Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2003. Том 44, № 3

УДК 512.56

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ШКАЛ ПОТЕНЦИАЛОВ ВЫЧИСЛИМОСТИ n–ЭЛЕМЕНТНЫХ АЛГЕБР

С. В. Журков, А. Г. Пинус

Аннотация: Доказано, что фильтр, состоящий из потенциалов вычислимости полупримальных алгебр, сохраняется любым автоморфизмом шкалы потенциалов вычислимости.

Ключевые слова: условный терм, потенциал вычислимости, автоморфизм, решетка подалгебр, полугруппа внутренних автоморфизмов

В работе А. Г. Пинуса [1] было введено понятие условного терма, соответствующее понятию программы вычислений на универсальной алгебре, построенной из вычислений сигнатурных функций этой алгебры на основе оператора суперпозиции и условного оператора. За точными определениями и обзором результатов, связанных с понятием условного терма, мы отсылаем к обзорным работам [2–4]. Далее через $CT(\mathcal{A})$ будем обозначать совокупность всех условно термальных функций на базовом множестве A любой универсальной алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$. Естественно рассматривать совокупность функций $CT(\mathcal{A})$ как *потенциал вычислимости* универсальной алгебры $\mathcal{A}$. При этом считаем, что алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и $\mathcal{B} = \langle B; \sigma_1 \rangle$ обладают одинаковым потенциалом вычислимости ($CT(\mathcal{A}) \equiv CT(\mathcal{B})$), если существует биекция π множества A на множество B, сопрягающая совокупности $CT(\mathcal{A})$ и $CT(\mathcal{B})$, т. е. такая, что $\pi^{-1}CT(\mathcal{B})\pi = CT(\mathcal{A})$. Пусть $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ — фиксированное n-элементное множество и $CT(n) = \{CT(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} = \langle n; \sigma \rangle$ — произвольная алгебра с базовым множеством $n\}$. Через CT_n обозначим фактор-множество $CT(n)$ относительно эквивалентности $\equiv$. На CT_n введем отношение порядка $\leq$: для $d_1, d_2 \in CT_n$ положим $d_1 \leq d_2$, если для некоторых $CT(\mathcal{A}_1) \in d_1$ и $CT(\mathcal{A}_2) \in d_2$ имеет место включение $CT(\mathcal{A}_1) \subseteq CT(\mathcal{A}_2)$. Отношение $\equiv$ между потенциалами вычислимости $CT(\mathcal{A})$, $CT(\mathcal{B})$ алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ означает фактически совпадение программно-вычислительных возможностей алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ при подходящей кодировке элементов алгебры $\mathcal{A}$ элементами алгебры $\mathcal{B}$, а отношение $\leq$ между $CT(\mathcal{A})/\equiv$ и $CT(\mathcal{B})/\equiv$ — то, что программно-вычислительные возможности алгебры $\mathcal{B}$ богаче таких же возможностей алгебры $\mathcal{A}$. Частично упорядоченное множество $\langle CT_n; \leq \rangle$ введено в работе [5], и вполне естественно рассматривать это множество как шкалу потенциалов вычислимости n-элементных алгебр.

Это определение шкалы потенциалов вычислимости n-элементных алгебр естественным образом указывает на идеологическую взаимосвязь вопросов изучения строения этой шкалы с вопросами строения решетки клонов функций на n-элементном множестве, а точнее (см. [4]) со строением фильтра указанной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00258) и Минобразования РФ (грант Е00–1.0–30).

© **2003 Журков С. В., Пинус А. Г.**

решетки, порожденного клоном дискриминаторной функции на множестве n. Однако строение указанной шкалы существенно отличается от строения этого фильтра прежде всего хотя бы потому, что, как доказано в [5], данная шкала $\langle CT_n; \leq\rangle$ при $n \geq 3$ не является ни нижней, ни верхней полурешеткой. В работах [6, 7] изучен ряд дальнейших свойств шкал $\langle CT_n; \leq\rangle$, к примеру, найдены числа их атомов, коатомов, найдена длина шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$, рассмотрена взаимосвязь шкал $\langle CT_n; \leq\rangle$ и $\langle CT_m; \leq\rangle$ при различных n и m и т. д.

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании нетождественных автоморфизмов шкал $\langle CT_n; \leq\rangle$. Отсутствие подобных автоморфизмов при $n = 2, 3$ замечается непосредственно: шкалы $\langle CT_2; \leq\rangle$ и $\langle CT_3; \leq\rangle$, состоящие соответственно из 5 и 53 элементов, описаны в работе [5] в явной форме. Доказательство же жесткости (т. е. отсутствия нетождественных автоморфизмов) для произвольных шкал $\langle CT_n; \leq\rangle$ означало бы уникальность потенциала вычислимости любой n-элементной универсальной алгебры по отношению к потенциалам вычислимости любых других n-элементных алгебр.

Заметим, что аналогичный вопрос: являются ли все автоморфизмы решетки клонов функций на n-элементном множестве внутренними, т. е. индуцированными перестановками множества n, остается открытым (см., к примеру, [8]). Вопрос о жесткости шкал $\langle CT_n; \leq\rangle$ также достаточно сложен, он, в частности, связан с открытым вопросом о строении решеток подгрупп конечных групп. В настоящей работе мы доказываем жесткость (т. е. неподвижность при любом автоморфизме) лишь некоторого фильтра шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$, играющего существенную роль в строении этой шкалы.

В работе [9] найдены удобные инварианты потенциалов вычислимости конечных алгебр: для алгебр $\mathcal{A} = \langle n; \sigma\rangle$, $\mathcal{B} = \langle n; \sigma_1\rangle$ имеет место отношение $CT(\mathcal{A}) \equiv CT(\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда для некоторой перестановки π на множестве n имеют место равенства $\pi(\mathrm{Sub}(\mathcal{A})) = \mathrm{Sub}(\mathcal{B})$ и $\pi^{-1}\,\mathrm{Iso}(\mathcal{A})\pi = \mathrm{Iso}(\mathcal{B})$. Здесь $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ — совокупность базовых множеств подалгебр алгебры $\mathcal{A}$, а $\mathrm{Iso}(\mathcal{A})$ — совокупность биекций между подмножествами из $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$, являющихся изоморфизмами между соответствующими подалгебрами алгебры $\mathcal{A}$ (внутренние изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$). Совокупность $\mathrm{Iso}(\mathcal{A}) \cup \{\varnothing\}$ можно естественным образом рассматривать как инверсную полугруппу относительно стандартного определения операции суперпозиции для частичных отображений множества n в себя самого. Таким образом, инвариантами классов $CT(\mathcal{A})/\equiv$, где $\mathcal{A} = \langle n; \sigma\rangle$, выступают (по модулю сопряжения перестановками множества n) пары $\langle \mathrm{Sub}(\mathcal{A}), \mathrm{Iso}(\mathcal{A})\rangle$. Кроме того, отношение $CT(\mathcal{A})/\equiv\, \leq CT(\mathcal{B})/\equiv$ имеет место тогда и только тогда, когда для некоторой перестановки π на множестве n имеют место включения $\pi(\mathrm{Sub}(\mathcal{B})) \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ и $\pi\,\mathrm{Iso}(\mathcal{B})\pi^{-1} \subseteq \mathrm{Iso}(\mathcal{A})$. Так как для любого $B \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ тождественное отображение id_B множества B самого на себя всегда входит в $\mathrm{Iso}(\mathcal{A})$ и в $\mathrm{Iso}(\mathcal{A})$ входят все биекции между одноэлементными подалгебрами, то рассматриваемые включения и равенства между совокупностями $\mathrm{Iso}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{Iso}(\mathcal{B})$ фактически определяются соответствующими отношениями между совокупностями $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{Sub}(\mathcal{B})$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A})$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{B})$, где $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}) = \{\varphi \in \mathrm{Iso}(\mathcal{A}) \mid \varphi$ не является тождественным отображением и область определения φ неодноэлементна$\}$. Таким образом, в качестве инвариантов отношений $\equiv$ и $\leq$ на множестве $CT(n)$ можно рассматривать пары $\langle \mathrm{Sub}(\mathcal{A}), \mathrm{Iso}'(\mathcal{A})\rangle$. Отметим также, что множество CT_n конечно.

В работе [9] найдено также описание пар $\langle S, I\rangle$, где S — совокупность некоторых подмножеств множества n, а I — некоторая совокупность биекций между подмножествами из S таких, что пара $\langle S, I\rangle$ — инвариант класса $CT(\mathcal{A})/\equiv$ для некоторой алгебры $\langle\mathcal{A};\sigma\rangle$, т. е. существует алгебра $\mathcal{A}=\langle n;\sigma\rangle$ такая, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})=S$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A})=I$. Описание подобных пар сводится к следующим требованиям.

1. Совокупность S включает в себя множество n и является нижней полурешеткой относительно теоретико-множественного пересечения $\cap$.

2. Для любого $\varphi\in I$ и любого $B\in S$ такого, что $B\subset \mathrm{Dom}(\varphi)$ и $|B|\neq 1$, если ограничение $\varphi\restriction B$ не тождественно на B, то $\varphi\restriction B\in I$.

3. Для любого $\varphi\in I$ множество $\mathrm{fix}(\varphi)=\{a\in n\mid \varphi(a)=a\}$ входит в S.

Для любой алгебры $\mathcal{A}=\langle n;\sigma\rangle$ через $\overline{\mathcal{A}}$ обозначим далее потенциал вычислимости $CT(\mathcal{A})/\equiv$ алгебры $\mathcal{A}$, рассматриваемый как соответствующая точка шкалы потенциалов $\langle CT_n;\leq\rangle$. Через $P(n)$ обозначим совокупность всех подмножеств множества n. Пусть алгебра $\mathcal{B}=\langle n;\sigma\rangle$ такова, что $\langle\mathrm{Sub}(\mathcal{B});\mathrm{Iso}'(\mathcal{B})\rangle=\langle P(n);\varnothing\rangle$. Через I обозначим фильтр $\{\overline{\mathcal{A}}\in CT_n\mid \overline{\mathcal{B}}\leq\overline{\mathcal{A}}\}$ частично упорядоченного множества $\langle CT_n;\leq\rangle$. Таким образом, I состоит из всех потенциалов вычислимости n-элементных универсальных алгебр, не имеющих нетождественных внутренних изоморфизмов между неодноэлементными подалгебрами (внутренних симметрий).

Заметим, что квазипримальные алгебры, соответствующие точкам из фильтра I (а каждая точка из I соответствует некоторой квазипримальной алгебре), — это так называемые полупримальные алгебры в терминологии Фостера — Пиксли [10].

Теорема 1. *Для любого автоморфизма ψ шкалы $\langle CT_n;\leq\rangle$ и любой точки $\overline{\mathcal{A}}\in I$ имеет место включение $\psi(\overline{\mathcal{A}})\in I$.*

Доказательство. Пусть алгебра $\mathcal{E}=\langle n;\sigma'\rangle$ такова, что $\langle\mathrm{Sub}(\mathcal{E}),\mathrm{Iso}'(\mathcal{E})\rangle=\langle\{n\};\varnothing\rangle$, т. е. точка $\overline{\mathcal{E}}$ является наибольшим элементом шкалы $\langle CT_n;\leq\rangle$. Под *рангом* $r(\overline{\mathcal{C}})$ точки $\overline{\mathcal{C}}$ шкалы $\langle CT_n;\leq\rangle$ будем понимать длину максимальной цепи в шкале $\langle CT_n;\leq\rangle$ от точки $\overline{\mathcal{E}}$ к точке $\overline{\mathcal{C}}$. Очевидно, что для $\overline{\mathcal{A}}\in I$ ранг точки $\overline{\mathcal{A}}$ равен мощности множества $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$. Доказательство равенства $\psi(\overline{\mathcal{A}})=\overline{\mathcal{A}}$ будем вести индукцией по рангу точки $\overline{\mathcal{A}}$. Предварительно докажем ряд лемм.

Нижним покрытием точки $\overline{\mathcal{C}}$ шкалы $\langle CT_n;\leq\rangle$ будем называть любую точку $\overline{\mathcal{C}}_1$ из CT_n такую, что $\overline{\mathcal{C}}$ — покрытие точки $\overline{\mathcal{C}}_1$. Под *нижней валентностью* точки $\overline{\mathcal{C}}$ в $\langle CT_n;\leq\rangle$ будем понимать число нижних покрытий этой точки, а под *верхней валентностью* точки $\overline{\mathcal{C}}$ — число покрытий точки $\overline{\mathcal{C}}$ в $\langle CT_n;\leq\rangle$.

Лемма 1. *Если ранг точки $\overline{\mathcal{A}}$ равен единице и $\overline{\mathcal{A}}\in I$, то для любого автоморфизма шкалы $\langle CT_n;\leq\rangle$ такого, что $\psi(\overline{\mathcal{A}})\in I$, имеет место равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}})=\overline{\mathcal{A}}$.*

Доказательство. Пусть $\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}'\in I$, $\psi(\overline{\mathcal{A}})=\overline{\mathcal{A}}'$ и алгебры $\overline{\mathcal{A}}=\langle n;\sigma\rangle$, $\overline{\mathcal{A}}'=\langle n,\sigma'\rangle$ таковы, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})=\{n,B\}$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A})=\varnothing$, $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}')=\{n,C\}$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}')=\varnothing$, $\varnothing\subset B\subset n$, $\varnothing\subset C\subset n$. Докажем, что $|B|=|C|$. Допустим противное, и пусть $k=|B|<|C|=l$. Непосредственно замечается, что число нижних покрытий точки $\overline{\mathcal{A}}$, имеющих верхнюю валентность 2, равно $2n-k-2$, если $2k>n$, и $2n-k-3$, если $2k\leq n$. Таким образом, если либо $2k>n$ и $2l>n$, либо $2k\leq n$ и $2l\leq n$, то равенства $2n-k-2=2n-l-2$ и $2n-k-3=2n-l-3$ соответственно влекут равенство $k=l$, а следовательно, и совпадение точек $\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}'$, что и требовалось показать.

Остается рассмотреть случай, когда $2k\leq n$ и $2l>n$, причем $2n-k-3=2n-l-2$, т. е. когда $k=[\frac{n}{2}]$ и $l=k+1$. При этом $\psi(\overline{\mathcal{A}})=\overline{\mathcal{A}}'$ и $\psi(\overline{\mathcal{A}}')=\overline{\mathcal{A}}$.

Рассмотрим вначале случай нечетного $n = 2k+1$. Пусть $d(m)$ — число простых делителей числа m. Нижними покрытиями верхней валентности 1 точки $\overline{\mathcal{A}}'$ являются точки вида $\overline{\mathcal{C}}_1$ и $\overline{\mathcal{C}}_2$, и только они, где $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}_1) = \{n, C\}$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}_1) = \{\varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{p-1}\}$ (здесь p — простой делитель числа $n - |C| = k$, φ — перестановка на n, тождественная на C и такая, что множество $n \backslash C$ — объединение φ-циклов длины p), $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}_2) = \{n, C\}$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}_2) = \left\{\varphi_1, \ldots, \varphi_1^{q-1}\right\}$ (здесь q — простой делитель числа $|C| = k+1, \varphi_1$ — перестановка на C такая, что C — объединение φ_1-циклов длины q).

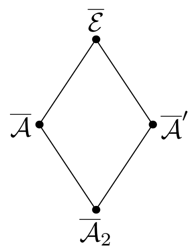
Таким образом, общее число нижних покрытий точки $\overline{\mathcal{A}}'$ верхней валентности 1 равно $d(k) + d(k+1)$.

Нижними покрытиями верхней валентности 1 для точки $\overline{\mathcal{A}}$ являются точки вида $\overline{\mathcal{D}}_1$ и $\overline{\mathcal{D}}_2$, аналогичные точкам вида $\overline{\mathcal{C}}_1$ и $\overline{\mathcal{C}}_2$ с заменой множества C на B, а также точка $\overline{\mathcal{A}}''$, где

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{A}'') = \{n, B, B_1\}, \quad |B| = |B_1|, \quad B \cap B_1 = \varnothing, \quad \mathrm{Iso}'(\mathcal{A}'') = \varnothing.$$

Таким образом, общее число нижних покрытий точки $\overline{\mathcal{A}}$, имеющих верхнюю валентность 1, равно $d(k+1) + d(k) + 1$, т. е. равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}'$ в случае нечетного n невозможно.

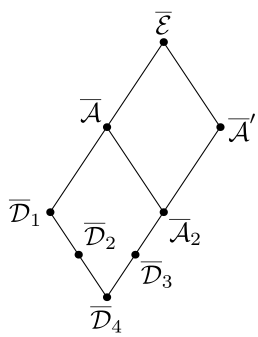
Пусть теперь n четно и равно $2k$. Существует единственная точка $\overline{\mathcal{A}}_2$ шкалы $\langle CT_n; \leq \rangle$ такая, что покрытия диаграммы



являются покрытиями в шкале $\langle CT_n; \leq \rangle$. При этом $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_2) = \{n, B, C\}$, $|B| = k$, $|C| = k+1$, $B \subset C$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}_2) = \varnothing$. Кроме того, существуют точки $\overline{\mathcal{D}}_1$, $\overline{\mathcal{D}}_2$, $\overline{\mathcal{D}}_3$, $\overline{\mathcal{D}}_4$ такие, что

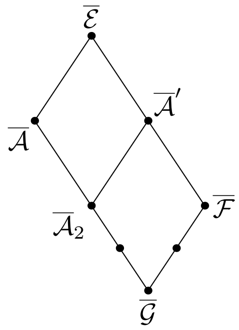
$$\mathrm{Sub}(\mathcal{D}_1) = \{n, B, B_1\}, \quad |B| = |B_1| = k, \quad B_1 \cap B = \varnothing, \quad \mathrm{Iso}'(\mathcal{D}_1) = \varnothing,$$
$$\mathrm{Sub}(\mathcal{D}_2) = \{n, B, B_1, B_1 \cap C\}, \quad \mathrm{Iso}'(\mathcal{D}_2) = \varnothing,$$
$$\mathrm{Sub}(\mathcal{D}_3) = \{n, B, C \backslash B, C\}, \quad \mathrm{Iso}'(\mathcal{D}_3) = \varnothing,$$
$$\mathrm{Sub}(\mathcal{D}_4) = \{n, B, C, B_1, C \backslash B\}, \quad \mathrm{Iso}'(\mathcal{D}_4) = \varnothing.$$

Здесь C — подмножество из определения точки $\overline{\mathcal{A}}_2$. При этом все покрытия диаграммы



являются покрытиями в шкале $\langle CT_n; \leq\rangle$ и верхняя валентность точки $\overline{\mathcal{D}}_1$ равна 1. Кроме того, в шкале $\langle CT_n; \leq\rangle$ не существует нижней грани точек $\overline{\mathcal{A}}_2, \overline{\mathcal{D}}_1$, для которой точка $\overline{\mathcal{A}}_2$ является покрытием.

Заметим теперь, что в шкале $\langle CT_n; \leq\rangle$ не существует диаграммы



все покрытия которой суть покрытия шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$, верхняя валентность точки $\overline{\mathcal{F}}$ равна 1, такой, что у точек $\overline{\mathcal{A}}_2, \overline{\mathcal{F}}$ в шкале $\langle CT_n; \leq\rangle$ нет нижних граней, для которых точка $\overline{\mathcal{F}}$ является покрытием. Как замечено выше, нижние покрытия точки $\overline{\mathcal{A}}'$, имеющие верхнюю валентность 1, суть точки вида $\overline{\mathcal{C}}_1$ и $\overline{\mathcal{C}}_2$ (из разбора случая нечетного n). Очевидным образом в случае точки вида $\overline{\mathcal{C}}_1$, претендующей на роль точки $\overline{\mathcal{F}}$, у точек $\overline{\mathcal{A}}_2$ и $\overline{\mathcal{C}}_1$ существует нижняя грань в $\langle CT_n; \leq\rangle$, для которой точка $\overline{\mathcal{F}}$ является покрытием. В случае же, когда в роли точки $\overline{\mathcal{F}}$ пытается выступить точка $\overline{\mathcal{C}}_2$ (так как равенство $\varphi_1(B) = B$ влекло бы равенство $\varphi_1(C\backslash B) = C\backslash B$, т. е. то, что одноэлементное множество $C\backslash B$ есть объединение φ_1-циклов и, значит, $q = 1$), мы имеем неравенство $\varphi_1(B) \neq B$. Но тогда наличие в алгебре $\mathcal{G}$ подалгебры вида $\varphi_1(B) \cap B$ и в $\mathrm{Iso}'(\mathcal{G})$ отображения $\varphi_1 \restriction \varphi_1(B) \cap B$ влекло бы наличие хотя бы двух точек между точками $\overline{\mathcal{A}}_2$ и $\overline{\mathcal{G}}$ в шкале $\langle CT_n; \leq\rangle$. Таким образом, и в случае нечетного n равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}'$ невозможно. Лемма доказана.

Под *спектром* точки $\overline{\mathcal{A}} \in I$ будем понимать совокупность чисел $\mathrm{Sp}(\overline{\mathcal{A}}) = \{|C| \mid C \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A})\}$. Так как для точек $\overline{\mathcal{A}} \in I$ все вышележащие точки снова лежат в I и для $k \neq n$ и точки $\overline{\mathcal{A}}$ из I включение $k \in \mathrm{Sp}(\overline{\mathcal{A}})$ равносильно тому, что для некоторой точки $\overline{\mathcal{B}} \in I$ ранга 1 такой, что $\overline{\mathcal{A}} \leq \overline{\mathcal{B}}$, имеет место $\mathrm{Sub}(\mathcal{B}) = \{n, B\}$, где $k = |B|$, то в силу утверждения леммы 1 равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}'$ для некоторых точек $\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{A}}'$ из I и некоторого автоморфизма ψ шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$ влечет равенство $\mathrm{Sp}(\overline{\mathcal{A}}) = \mathrm{Sp}(\overline{\mathcal{A}}')$. В дальнейшем ограничение условием $\overline{\mathcal{A}}' \in I$ будет снято.

Лемма 2. *Пусть алгебра $\mathcal{A} = \langle n; \sigma\rangle$ такова, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = \{n, B, n\backslash B\}$, где $\varnothing \subset B \subset n$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}) = \varnothing$. Тогда для любого автоморфизма ψ шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$ такого, что $\psi(\overline{\mathcal{A}}) \in I$, имеет место равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}$.*

Доказательство. Рассмотрим три возможных случая.

(a) $1 < |B| < n - |B|$. В силу замеченного выше о спектрах точек из I в случае включения $\psi(\overline{\mathcal{A}}) \in I$ и неравенства $\psi(\overline{\mathcal{A}}) \neq \overline{\mathcal{A}}$, единственным возможным вариантом для точки $\overline{\mathcal{A}}_1 = \psi(\overline{\mathcal{A}})$ является следующий: $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_1) = \{n, B, B_1\}$, где $B \subset B_1$, $|B_1| = n - |B|$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}_1) = \varnothing$. Пусть $D \subset n$ таково, что $B_1 \subset D$ и $|D| = n - 1$. Пусть алгебра $\mathcal{D}$ такова, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{D}) = \{n, D\}$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{D}) = \varnothing$, а для алгебры $\mathcal{D}_1$ имеют место равенства $\mathrm{Sub}(\mathcal{D}_1) = \{n, B, B_1, D\}$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{D}_1) = \varnothing$. В силу леммы 1 имеет место равенство $\psi(\overline{\mathcal{D}}) = \overline{\mathcal{D}}$. Точка $\overline{\mathcal{D}}_1$ является нижним покрытием точки $\overline{\mathcal{A}}_1 = \psi(\overline{\mathcal{A}})$, при этом $\overline{\mathcal{D}}_1 < \overline{\mathcal{D}}$. Без труда замечается, что не существует нижних покрытий точки $\overline{\mathcal{A}}$, меньших точки $\overline{\mathcal{D}}$. Тем самым в данном случае равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}_1$ невозможно и имеет место равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}$.

(б) $|B| = n - |B|$. В совокупности точек I точка $\overline{\mathcal{A}}$ — единственная точка ранга 2, имеющая спектр $\{n, |B|\}$, поэтому в силу замеченного выше о спектрах точек имеет место равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}$.

(в) $|B| = 1, n > 2$. В этом случае точка $\overline{\mathcal{A}}$ характеризуется как единственная точка из I, обладающая свойствами: ранг $\overline{\mathcal{A}}$ равен 2, $\overline{\mathcal{A}}$ имеет ровно два покрытия: точки $\overline{\mathcal{B}}_1, \overline{\mathcal{B}}_2$, и все максимальные нижние грани пары точек $\overline{\mathcal{B}}_1, \overline{\mathcal{B}}_2$ имеют ранг 2 (при этом $\mathrm{Sub}(\mathcal{B}_1) = \{n, B\}$, $\mathrm{Sub}(\mathcal{B}_2) = \{n, n\backslash B\}$).

Тем самым действительно равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}$ должно иметь место и в этом случае. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть алгебра* $\mathcal{A} = \langle n; \sigma\rangle$ *такова, что* $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = \{n, B_1, B_2\}$, *где* $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ *и* $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}) = \varnothing$. *Тогда для любого автоморфизма* ψ *шкалы* $\langle CT_n; \leq\rangle$ *такого, что* $\psi(\overline{\mathcal{A}}) \in I$, *имеет место равенство* $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}$.

Доказательство. Если $B_2 = n\backslash B_1$, то утверждение леммы совпадает с утверждением леммы 2. Если $|B_1| = |B_2|$, то так же, как и в доказательстве леммы 2, замечается, что точка $\overline{\mathcal{A}}$ — единственная точка ранга 2 из I, имеющая спектр $\{n, |B_1|\}$, и тем самым $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}$.

Пусть теперь $|B_1| < |B_2| < n - |B_1|$. В случае неравенства $\psi(\overline{\mathcal{A}}) \neq \overline{\mathcal{A}}$ равенство $\mathrm{Sp}(\overline{\mathcal{A}}) = \mathrm{Sp}(\psi(\overline{\mathcal{A}}))$ влечет равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}_1$, в котором $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_1) = \{n, B_1, B_3\}$, где $B_1 \subset B_3$, $|B_3| = |B_2|$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}_1) = \varnothing$. Пусть алгебра $\mathcal{C}$ такова, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B_1, n\backslash B_1\}$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}) = \varnothing$. Тогда если алгебра $\mathcal{D}$ такова, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{D}) = \{n, B_1, B_2, n\backslash B_1\}$, то $\overline{\mathcal{D}} \leq \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{C}}$ и при этом $\overline{\mathcal{D}}$ — нижнее покрытие в шкале $\langle CT_n; \leq\rangle$ точек $\overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{\mathcal{C}}$. По лемме 2 имеет место равенство $\psi(\overline{\mathcal{C}}) = \overline{\mathcal{C}}$, но в то же время очевидно, что не существует нижней грани точек $\overline{\mathcal{A}}_1$ и $\overline{\mathcal{C}}$, являющейся их нижним покрытием в шкале $\langle CT_n; \leq\rangle$. Тем самым равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}_1$ невозможно и, как и в предыдущих случаях, имеет место равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}$. Лемма доказана.

Из утверждения леммы 3 без труда доказывается утверждение леммы 4.

Лемма 4. *Пусть алгебра* $\mathcal{A} = \langle n; \sigma\rangle$ *такова, что* $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = \{n, B_1, B_2\}$, *где* $B_1 \subset B_2$ *и* $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}) = \varnothing$. *Тогда для любого автоморфизма* ψ *шкалы* $\langle CT_n; \leq\rangle$ *такого, что* $\psi(\overline{\mathcal{A}}) \in I$, *имеет место равенство* $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}$.

Точно так же непосредственно из утверждения леммы 4 вытекает утверждение леммы 5.

Лемма 5. *Пусть алгебра* $\mathcal{A} = \langle n; \sigma\rangle$ *такова, что* $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = \{n, B_1, B_2, B_1 \cap B_2\}$, *где* $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}) = \varnothing$. *Тогда для любого автоморфизма* ψ *шкалы* $\langle CT_n; \leq\rangle$ *такого, что* $\psi(\overline{\mathcal{A}}) \in I$, *имеет место равенство* $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}$.

Лемма 6. *Пусть* $\overline{\mathcal{A}} \in I, \psi$ *— автоморфизм шкалы* $\langle CT_n; \leq\rangle$. *Тогда равенство* $\overline{\mathcal{A}}' = \psi(\overline{\mathcal{A}})$ *невозможно, если алгебра* $\mathcal{A}'$ *удовлетворяет одному из перечисленных условий:*

1) $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}') = \{n, B_1, B_2\}$, $B_1, B_2 \neq \varnothing$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}') = \{\varphi, \varphi^{-1}\}$, *где* φ *— некоторая биекция множества* B_1 *на* B_2;

2) $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}') = \{n, B_1, B_2, B_1 \cap B_2\}$, $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}') = \{\varphi, \varphi^{-1}\}$, *где* φ *— некоторая биекция множества* B_1 *на* B_2 *такая, что* $\mathrm{fix}(\varphi) = B_1 \cap B_2$;

3) $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}') = \{n, B\}$, $B \neq \varnothing$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}') = \{\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{p-1}\}$, *где* p *— некоторый простой делитель числа* $|B|$, φ *— перестановка на* B *и* B *— объединение* φ*-циклов длины* p*;*

4) $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}') = \{n, B_1, B_2\}$, $\varnothing \neq B_2 \subset B_1$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}') = \{\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{p-1}\}$, *где* p *— некоторый простой делитель числа* $|B_1| - |B_2|$, φ *— перестановка на* B_1 *такая, что* $\mathrm{fix}(\varphi) = B_2$ *и* $B_1 \backslash B_2$ *— объединение* φ*-циклов длины* p*;*

5) $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}') = \{n\}$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}') = \{\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{p-1}\}$, *где* p *— некоторый простой делитель числа* n *и* n *— объединение* φ*-циклов длины* p*;*

6) $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}') = \{n, B\}$, $B \neq \varnothing$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}') = \{\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{p-1}\}$, *где* p *— некоторый простой делитель числа* $n - |B|$, φ *— перестановка на* n *такая, что* $\mathrm{fix}(\varphi) = B$ *и* $n \backslash B$ *— объединение* φ*-циклов длины* p*.*

Доказательство. 1. Точка $\overline{\mathcal{A}}_1$ такая, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_1) = \{n, B_1, B_2\}$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}_1) = \varnothing$, является единственным покрытием точки $\overline{\mathcal{A}}'$. При этом так как $\psi^{-1}(\overline{\mathcal{A}}_1) \geq \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{A}} \in I$, то $\psi^{-1}(\overline{\mathcal{A}}_1) \in I$, и так как $\overline{\mathcal{A}}_1 = \psi(\psi^{-1}(\overline{\mathcal{A}}_1))$, то в силу утверждения леммы 3 имеет место равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}_1) = \overline{\mathcal{A}}_1$. Тем самым точка $\overline{\mathcal{A}}_1$ является единственным покрытием точки $\overline{\mathcal{A}}$. Вследствие этого для алгебры $\mathcal{A}$ справедливы равенства $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = \{n, B_1, B_2, B\}, B_1 \cap B_2 = B_1 \cap B = B_2 \cap B = \varnothing$, $|B_1| = |B_2| = |B|$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}') = \varnothing$. Все возможные нижние покрытия точки $\overline{\mathcal{A}}_1$ суть $\overline{\mathcal{A}}$, $\overline{\mathcal{A}}'$, $\overline{\mathcal{A}}_2$, $\overline{\mathcal{A}}_3$, $\overline{\mathcal{A}}_4$, $\overline{\mathcal{A}}_5$, $\overline{\mathcal{A}}_6$, где

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_2) = \{n, B_1, B_2, C_2\}, \quad \mathrm{Iso}'(\mathcal{A}_2) = \varnothing$$

и $C_2 \cap (B_1 \cup B_2) = \varnothing$, $|C_2| \neq |B_1| = |B_2|$;

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_3) = \{n, B_1, B_2, C_3\}, \quad \mathrm{Iso}'(\mathcal{A}_3) = \varnothing$$

и $C_3 \subset B_1$;

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_4) = \{n, B_1, B_2, C_4\}, \quad \mathrm{Iso}'(\mathcal{A}_4) = \varnothing$$

и $B_1 \subset C_4$, $C_4 \cap B_2 = \varnothing$;

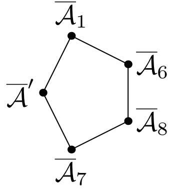
$$\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_5) = \{n, B_1, B_2, C_5\}, \quad \mathrm{Iso}'(\mathcal{A}_5) = \varnothing$$

и $B_1 \cup B_2 \subseteq C_5 \subset n$;

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_6) = \{n, B_1, B_2\}, \quad \mathrm{Iso}'(\mathcal{A}_6) = \{\varphi_1, \varphi_1^2, \dots, \varphi_1^{q-1}\}.$$

Здесь q — некоторый простой делитель числа $|B_1|$, φ_1 — перестановка на B_1 и B_1 — объединение φ_1-циклов длины q.

Заметим, что $\sup(\overline{\mathcal{A}}_6, \overline{\mathcal{A}}') = \overline{\mathcal{A}}_1$, $\inf(\overline{\mathcal{A}}_6, \overline{\mathcal{A}}') = \overline{\mathcal{A}}_7$, где $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_7) = \{n, B_1, B_2\}$, а инверсная полугруппа $\mathrm{Iso}(\mathcal{A}_7)$ порождена множеством $\{\mathrm{id}_n, \mathrm{id}_{B_1}, \mathrm{id}_{B_2}, \varphi, \varphi_1\}$, в котором id_P — тождественное отображение на множестве P. Пусть алгебра $\mathcal{A}_8$ такова, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_8) = \{n, B_1, B_2\}$, а инверсная полугруппа $\mathrm{Iso}(\mathcal{A}_8)$ порождена множеством $\{\mathrm{id}_n, \mathrm{id}_{B_1}, \mathrm{id}_{B_2}, \varphi\varphi_1\varphi^{-1}, \varphi_1\}$. Тем самым точки $\{\overline{\mathcal{A}}_1, \overline{\mathcal{A}}_6, \overline{\mathcal{A}}', \overline{\mathcal{A}}_7, \overline{\mathcal{A}}_8\}$ образуют в шкале $\langle CT_n; \leq\rangle$ пентагон



а покрытия в этом пентагоне являются одновременно покрытиями во всей шкале $\langle CT_n; \leq\rangle$ в целом. Заметим теперь, что не существует подобного пентагона с вершиной $\overline{\mathcal{A}}_1$ и точкой $\overline{\mathcal{A}}$ в роли точки $\overline{\mathcal{A}}'$. Действительно, в противном случае на роль точки $\overline{\mathcal{A}}_6$ могут претендовать лишь точки $\overline{\mathcal{A}}'$, $\overline{\mathcal{A}}_2$, $\overline{\mathcal{A}}_3$, $\overline{\mathcal{A}}_4$, $\overline{\mathcal{A}}_5$, $\overline{\mathcal{A}}_6$.

Как легко видеть, интервалы

$$[\inf(\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}'),\sup(\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}')],\quad [\inf(\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}_2),\sup(\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}_2)]$$

в случае, когда $n = 3|B_1|$ либо когда $n = 2|B_1| + |C_2|$,

$$[\inf(\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}_3),\sup(\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}_3)],\quad [\inf(\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}_4),\sup(\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}_4)]$$

в случае, когда $n = 3|B_1|$ либо когда $n = |B_1| + |C_4|$,

$$[\inf(\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}_5),\sup(\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}_5)]$$

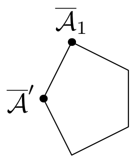
в случае, когда $3|B_1|$,

$$[\inf(\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}_6),\sup(\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}_6)]$$

в шкале $\langle CT_n;\le\rangle$, имеют мощность 4. Пары же точек $\{\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}_2\}$, когда $n \ne 3|B_1|$ и $n \ne 2|B_1| + |C_2|, \{\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}_4\}$, когда $n \ne 3|B_1|$ и $n \ne |B_1| + |C_4|, \{\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}_5\}$, когда $n \ne 3|B_1|$, не имеют наибольшей нижней грани в шкале $\langle CT_n;\le\rangle$.

Тем самым действительно рассматриваемого пентагона, включающего точку $\overline{\mathcal{A}}$ в роли $\overline{\mathcal{A}}'$, не существует, а тем самым и не существует автоморфизма ψ, переводящего точку $\overline{\mathcal{A}}$ в точку $\overline{\mathcal{A}}'$ в рассматриваемом случае 1.

2. Аналогично тому, как это сделано для случая 1, нетрудно заметить, что в данном случае $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = \{n, B_1, B_2, B, B_1\cap B_2\}$, $B_1 \cap B_2 = B_1 \cap B = B_2 \cap B \ne \varnothing, |B_1| = |B_2| = |B|$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}) = \varnothing$, а $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_1) = \{n, B_1, B_2, B_1 \cap B_2\}$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}_1) = \varnothing$. Перебирая так же, как и в случае 1, всевозможные нижние покрытия точки $\overline{\mathcal{A}}_1$, непосредственно замечаем, что среди них только точки $\overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{\mathcal{A}}'$ имеют верхнюю валентность, равную 1. Тем самым $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}'$ и $\psi(\overline{\mathcal{A}}') = \overline{\mathcal{A}}$. Так же, как и в случае 1, ясно, что существует пентагон



покрытия которого суть покрытия в шкале $\langle CT_n;\le\rangle$, и не существует подобного пентагона с точкой $\overline{\mathcal{A}}$ в роли точки $\overline{\mathcal{A}}'$, а тем самым и не существует автоморфизма, переводящего точку $\overline{\mathcal{A}}$ в точку $\overline{\mathcal{A}}'$ в рассматриваемом случае 2.

Случаи 3 и 6 лучше рассматривать одновременно, переобозначив при этом алгебру $\mathcal{A}'$ из случая 6 как $\mathcal{A}''$. Итак,

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = \{n, B_1, B\},\quad |B_1| = |B|,\quad B\cap B_1 = \varnothing,\quad \mathrm{Iso}'(\mathcal{A}) = \varnothing,$$

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{A}') = \{n, B\},\quad \mathrm{Iso}'(\mathcal{A}') = \left\{\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{p-1}\right\},$$

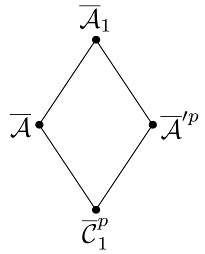
где p — простой делитель числа $|B|, \varphi$ — перестановка на B и B — объединение φ-циклов длины p, а

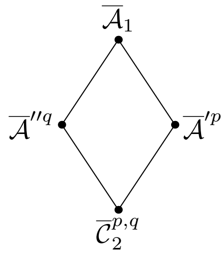
$$\mathrm{Sub}(\mathcal{A}'') = \{n, B\},\quad \mathrm{Iso}'(\mathcal{A}'') = \left\{\varphi_1, \varphi_1^2, \dots, \varphi_1^{q-1}\right\},$$

где q — простой делитель числа $n - |B|$, φ_1 — перестановка на $n, \mathrm{fix}(\varphi_1) = B$ и $n\backslash B$ — объединение φ_1-циклов длины q. При этом $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_1) = \{n, B\}$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}_1) = \varnothing$.

Нетрудно видеть, что только точки вида $\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{A}}'$ и $\overline{\mathcal{A}}''$ среди нижних покрытий точки $\overline{\mathcal{A}}_1$ имеют верхнюю валентность 1. При этом для простого делителя p числа $|B|$ соответствующую алгебру вида $\mathcal{A}'$ обозначим как $\mathcal{A}'^p$, а для простого делителя q числа $n - |B|$ соответствующую алгебру вида $\mathcal{A}''$ обозначим как $\mathcal{A}''^q$. Таким образом, в рассматриваемых нами случаях 3 либо 6 автоморфизм ψ действует на множестве $R = \{\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{A}}'^p, \overline{\mathcal{A}}''^q \mid p(q)$ — простой делитель числа $|B|$ (числа $n - |B|$)$\}$ как перестановка и $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}'^p$, либо $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}''^q$ для подходящих p и q.

Заметим, что для точек $\overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{\mathcal{A}}'^p$ так же, как и для точек $\overline{\mathcal{A}}'^p$ и $\overline{\mathcal{A}}''^q$, в шкале $\langle CT_n; \leq \rangle$ существует инфимум — соответственно точки $\overline{\mathcal{C}}_1^p$ и $\overline{\mathcal{C}}_2^{p,q}$ — и при этом все покрытия в решетках





являются одновременно покрытиями в шкале $\langle CT_n; \leq \rangle$. Очевидно, что алгебры $\mathcal{C}_1^p$ и $\mathcal{C}_2,^{p,q}$ таковы, что

$$\mathrm{Sub}\big(\mathcal{C}_1^p\big) = \{n, B_1, B\}, \quad \mathrm{Iso}'\big(\mathcal{C}_1^p\big) = \{\varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{p-1}\}, \quad \mathrm{Sub}\big(\mathcal{C}_2^{p,q}\big) = \{n, B\},$$

инверсная полугруппа $\mathrm{Iso}\big(\mathcal{C}_2^{p,q}\big)$ порождена множеством

$$\big\{\varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{p-1}, \varphi_1, \varphi_1^2, \ldots, \varphi_1^{q-1}\big\}.$$

Рассмотрим отдельно два подслучая: (а) $n = 2|B|$; (б) $n > 2|B|$.

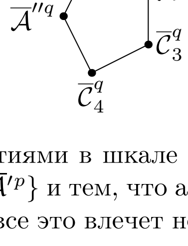
В случае (а) имеем $n \backslash B = B_1$, и если алгебры $\mathcal{C}_3^q, \mathcal{C}_4^q$ таковы, что

$$\mathrm{Sub}\big(\mathcal{C}_3^q\big) = \mathrm{Sub}\big(\mathcal{C}_4^q\big) = \mathrm{Sub}(\mathcal{A}), \quad \mathrm{Iso}'\big(\mathcal{C}_3^q\big) = \big\{\varphi_1 \restriction B, \varphi_1^2 \restriction B, \ldots, \varphi_1^q \restriction B\big\},$$

где $\big\{\varphi_1, \varphi_1^2, \ldots, \varphi_1^q\big\} = \mathrm{Iso}'(\mathcal{A}''^q)$ и $\mathrm{Iso}'\big(\mathcal{C}_4^q\big) = \mathrm{Iso}'\big(\mathcal{C}_3^q\big) \cup \mathrm{Iso}'\big(\mathcal{A}''^q\big)$, то в шкале $\langle CT_n; \leq \rangle$ имеют место равенства

$$\sup(\overline{\mathcal{A}}''^q, \overline{\mathcal{A}}) = \sup\big(\overline{\mathcal{A}}''^q, \overline{\mathcal{C}}_3^q\big) = \overline{\mathcal{A}}_1, \quad \inf(\overline{\mathcal{A}}''^q, \overline{\mathcal{A}}) = \inf\big(\overline{\mathcal{A}}''^q, \overline{\mathcal{C}}_3^q\big) = \overline{\mathcal{C}}_4^q$$

и при этом покрытия в решетке



являются одновременно покрытиями в шкале $\langle CT_n; \leq \rangle$. Вместе с замеченным выше о парах $\{\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{A}}'^p\}$ и $\{\overline{\mathcal{A}}''^q, \overline{\mathcal{A}}'^p\}$ и тем, что автоморфизм ψ действует как перестановка ψ на множестве R, все это влечет невозможность равенства $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}'$ в данном подслучае.

Пусть теперь имеет место подслучай (б), т. е. $B_1 \subset n \backslash B$. Этот подслучай рассматривается во многом аналогично подслучаю (а). Отличия их заключаются лишь в том, что

$$\mathrm{Sub}\big(\mathcal{C}_3^q\big) = \big\{n, B, B_1, \varphi_1(B_1), \varphi_1^2(B_1), \dots, \varphi_1^q(B_1)\big\},$$

$\mathrm{Iso}'\big(\mathcal{C}_3^q\big)$ состоит из всевозможных ограничений отображений из $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}''^q)$ по подмножествам из совокупности $\big\{B_1, \varphi_1(B_1), \dots, \varphi_1^q(B_1)\big\}$, точка $\overline{\mathcal{C}}_4^q$ является не инфимумом пар $\{\overline{\mathcal{A}}''^q, \overline{\mathcal{A}}\}$ и $\big\{\overline{\mathcal{A}}''^q, \overline{\mathcal{C}}_3^q\big\}$, а одним из максимальных элементов в совокупности всех нижних граней в шкале $\langle CT_n; \leq\rangle$ для указанных пар точек. Кроме того, интервал $[\overline{\mathcal{C}}_3^q, \overline{\mathcal{A}}]$, возможно, содержит точки, отличные от $\overline{\mathcal{C}}_3^q, \overline{\mathcal{A}}$. Все остальные рассуждения такие же, как и в подслучае (а), и так же, как и там, приводят к невозможности подслучая (б), а вместе с тем и случаев 3 и 6.

4. В данном случае

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = \{n, B_1, B_2, B_3\}, \quad |B_1| = |B_3|, \quad B_2 = B_1 \cap B_3, \quad \mathrm{Iso}'(\mathcal{A}) = \varnothing$$

и $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_1) = \{n, B_1, B_2\}$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}_1) = \varnothing$. Любое нижнее покрытие $\overline{\mathcal{C}}$ точки $\overline{\mathcal{A}}$ имеет один из следующих видов:

(а) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B_1, B_2, B_3, C_1\}$, $B_2 = B_1 \cap C_1 = B_3 \cap C_1$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}) = \varnothing$;

(б) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B_1, B_2, B_3, C_2\}$, $(B_1 \cup B_3) \cap C_2 = \varnothing$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}) = \varnothing$;

(в) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B_1, B_2, B_3, C_3\}$, $C_3 \subset B_2$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}) = \varnothing$;

(г) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B_1, B_2, B_3, C_4\}$, $C_4 \subseteq B_1 \backslash B_2$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}) = \varnothing$;

(д) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B_1, B_2, B_3, C_5\}$, $B_1 \cup B_3 \subset C_5$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}) = \varnothing$;

(е) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B_1, B_2, B_3, C_6\}$, $B_1 \subset C_6$, $C_6 \cap B_3 = B_2$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}) = \varnothing$;

(ж) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B_1, B_2, B_3\}$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}) = \{\varphi, \varphi^{-1}\}$, где φ — некоторая биекция множества B_1 на B_3 такая, что $\mathrm{fix}(\varphi) = B_2$;

(з) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B_1, B_2, B_3\}$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}) = \big\{\varphi_1, \varphi_1^2, \dots, \varphi_1^{q-1}\big\}$, где q — некоторый простой делитель числа $|B_2|$, φ_1 — перестановка на B_2 и B_2 — объединение φ_1-циклов длины q;

(и) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B_1, B_2, B_3\}$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}) = \big\{\varphi_2, \varphi_2^2, \dots, \varphi_2^{r-1}\big\}$, где r — некоторый простой делитель числа $|B_1| - |B_2|$, φ_2 — перестановка на B_1, $\mathrm{fix}(\varphi_2) = B_2$ и $B_1 \backslash B_2$ — объединение φ_2-циклов длины r.

Непосредственно проверяется, что для всех нижних покрытий $\overline{\mathcal{C}}$ точки $\overline{\mathcal{A}}$ их ранги равны четырем.

Пусть теперь $D = \{d_1, \dots, d_p\} \subseteq B_1 \backslash B_2$ — один из φ-циклов алгебры $\mathcal{A}'$. Рассмотрим алгебру $\mathcal{B} = \langle n; \sigma^*\rangle$ такую, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{B}) = \{n, B_1, B_2, \{d_1\}, \dots, \{d_p\}\}$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{B}) = \mathrm{Iso}'(\mathcal{A}')$. Очевидно, что точка $\overline{\mathcal{B}}$ является нижним покрытием точки $\overline{\mathcal{A}}'$ в $\langle CT_n; \leq\rangle$ и при этом ранг точки $\overline{\mathcal{B}}$ равен $p + 3$. Замеченное о рангах нижних покрытий точек $\overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{\mathcal{A}}'$ доказывает невозможность равенства $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}'$ в данном случае.

5. Этот случай аналогичен случаю 4. Здесь $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = \{n, B\}$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}) = \varnothing$, а $\mathcal{A}_1 = \mathcal{E}$. Любое нижнее покрытие $\overline{\mathcal{C}}$ точки $\overline{\mathcal{A}}$ имеет один из следующих видов:

(а) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B, C\}$, где $B \subset C \subset n$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}) = \varnothing$;

(б) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B, C\}$, где $B \cap C = \varnothing$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}) = \varnothing$;

(в) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B, C\}$, где $\varnothing \subset C \subset B$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}) = \varnothing$;

(г) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B\}$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}) = \big\{\varphi_1, \varphi_1^2, \dots, \varphi_1^{p-1}\big\}$, где p — некоторый простой делитель числа $n - |B|$, φ_1 — перестановка на n, $\mathrm{fix}(\varphi_1) = B$ и $n \backslash B$ — объединение φ_1-циклов длины p;

(д) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B\}$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{C}) = \{\varphi_2, \varphi_2^2, \dots, \varphi_2^{q-1}\}$, где q — некоторый простой делитель числа $|B|$, φ_2 — перестановка на B и B — объединение φ_2-циклов длины q.

Непосредственно замечается, что ранг любого из перечисленных нижних покрытий $\overline{\mathcal{C}}$ точки $\overline{\mathcal{A}}$ равен 2. Пусть теперь $D = \{d_1, d_2, \dots, d_p\} \subseteq n$ — один из φ-циклов алгебры $\mathcal{A}'$. Рассмотрим алгебру $\mathcal{B} = \langle n; \sigma^* \rangle$ такую, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{B}) = \{n, \{d_1\}, \dots, \{d_p\}\}$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{B}) = \mathrm{Iso}'(\mathcal{A}')$. Очевидно, что точка $\overline{\mathcal{B}}$ является нижним покрытием точки $\overline{\mathcal{A}}$ в $\langle CT_n; \leq \rangle$ и при этом ранг точки $\overline{\mathcal{B}}$ равен $p+1$. Отмеченное о рангах нижних покрытий точек $\overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{\mathcal{A}}'$ доказывает невозможность равенства $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}'$ и в этом случае. Лемма 6 доказана полностью.

Вернемся к доказательству теоремы. Итак, пусть ψ — некоторый автоморфизм шкалы $\langle CT_n; \leq \rangle$, $\overline{\mathcal{A}} \in I$, $\overline{\mathcal{A}}' = \psi(\overline{\mathcal{A}})$. Требуется доказать, что $\overline{\mathcal{A}}' \in I$.

Доказательство будем вести индукцией по рангу точки $\overline{\mathcal{A}}$. Базис индукции, т. е. включение $\psi(\overline{\mathcal{A}}) \in I$ для точек ранга 0 (когда $\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{E}}$), очевиден. Пусть m — натуральное число, большее нуля, и включение $\psi(\overline{\mathcal{B}}) \in I$ доказано для всех точек $\overline{\mathcal{B}}$ из I ранга, меньшего m. Пусть $\overline{\mathcal{A}} \in I$ и ранг $\overline{\mathcal{A}}$ равен m. Докажем, что $\psi(\overline{\mathcal{A}}) \in I$.

Пусть $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = S \subseteq P(n)$, и так как $\overline{\mathcal{A}} \in I$, то $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}) = \varnothing$. Пусть $B \subset n$ — произвольный $\cap$-неразложимый элемент S. Тогда $S' = S \backslash \{B\}$, в свою очередь, образует $\cap$-полурешетку и пара $\langle S'; \varnothing \rangle$ удовлетворяет условиям 1–3 из описания инвариантов потенциалов вычислимости универсальных алгебр. Тем самым существует алгебра $\mathcal{A}_1 = \langle n; \sigma_1 \rangle$ такая, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_1) = S'$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}_1) = \varnothing$. Точка $\overline{\mathcal{A}}_1$ — покрытие точки $\overline{\mathcal{A}}$ в шкале $\langle CT_n; \leq \rangle$, тем самым ранг точки $\overline{\mathcal{A}}_1$ равен $m-1$ и по индукционному предположению имеет место включение $\psi(\overline{\mathcal{A}}_1) \in I$. Докажем, что $\overline{\mathcal{A}}' = \psi(\overline{\mathcal{A}}) \in I$. Допустим противное: пусть $\overline{\mathcal{A}}' \notin I$. Так как $\overline{\mathcal{A}}' = \psi(\overline{\mathcal{A}}) < \psi(\overline{\mathcal{A}}_1)$, $\psi(\overline{\mathcal{A}}_1)$ является покрытием точки $\overline{\mathcal{A}}'$, то инверсная полугруппа $\mathrm{Iso}(\mathcal{A}')$ содержит неидемпотентные отображения с неодноэлементной областью определения и не имеет собственных инверсных подобных подполугрупп, содержащих все идемпотенты из $\mathrm{Iso}(\psi(\mathcal{A}_1))$ и все отображения из $\mathrm{Iso}(\psi(\mathcal{A}_1))$ с одноэлементной областью определения. Тогда в силу истинности свойства 2 для пары $\langle \mathrm{Sub}(\mathcal{A}'), \mathrm{Iso}(\mathcal{A}') \rangle$ если φ — не идемпотентный элемент из $\mathrm{Iso}(\mathcal{A}')$ с неодноэлементной областью определения $\mathrm{Dom}(\varphi)$, то $\mathrm{Dom}(\varphi), \mathrm{Rang}(\varphi) \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A}')$ и для любого $C \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A}')$, если $|C| > 1$ и $C \subset \mathrm{Dom}(\varphi)$, ограничение $\varphi \upharpoonright C$ тождественно на C. При этом вместе со всеми идемпотентами и всеми отображениями с одноэлементной областью определения из $\mathrm{Iso}(\mathcal{A}')$ отображение φ порождает всю инверсную полугруппу $\mathrm{Iso}(\mathcal{A}')$.

Пусть B' — какой-либо иной $\cap$-неразложимый элемент из S и алгебра $\mathcal{A}_2 = \langle n; \sigma_2 \rangle$ такова, что $\langle \mathrm{Sub}(\mathcal{A}_2), \mathrm{Iso}'(\mathcal{A}_2) \rangle = \langle S'', \varnothing \rangle$, где $S'' = S \backslash \{B'\}$. Тем самым $\overline{\mathcal{A}} < \overline{\mathcal{A}}_2$ и $\overline{\mathcal{A}}' < \psi(\overline{\mathcal{A}}_2)$, ранг $\psi(\overline{\mathcal{A}}_2)$ и $\overline{\mathcal{A}}_2$ равен $m-1$, т. е. $\psi(\overline{\mathcal{A}}_1)$ и $\psi(\overline{\mathcal{A}}_2)$ — два покрытия точки $\overline{\mathcal{A}}'$, лежащие в I и имеющие ранг $m-1$. Отсюда очевидно, что $\psi(\overline{\mathcal{A}}_1) = \psi(\overline{\mathcal{A}}_2)$ и, в частности, существует перестановка π множества n такая, что $\pi(S'') = S'$. Тем самым все $\cap$-неразложимые элементы из S суть максимальные в $S \backslash \{n\}$, имеют одну и ту же мощность, более того, для любых $\cap$-неразложимых $B, B' \in S$ существует перестановка π множества n такая, что $\pi(S \backslash \{B\}) = S \backslash \{B'\}$. В частности, точка $\overline{\mathcal{A}}$ имеет в шкале $\langle CT_n; \leq \rangle$ единственное покрытие.

Допустим, что существует $\cap$-неразложимый элемент C из S' такой, что $C \neq \mathrm{Dom}(\varphi^k), C \neq \mathrm{Rang}(\varphi^k)$ и $C \neq \mathrm{fix}(\varphi^k)$ для любого целого k. Пусть алгебра $\mathcal{A}^* = \langle n; \sigma^* \rangle$ такова, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}^*) = S' \backslash \{C\}$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}^*) = \mathrm{Iso}(\mathcal{A}') \backslash \{\mathrm{id}_C\}$.

Очевидно, что точка $\overline{\mathcal{A}}^*$ — покрытие точки $\overline{\mathcal{A}}'$ в $\langle CT_n;\leq\rangle$. Покрытием точки $\overline{\mathcal{A}}'$ является и точка $\psi(\overline{\mathcal{A}}_1)$, при этом $\psi(\overline{\mathcal{A}}_1)\neq\overline{\mathcal{A}}^*$. В то же время, как замечено выше, точка $\overline{\mathcal{A}}$, а тем самым и точка $\overline{\mathcal{A}}'$ имеют в $\langle CT_n;\leq\rangle$ единственное покрытие. Таким образом, единственными $\cap$-неразложимыми элементами $\cap$-полурешетки S' могут быть только множества вида $\mathrm{Dom}(\varphi^k)$, $\mathrm{Rang}(\varphi^k)$ и $\mathrm{fix}(\varphi^k)$, где k — любое целое число. Вместе с уже отмеченными выше свойствами отображения φ для алгебры $\mathcal{A}'$ возможны лишь ситуации 1–6, перечисленные в условиях леммы 6. Но по заключению этой леммы точка $\overline{\mathcal{A}}$ не может входить в I. Полученное противоречие и доказывает невозможность ситуации $\psi(\overline{\mathcal{A}})\notin I$. Таким образом, имеем включение $\psi(\overline{\mathcal{A}})\in I$. Теорема доказана.

Под *тонким спектром* $\mathrm{Spec}(\overline{\mathcal{A}})$ точки $\overline{\mathcal{A}}$ из I будем понимать набор мощностей подалгебр алгебры $\mathcal{A}$ с указанием, сколько различных подалгебр алгебры $\mathcal{A}$ имеет данную мощность. Индукцией по рангу точек будем доказывать, что автоморфизм ψ шкалы $\langle CT_n;\leq\rangle$ сохраняет тонкий спектр точек. Пусть X — максимальный по мощности элемент из $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})\backslash\{n\}$ и точка $\overline{\mathcal{A}}_1$ такова, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_1)=\mathrm{Sub}(\mathcal{A})\backslash\{X\}$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{A}_1)=\varnothing$. Тогда $\psi(\overline{\mathcal{A}})\in I$, $\psi(\overline{\mathcal{A}})<\psi(\overline{\mathcal{A}}_1)$ и можно считать, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}')=\mathrm{Sub}(\psi(\mathcal{A}_1))\cup\{Y\}$ для $\overline{\mathcal{A}}'=\psi(\overline{\mathcal{A}})$. При этом по индукционному предположению тонкие спектры точек $\overline{\mathcal{A}}_1$ и $\psi(\overline{\mathcal{A}}_1)$ совпадают. Тем самым тонкие спектры точек $\overline{\mathcal{A}}$ и $\psi(\overline{\mathcal{A}})$ отличаются только мощностями $|X|$ и $|Y|$. Как замечено выше, автоморфизм ψ сохраняет спектр точек из I и тем самым в силу выбора множества X имеет место неравенство $|Y|\leq|X|$. Таким образом, любой автоморфизм шкалы, не сохраняющий тонкого спектра, может лишь уменьшить число максимальных по мощности подалгебр соответствующей алгебры. Вследствие аналогичного утверждения для автоморфизма ψ^{-1} должно быть равенство $|Y|=|X|$, т. е. действительно тонкие спектры точек $\overline{\mathcal{A}}$ и $\psi(\overline{\mathcal{A}})$ совпадают.

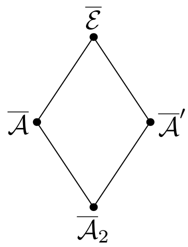
Аналогичным образом, как это было сделано для шкалы $\langle CT_n;\leq\rangle$, естественно рассмотреть существование нетождественных автоморфизмов в шкалах $\langle ECT_n;\leq\rangle$, $\langle PCT_n;\leq\rangle$, $\langle\exists^+CT_n;\leq\rangle$. Покажем, что аналог утверждения теоремы 1 справедлив и для шкалы $\langle ECT_n;\leq\rangle$.

Прежде чем доказывать собственно теорему, сформулируем и докажем необходимые леммы, формулировка которых аналогична формулировке лемм для шкалы $\langle CT_n;\leq\rangle$. Обозначим через $\mathrm{Aut}'\,\mathcal{A}$ совокупность нетривиальных автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$.

Лемма 1′. *Если ранг точки $\overline{\mathcal{A}}$ равен единице и $\overline{\mathcal{A}}\in I$, то для любого автоморфизма шкалы $\langle ECT_n;\leq\rangle$ такого, что $\psi(\overline{\mathcal{A}})\in I$, имеет место равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}})=\overline{\mathcal{A}}$.*

Доказательство. Пусть, как и при доказательстве аналогичной леммы для шкалы $\langle CT_n;\leq\rangle$, имеем $\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}}'\in I$, $\psi(\overline{\mathcal{A}})=\overline{\mathcal{A}}'$, $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})=\{n,B\}$, $\mathrm{Aut}'(\mathcal{A})=\varnothing$, $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}')=\{n,C\}$, $\mathrm{Aut}'(\mathcal{A}')=\varnothing$. Необходимо доказать, что $|B|=|C|$. Предположим, что $k=|B|<|C|=l$. Случаи, когда $2k>n$, $2l>n$ или $2k\leq n$, $2l\leq n$, рассматриваются аналогично соответствующим случаям из леммы 1 и таким же образом влекут равенство $k=l$. Рассмотрим случай, когда $2k\leq n$ и $2l>n$. При этом, как следует из леммы 1, $2n-k-3=2n-l-2$, $k=[\frac{n}{2}]$ и $l=k+1$.

Рассмотрим случай четного $n=2k$. Существует единственная точка $\overline{\mathcal{A}}_2$ шкалы $\langle ECT_n;\leq\rangle$ такая, что покрытия диаграммы



являются покрытиями в шкале $\langle ECT_n; \leq \rangle$. При этом

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_2) = \{n, B, C\}, \quad |B| = k, \quad |C| = k+1, \quad B \subset C, \quad \mathrm{Aut}'(\mathcal{A}) = \varnothing.$$

Кроме того, существуют точки $\overline{\mathcal{D}}_1$, $\overline{\mathcal{D}}_2$, $\overline{\mathcal{D}}_3$, $\overline{\mathcal{D}}_4$ такие, что

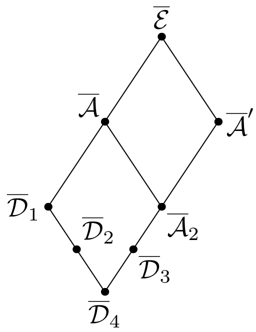
$$\mathrm{Sub}(\mathcal{D}_1) = \{n, B, B_1\}, \quad |B| = |B_1| = k, \quad B_1 \cap B = \varnothing, \quad \mathrm{Aut}'(\mathcal{D}_1) = \varnothing,$$

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{D}_2) = \{n, B, B_1, B_1 \cap C\}, \quad \mathrm{Aut}'(\mathcal{D}_2) = \varnothing,$$

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{D}_3) = \{n, B, C \backslash B, C\}, \quad \mathrm{Aut}'(\mathcal{D}_3) = \varnothing,$$

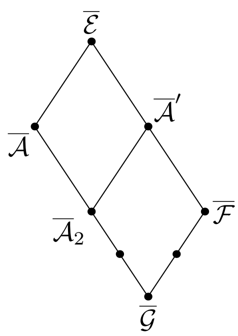
$$\mathrm{Sub}(\mathcal{D}_4) = \{n, B, C, B_1, C \backslash B\}, \quad \mathrm{Aut}'(\mathcal{D}_4) = \varnothing.$$

Здесь C — подмножество из определения точки $\overline{\mathcal{A}}_2$. При этом все покрытия диаграммы



являются покрытиями в шкале $\langle ECT_n; \leq \rangle$ и верхняя валентность точки $\overline{\mathcal{D}}_1$ равна 1. Заметим также, что в шкале $\langle ECT_n; \leq \rangle$ не существует нижней грани точек $\overline{\mathcal{A}}_2, \overline{\mathcal{D}}_1$, для которой точка $\overline{\mathcal{A}}_2$ является покрытием.

Покажем теперь, что в шкале $\langle ECT_n; \leq \rangle$ не существует диаграммы



все покрытия которой суть покрытия шкалы $\langle ECT_n; \leq \rangle$, а верхняя валентность точки $\overline{\mathcal{F}}$ равна 1, такой, что у точек $\overline{\mathcal{A}}_2, \overline{\mathcal{F}}$ в шкале $\langle ECT_n; \leq \rangle$ нет нижних граней, для которых точка $\overline{\mathcal{F}}$ является покрытием. Нижние покрытия точки $\overline{\mathcal{A}}'$, имеющие верхнюю валентность 1, — это точки вида $\overline{\mathcal{F}}$ такие, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{F}) = \{n, C\}, \mathrm{Aut}'(\mathcal{F}) = \{\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{p-1}\}$, где p — простой делитель числа $n - |C| = k$, φ — перестановка на n, тождественная на C и такая, что множество $n \backslash C$ — объединение φ-циклов длины p. Других видов нижних покрытий точки $\overline{\mathcal{A}}_2$ верхней валентности 1 нет. Инфимумом точек $\overline{\mathcal{A}}_2$ и $\overline{\mathcal{F}}$ является точка $\overline{\mathcal{G}}$ такая, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{G}) = \{n, B, C\}$, $B \subset C$, $\mathrm{Iso}'(\mathcal{G}) = \{\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{p-1}\}$, где φ определяется так же, как и для точки $\overline{\mathcal{F}}$. Нетрудно видеть, что точка $\overline{\mathcal{G}}$ является нижним покрытием точки $\overline{\mathcal{F}}$. Из полученного противоречия следует, что $|B| = |C|$.

Рассмотрим теперь случай нечетного n, т. е. когда $n = 2k + 1$. Как и в случае четного n, у точек $\overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{\mathcal{A}}'$, определение которых дано выше, существует нижняя грань, а именно точка $\overline{\mathcal{A}}_2$, где $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_2) = \{n, B, C\}$, $\mathrm{Aut}'(\mathcal{A}_2) = \varnothing$. У точки $\overline{\mathcal{A}}$ существует нижнее покрытие верхней валентности 1, а именно точка $\overline{\mathcal{D}}_1$, где $\mathrm{Sub}(\mathcal{D}_1) = \{n, B, B_1\}$, $|B| = |B_1|$, $B \cap B_1 = \varnothing$, $\mathrm{Aut}'(\mathcal{D}_1) = \varnothing$. В свою очередь, у точек $\overline{\mathcal{D}}_1$ и $\overline{\mathcal{A}}_2$ существует нижняя грань $\overline{\mathcal{D}}_2$, где $\mathrm{Sub}(\mathcal{D}_2) = \{n, B, B_1, C\}$, $B \subset C$, $B_1 \cap C = \varnothing$, $\mathrm{Aut}'(\mathcal{D}_2) = \varnothing$. Очевидно, точка $\overline{\mathcal{D}}_2$ является нижним покрытием точек $\overline{\mathcal{A}}_2$ и $\overline{\mathcal{D}}_1$ верхней валентности 3. Вместе с тем точка $\overline{\mathcal{A}}'$ имеет единственный тип нижних покрытий верхней валентности 1 — точки $\overline{\mathcal{F}}$ из случая четного n. Отметим также, что единственной нижней гранью (и нижним покрытием) точек $\overline{\mathcal{A}}_2$ и $\overline{\mathcal{F}}$ является точка $\overline{\mathcal{G}}$, у которой $\mathrm{Sub}(\mathcal{G}) = \{n, B, C\}$, $B \subset C$, $\mathrm{Aut}'(\mathcal{G}) = \{\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{p-1}\}$. Нетрудно заметить, что точка $\overline{\mathcal{G}}$ имеет верхнюю валентность 2, откуда вытекает, что и при нечетном n получаем неравенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}) \neq \overline{\mathcal{A}}'$, если $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = \{n, B\}$, $\mathrm{Aut}'(\mathcal{A}) = \varnothing$, $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}') = \{n, C\}$, $\mathrm{Aut}'(\mathcal{A}') = \varnothing$, $|B| \neq |C|$. Отсюда следует, что $|B| = |C|$ и $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, что и требовалось доказать.

Лемма 2$'$. *Пусть алгебра $\mathcal{A} = \langle n; \sigma \rangle$ такова, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = \{n, B, n \backslash B\}$, где $\varnothing \subset B \subset n$ и $\mathrm{Aut}'(\mathcal{B}) = \varnothing$. Тогда для любого автоморфизма ψ шкалы $\langle ECT_n; \leq \rangle$ такого, что $\psi(\overline{\mathcal{A}}) \in I$, имеет место равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}$.*

Лемма 3$'$. *Пусть алгебра $\mathcal{A} = \langle n; \sigma \rangle$ такова, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = \{n, B_1, B_2\}$, где $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ и $\mathrm{Aut}'(\mathcal{A}) = \varnothing$. Тогда для любого автоморфизма ψ шкалы $\langle ECT_n; \leq \rangle$ такого, что $\psi(\overline{\mathcal{A}}) \in I$, имеет место равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}$.*

Лемма 4$'$. *Пусть алгебра $\mathcal{A} = \langle n; \sigma \rangle$ такова, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = \{n, B_1, B_2\}$, где $B_1 \subset B_2$ и $\mathrm{Aut}'(\mathcal{A}) = \varnothing$. Тогда для любого автоморфизма ψ шкалы $\langle ECT_n; \leq \rangle$ такого, что $\psi(\overline{\mathcal{A}} \in I$, имеет место равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}$.*

Лемма 5$'$. *Пусть алгебра $\mathcal{A} = \langle n; \sigma \rangle$ такова, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = \{n, B_1, B_2, B_1 \cap B_2\}$, где $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, $\mathrm{Aut}'(\mathcal{A}) = \varnothing$. Тогда для любого автоморфизма ψ шкалы $\langle ECT_n; \leq \rangle$ такого, что $\psi(\overline{\mathcal{A}}) \in I$, имеет место равенство $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}$.*

Доказательства лемм $2'$–$5'$ аналогичны доказательствам соответствующих лемм 2–5 для шкалы $\langle CT_n; \leq \rangle$.

Лемма 6$'$. *Пусть $\overline{\mathcal{A}} \in I, \psi$ — автоморфизм шкалы $\langle CT_n; \leq \rangle$. Тогда равенство $\overline{\mathcal{A}}' = \psi(\overline{\mathcal{A}})$ невозможно, если алгебра $\mathcal{A}'$ удовлетворяет одному из перечисленных условий:*

1) $\mathrm{Sub}'(\mathcal{A}') = \{n\}$, $\mathrm{Aut}'(\mathcal{A}') = \{\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{p-1}\}$, где p — некоторый простой делитель числа n и n — объединение φ-циклов длины p;

2) $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}') = \{n, B\}$, $B \neq \varnothing$, $\mathrm{Aut}'(\mathcal{A}') = \{\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{p-1}\}$, где p — некоторый простой делитель числа $n - |B|$, φ — перестановка на n такая, что $\mathrm{fix}(\varphi) = B$ и $n \backslash B$ — объединение φ-циклов длины p.

Доказательство. 1. Точка $\overline{\mathcal{A}}'$ имеет единственное покрытие — точку $\overline{\mathcal{E}}$. Поэтому для точки $\overline{\mathcal{A}}$ имеем равенства $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = \{n, B\}$, $\mathrm{Aut}'(\mathcal{A}) = \varnothing$. Любое нижнее покрытие $\overline{\mathcal{C}}$ в шкале $\langle ECT_n; \leq\rangle$ точки $\overline{\mathcal{A}}$, как отмечено в доказательстве случая 5 леммы 5, имеет один из следующих видов:

(а) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B, C\}$, где $B \subset C \subset n$ и $\mathrm{Aut}'(\mathcal{C}) = \varnothing$;

(б) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B, C\}$, где $B \cap C = \varnothing$ и $\mathrm{Aut}'(\mathcal{C}) = \varnothing$;

(в) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B, C\}$, где $\varnothing \subset C \subset B$ и $\mathrm{Aut}'(\mathcal{C}) = \varnothing$;

(г) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B\}$ и $\mathrm{Aut}'(\mathcal{C}) = \{\varphi, \varphi^2 \dots, \varphi^{p-1}\}$, где p — некоторый простой делитель числа $n - |B|$, φ — перестановка на n, $\mathrm{fix}(\varphi) = B$ и $n \backslash B$ — объединение φ-циклов длины p;

(д) $\mathrm{Sub}(\mathcal{C}) = \{n, B\}$, $\mathrm{Aut}'(\mathcal{C}) = \{\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{p-1}\}$, где p — некоторый простой делитель числа n, а n — объединение φ-циклов длины p, и $\varphi(B) = B$.

Заметим, что ранг любого из перечисленных нижних покрытий $\overline{\mathcal{C}}$ точки $\overline{\mathcal{A}}$ равен 2. Пусть теперь $D = \{d_1, d_2, \dots, d_p\} \subseteq n$ — один из φ-циклов алгебры $\mathcal{A}'$. Рассмотрим алгебру $\mathcal{B} = \langle n; \sigma^*\rangle$ такую, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{B}) = \{n, \{d_1\}, \dots, \{d_p\}\}$ и $\mathrm{Iso}'(\mathcal{B}) = \mathrm{Iso}'(\mathcal{A}')$. Очевидно, что точка $\overline{\mathcal{B}}$ является нижним покрытием точки $\overline{\mathcal{A}}'$ в $\langle ECT_n; \leq\rangle$ и при этом ранг точки $\overline{\mathcal{B}}$ равен $p + 1$. Заметим, что ни одно нижнее покрытие точки $\overline{\mathcal{A}}$ не имеет ранга $p + 1$, что влечет невозможность существования точки $\overline{\mathcal{A}}$ в данном случае.

Случай 2 можно рассматривать аналогично случаю 1. Точка $\overline{\mathcal{A}}$ в данном случае такова, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = \{n, B, B_1\}$, $|B| = |B_1|$, $B \cap B_1 = \varnothing$, $\mathrm{Aut}'(\mathcal{A}) = \varnothing$, так как верхняя валентность и ранг точки $\overline{\mathcal{A}}'$ равны 1 и 2 соответственно. Рассматривая нижнее покрытие точки $\overline{\mathcal{A}}'$ — точку $\overline{\mathcal{B}}$ такую, что

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{B}) = \{n, B, \{d_1\}, \{d_2\}, \dots, \{d_p\}\}, \quad \mathrm{Aut}'(\mathcal{B}) = \{\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{p-1}\},$$

где $\{d_1, d_2, \dots, d_p\}$ — один из φ-циклов алгебры $\mathcal{A}'$, заметим, что ранг точки $\overline{\mathcal{B}}$ равен $p + 2$, в то время как ранг всех возможных нижних покрытий точки $\mathcal{A}$ равен 3. Лемма 6 доказана полностью.

Вернемся теперь к доказательству теоремы, аналогичной теореме 1 для шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$.

Теорема 1′. *Для любого автоморфизма ψ шкалы $\langle ECT_n; \leq\rangle$ и любой точки $\overline{\mathcal{A}} \in I$ имеет место включение $\psi(\overline{\mathcal{A}}) \in I$.*

Доказательство будем вести по индукции аналогично доказательству теоремы 1. Пусть для точек ранга $k < m$ условие теоремы выполнено. Рассмотрим точку $\overline{\mathcal{A}} \in I$ ранга m и автоморфизм ψ шкалы $\langle ECT_n; \leq\rangle$. Пусть $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}'$. Докажем, что $\overline{\mathcal{A}}' \in I$. Предположим, что $\overline{\mathcal{A}}' \notin I$. Аналогично доказательству теоремы 1 заметим, что нижняя полурешетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_1) \backslash \{n\}$ содержит не более одного $\cap$-неразложимого элемента и, значит, либо $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_1) = \{n\}$, либо $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_1) = \{n, B\}$. Отсюда точка $\mathcal{A}'$ имеет один из двух видов:

1) $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}') = \{n\}$, $\mathrm{Aut}'(\mathcal{A}) = \left\{\varphi_1, \varphi_1^2, \dots, \varphi_1^{p-1}\right\}$, где p — простой делитель n, φ_1 — автоморфизм на n и n есть объединение φ_1-циклов длины p;

2) $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}') = \{n, C\}$, $\mathrm{Aut}'(\mathcal{A}) = \left\{\varphi_2, \varphi_2^2, \dots, \varphi_2^{q-1}\right\}$, где q — простой делитель $n - |C|$, φ_2 — автоморфизм на n такой, что $\mathrm{fix}(\varphi_2) = C$, и $n \backslash C$ — объединение φ_2-циклов длины q.

Но в этом случае из леммы 6′ следует, что не существует точки $\overline{\mathcal{A}} \in I$ такой, что $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}'$. Тем самым $\psi(\overline{\mathcal{A}}) \in I$, если $\overline{\mathcal{A}} \in I$, и теорема 1′ доказана.

В заключение отметим остающуюся открытой проблему о существовании нетривиальных автоморфизмов шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$, $\langle ECT_n; \leq\rangle$ при $n > 3$. С учетом доказанной теоремы отрицательный ответ на этот вопрос будет получен, если доказать, что для любой точки $\overline{\mathcal{A}}$ из I не имеет нетривиальных изоморфизмов интервал $\langle I_{\overline{\mathcal{A}}}; \leq \rangle$ шкалы $\langle CT_n; \leq \rangle$, где $I_{\overline{\mathcal{A}}} = \{\overline{\mathcal{B}} \in CT_n \mid \mathrm{Sub}(\mathcal{B}) = \mathrm{Sub}(\mathcal{A})\}$. Исследование же интервала $\langle I_{\overline{\mathcal{A}}}; \leq \rangle$, как отмечено выше, связано, в частности, с описанием решеток инверсных подполугрупп конечных инверсных полугрупп, в том числе решеток подгрупп конечных групп. Заметим также, что шкала $\langle ECT_n; \leq \rangle$ является подпрямым произведением частично упорядоченных множеств $\langle I; \leq \rangle$ и $\langle \mathrm{Sub}(\mathrm{Sym}(n)); \leq \rangle$, где $\mathrm{Sym}(n)$ — группа всех перестановок на множестве n. При этом решетка подгрупп группы $\mathrm{Sym}(n)$ (как частного случая групп Коксетера) не имеет автоморфизмов, отличных от автоморфизмов, индуцированных перестановками n при $n \neq 3$ [11].

Авторы благодарны В. Д. Мазурову за указание на работу [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пинус А. Г.* Об условных термах и тождествах на универсальных алгебрах // Вычислительные системы. 1996. Т. 156. С. 59–78.

2. *Pinus A. G.* Conditional terms and their applications // Algebra: Proc. Intern. algebraic conf of the occasion of the 90th Birthday of A. G. Kurosh. Berlin: Walter de Gruyter, 2000. P. 291–299.

3. *Пинус А. Г.* Условные термы и их приложения в алгебре и в теории вычислений // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 4. С. 37–72.

4. *Пинус А. Г.* Программно вычислимые функции на универсальных алгебрах // Мат. вопросы кибернетики. 2001. Т. 10. С. 235–244.

5. *Пинус А. Г., Журков С. В.* О шкалах потенциалов вычислимости универсальных алгебр // Вычислительные системы. 2002. Т. 169. С. 26–38.

6. *Пинус А. Г., Журков С. В.* О длинах шкал потенциалов вычислимости n-элементных алгебр // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 858–863.

7. *Пинус А. Г., Журков С. В.* Некоторые замечания о шкалах потенциалов вычислимости n-элементных алгебр // Алгебра и теория моделей 3. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. С. 107–113.

8. *Соловьев В. Д.* Автоморфизмы структуры замкнутых классов k-значной логики // Материалы VII междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложения». М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. Т. 1. С. 122–123.

9. *Пинус А. Г.* Исчисление условных тождеств и условно рациональная эквивалентность // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 4. С. 432–459.

10. *Foster A. L., Pixley A. F.* Semi-categorical algebras. I. Semi-primal algebras // Math. Z. 1964. Bd 83, N 2. S. 147–169.

11. *Constantini M.* The group of autoprojectivities of the finite Coxeter groups // J. Algebra. 2002. V. 248. P. 85–106.

Статья поступила 5 августа 2002 г.

Пинус Александр Георгиевич, Журков Сергей Валерьевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
`algebra@nstu.ru`