Возможны следующие три варианта расположения изоклин.

(а) Изоклины не пересекаются, и, например, E_1 расположена выше E_2. Пусть E_1 пересекает ось x_1 в точке r_1. Тогда с помощью кривой E_1 может быть построена семейство стягивающихся к точке $(r_1, 0)$ конусных отрезков (рис. 1,a). Это означает, что в системе (3.1) первая популяция вытесняет вторую.

(б) Изоклины пересекаются в одной внутренней точке R_+^2. Тогда возможно как устойчивое сосуществование популяций (см. рис. 1,b), так, неустойчивое сосуществование популяций (если на рис. 1,b поменять местами E_1 и E_2).

(в) Изоклины пересекаются в нескольких внутренних точках. Тогда устойчивые и неустойчивые равновесия «чередуются». При этом устойчивость равновесий устанавливается путем построения подходящего семейства стягивающихся конусных отрезков.

4. Динамика многих конкурентов и матрицы $\mathbf{\Sigma(1,\dots,1)}$

Рассмотрим систему из n взаимодействующих конкурентов:

$$\dot{x}_i = x_i f_i(x_1,\dots,x_n,t), \tag{4.1}$$

где $i = 1,\dots,n$; каждая гладкая функция f_i убывает по всем компонентам вектора $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ из R^n_+; f_i является T-периодической функцией по аргументу t; существуют универсальные константы $N > 0$ и $m > 0$ такие, что

а) $f_i(X,t) < 0$ при $\max\{x_1,\dots,x_n\} > N$ и всех t;

б) $f_i(X,t) > -m$ при всех X и t.

В таких моделях переменные изменяются не быстрее соответствующих экспонент, поэтому решения (4.1) продолжаются вперед и назад неограниченно. В силу специфики правых частей модели (4.1) положительность переменных сохраняется все время. При этом вся траектория не выходит за пределы некоторого компакта из R^n_+.

Для системы (4.1) актуальны прежние задачи:

1) задать отношение полупорядка в R^n_+, которое сохраняется при действии отображения Пуанкаре ($P = \langle P_1,\dots,P_n\rangle$);

2) какова геометрическая структура и взаимное расположение «изоклин» $E_i = \bigl\{(x^0_1,\dots,x^0_n) \mid x^0_i = x^T_i > 0\bigr\}$ в зависимости от свойств правых частей $\{f_i\}$?

Оказывается, при $n \ge 3$ применение геометрического подхода из разд. 3 сталкивается с принципиальными трудностями: знаковая структура DL не является знак-инвариантной (диагональ положительна, а остальные элементы отрицательны). Поэтому отображение P может оказаться «плохим», поскольку может не обладать монотонными свойствами.

Кроме того, ввиду отсутствия сведений о знаках DP трудно установить является ли множество E_i поверхностью и т. д.

Тем не менее здесь возможен окольный путь. В (4.1) заменим направление времени противоположным ($t \to -t$). Эта система действует в том же фазовом пространстве, но чтобы не возникало путаницы в новой системе, переименуем переменные

$$\dot{y}_i = -y_i f_i(y_1,\dots,y_n,-t), \tag{4.2}$$

где $i = 1,\dots,n$. Сдвиг-отображение за период (Q) системы (4.2) оказывается «хорошим», поскольку знаковая структура дифференциала локального отображения (4.2) является знак-инвариантной матрицей $\Sigma(1,\dots,1)$. Значит, в координатном представлении $y^T_i = Q_i\bigl(y^0_1,\dots,y^0_n\bigr)$ функция Q_i возрастает по каждой переменной.

Следуя разд. 3, определим отношение полупорядка на точках замыкания R^n_+, согласованное с отображением Q. Пусть $A = (a_1,\dots,a_n)$ и $B = (b_1,\dots,b_n)$. Положим $A \ll B$, если $a_i \le b_i$ для всех i. Ввиду монотонности отображения Q получаем аналог леммы 2: из $A \ll B$ следует $P(A) \ll P(B)$.

Очевидно, $Q = (Q_1,\dots,Q_n)$ — обратное отображение к P. Поэтому векторное поле в (4.1) получается путем обращения стрелок в векторном поле (4.2). В частности, неподвижные точки отображений P и Q совпадают. Используя принцип наследования, опишем монотонные свойства компонент Q. Для всех i имеет место

Лемма 4. *Частные производные функции $Q_i(y_1,\dots,y_n)$ удовлетворяют неравенствам:*

1) $\partial Q_i/\partial y_j > 0$ *для всех* j *и* i;

2) *если* $y_i = Q_i(y_1, \dots, y_n)$, *то* $\partial Q_i/\partial y_i > 1$.

Доказательство. Произведем в (4.2) монотонную замену $y_j = \exp(z_j)$ для всех j. Тогда

$$\frac{dz_i}{dt} = -f_i(\exp(z_1), \dots, \exp(z_n), -t), \tag{4.3}$$

где $i = 1, \dots, n$. Через $R = (R_1, \dots, R_n)$ обозначим сдвиг-отображение за период T, индуцированное (4.3). Рассмотрим дифференциал локального отображения данной системы. Его знаковая структура состоит из одних плюсов, а на диагонали «сидят» элементы большие единицы (сказанное выразимо с помощью грубых свойств). Далее, такие матрицы образуют полугруппу по умножению, и значит, дифференциал глобального отображения R обладает тем же свойством. Следовательно,

$$\frac{\partial R_i}{\partial z_j} > 0 \quad \text{для всех } j,\, i \quad \text{и} \quad \frac{\partial R_i}{\partial z_i} > 1. \tag{4.4}$$

Из первого неравенства (4.4) сразу следует, что $\partial Q_i/\partial y_j > 0$ для всех j, i.

Обоснование второго соотношения данной леммы проведем на примере i=1. Очевидно,

$$Q_1(y_1, \dots, y_n) = \exp[R_1(\ln y_1, \dots \ln y_n)].$$

Поэтому с учетом условия $y_1 = \exp[R_1(\ln y_1, \dots, \ln y_n)]$ и второго неравенства (4.4) получаем

$$\frac{\partial Q_1}{\partial y_1} > 1,$$

что и требовалось доказать.

На основе системы (4.2) определим для каждого i изоклину

$$J_i = \bigl\{(y_1^0, \dots, y_n^0) \mid y_i^0 = y_i^T > 0\bigr\}.$$

Имеет место принцип двойственности: $E_i = Q(J_i)$ и $P(E_i) = J_i$.

Обозначим через λ_i — интеграл от функции $f_i(0, \dots, 0, t)$ на $[0, T]$. Аналогично обоснованию леммы 3 устанавливаем, что если $\lambda_i > 0$, то множество J_i непусто. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\lambda_i > 0$ при всех i.

Удобно задать J_i соотношением $y_i = Q_i(y_1, \dots, y_n)$ и ввести вспомогательную функцию $H(y_i) = Q_i(y_1, \dots, y_n) - y_i$ при фиксированных остальных переменных. Из леммы 4 получаем $\partial H(y_i)/\partial y_i > 0$, поэтому H — возрастающая функция на J_i. Более того, из теоремы о неявной функции следует возможность выразить y_i через остальные переменные. Например, поверхность J_1 может быть задана соотношением $y_1 = \varphi_1(y_2, \dots, y_n)$. При этом $\partial\varphi_1/\partial y_j < 0$ для всех $j > 1$. Поэтому в обратном времени изоклины всегда задаются монотонными функциями (ср. с немонотонными изоклинами разд. 3).

Будем говорить, что точка $Y = (y_1, \dots, y_n)$ находится *ниже изоклины* J_i, если $Q_i(Y) - y_i < 0$. В случае реализации противоположного строгого неравенства считаем точку Y лежащей выше J_i. Отметим, что неравенство $y_1 < \varphi(y_2, \dots, y_n)$ также эквивалентно условию, что точка Y лежит ниже J_1. Самое главное здесь возникают своеобразные процессы «отталкивания» векторного поля Q от каждой изоклины J_i:

1) если точка Y^0 лежит ниже J_i, то $y_i^T < y_i^0$;

2) если точка Y^0 лежит выше J_i, то $y_i^T > y_i^0$.

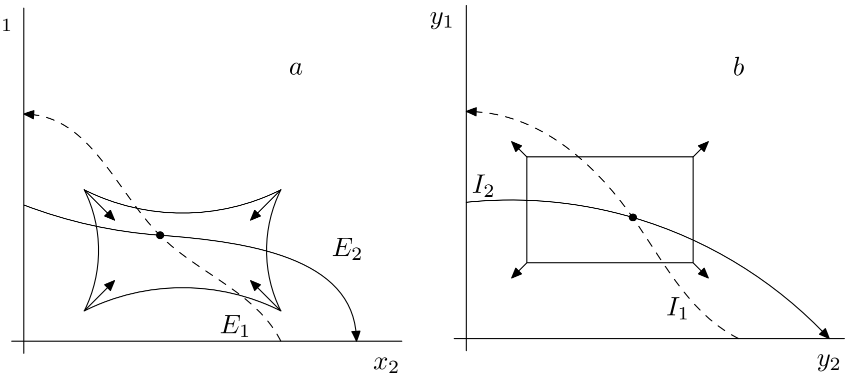

Рис. 2. Двумерная иллюстрация взаимосвязи фазовых портретов систем (4.1) и (4.2).

Определим конусный отрезок $\Pi(A, B)$ как множество промежуточных точек, заключенных между точками A и B. Геометрически $\Pi(A, B)$ представляет собой n-мерный прямоугольник, в котором A — самая юго-западная и B — самая северо-восточная вершины.

Будем говорить, что отображение Q *растягивает конусный отрезок* $\Pi(A, B)$, если образ $Q(\Pi(A, B))$ накрывает $\Pi(A, B)$. Иными словами, для установления «растягивания» необходимо и достаточно, чтобы на всей границе $\Pi(A, B)$ векторное поле Q было направлено наружу.

Пусть R — неподвижная точка отображения Q (а значит, и P), окруженная семейством конусных отрезков $\Pi_k = \Pi(A_k, B_k)$. При этом $A_k \to R$ и $B_k \to R$, когда $k \to \infty$. Обозначим через Δ_k образ Π_k под действием Q. Почти тривиальна (см. рис. 2)

Лемма 5. *Если Q растягивает Π_k, то P стягивает Δ_k.*

По сути, вся подготовительная работа произведена с помощью «хорошего» отображения Q. Теперь заключительный шаг рассуждения легко осуществить в рамках исходного «плохого» отображения P.

Теорема 5. *Пусть вокруг R можно построить семейство вложенных $\{\Pi_k\}$. Если Q растягивает каждое Π_k, то R — устойчивое равновесие в системе* (4.1).

Разумеется, вместо конусных отрезков можно брать и другие геометрические объекты. Так, в работе [5] приведено построение конкретного семейства вложенных призм для обоснования критерия отбора в определенном классе моделей конкуренции.

Отметим, что прямолинейная попытка (т. е. без обращения к вспомогательной системе (4.2)) построить в фазовом пространстве (4.1) семейство стягивающихся к равновесию R криволинейных областей $\{\Delta_k\}$ представляет собой трудноразрешимую задачу.

Заключение

Приведем некоторые задачи и примеры расширения класса наследуемых свойств с сохранением прежнего механизма наследования.

1. Учет высших частных производных. Например, если в одномерной модели (1.3) правая часть — вогнутая функция x (при каждом фиксированном t), то и отображение Пуанкаре вогнуто.

2. Задание свойств DL в форме нестрого неравенства $\rho(DL) \geq 0$. Свойство быть треугольной матрицей выразимо в следующей форме. Очевидно, если все DL задаются треугольной матрицей, то и DP будет матрицей того же вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.

2. *Vance R. R., Coddington E. A.* A nonautonomous model of population growth // J. Math. Biology. 1989. V. 27, N 5. P. 491–506.

3. *Ильичев В. Г., Ильичева О. А.* Знак-инвариантные структуры матриц и дискретные модели // Дискретная математика. 1999. Т. 11, № 4. С. 89–100.

4. *Гимельфарб А. А., Гинзбург Л. Р., Полуэктов Р. А. и др.* Динамическая теория биологических популяций. М.: Наука, 1974.

5. *Ильичев В. Г.* Универсальные константы запаса и критерии отбора в переменной среде // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 5. С. 691–704.

Статья поступила 24 апреля 2001 г.

Ильичев Виталий Григорьевич
Ростовский гос. университет, механико-математический факультет,
Зорге, 5, Ростов-на-Дону 344090
vita@math.rsu.ru