Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2003. Том 44, № 3

УДК 517.93

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ ВНЕ НЕСКОЛЬКИХ КВАДРАТОВ

Ф. Н. Гарифьянов

Аннотация: Рассматривается совокупность квадратов, построенных по примитивным периодам $1, i$ и достаточно удаленных друг от друга. В окрестности этого множества исследуется четырехэлементное разностное уравнение с постоянными коэффициентами, линейными сдвигами которого являются порождающие преобразования соответствующей двоякопериодической группы и преобразования, обратные к ним. Решение ищется в классе функций, аналитических вне этого множества и исчезающих на бесконечности. Показано, что картина разрешимости существенно зависит не только от подбора коэффициентов, но и от взаимного расположения квадратов.

Ключевые слова: разностные уравнения, метод регуляризации, двоякопериодическая группа

Введение

Рассмотрим совокупность непересекающихся квадратов

$$R = \bigcup_{k=1}^{N} R_k, \tag{1}$$

построенных по примитивным периодам 1 и i. Порождающие преобразования соответствующей двоякопериодической группы и преобразования, обратные к ним, запишем в виде

$$\sigma_m(z) = z + i^m, \quad m = \overline{1,4}. \tag{2}$$

Они переводят точку из внутренности любого квадрата в его внешность. Считаем также, что они не переводят точки из внутренности одного квадрата в замыкание другого.

Займемся исследованием линейного разностного уравнения (л.р.у.) с постоянными коэффициентами

$$(Vf)(z) \equiv \sum_{m=1}^{4} \lambda_{m,k} f[\sigma_m(z)] = g(z), \quad z \in R_k,\ k = \overline{1,N}, \tag{3}$$

где $\lambda_{1,k}\lambda_{3,k} = \lambda_{2,k}\lambda_{4,k} \neq 0$ при любом k. Решение ищем в классе функций f, голоморфных вне R и исчезающих на бесконечности. Ее граничное значение

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00914).

$f^-(t)$ на положительно ориентированной границе $\Gamma = \partial R$ должно удовлетворять условию Гёльдера на каждой открытой стороне l квадратов. В вершинах у нее допускаются самое большее логарифмические особенности. Свободный член кусочно-голоморфен в R (голоморфен в каждом R_k), и его граничное значение $g^+(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера на замыкании любой стороны.

При такой постановке важнейшим фактором, определяющим всю дальнейшую структуру исследования, является несвязность множества

$$B = C \setminus \bigcup_{m=1}^{4} \sigma_m(R).$$

Оно состоит из $N+1$ связных компонент, из которых только одна содержит бесконечно удаленную точку. Между тем уравнение (3) задано на N других компонентах, что и не позволяет применить к нему классические методы исследования операторов свертки (см. [1]). Именно поэтому, в отличие от обычного подхода к теории аналитических решений л.р.у. с постоянными коэффициентами в выбранном классе, здесь решение и свободный член принадлежат, вообще говоря, различным классам голоморфных функций. В частности, свободный член не обязан аналитически продолжаться через какой-либо отрезок границы $\Gamma_k = \partial R_k$. Даже в самом благоприятном в смысле аналитического продолжения случае однородного л.р.у.

$$(Vf)(z) = 0, \quad z \in R, \tag{4}$$

нельзя, вообще говоря, заключить, что оно выполняется и в окрестности бесконечно удаленной точки.

Заметим, что уравнение (4) инвариантно относительно дифференцирования. При $N = 1$ оно может иметь нетривиальные решения в зависимости от соотношений между коэффициентами [2]. Именно это обусловило необходимость наложить дополнительные ограничения на характер краевых значений решения. В противном случае любая производная некоторого решения удовлетворяла бы (4), т. е. фундаментальная система решений (ф.с.р.) содержала бы бесконечное число функций. Предположение о линейной зависимости некоторой системы производных сразу приводит к линейному однородному дифференциальному уравнению конечного порядка с постоянными коэффициентами, любое нетривиальное решение которого (целая функция экспоненциального типа) не принадлежит выбранному классу. Такая ситуация обычна в теории краевых задач для аналитических функций, где число решений и условий разрешимости определяется именно характером граничных значений [3], но не характерна для теории л.р.у. в ранее рассматривавшихся классах аналитических решений.

Впервые подобный подход к л.р.у. был предложен автором в работе [4] (два частных случая уравнения (3) при $N = 1$). В дальнейшем задача обобщалась в различных направлениях, в том числе и на случай переменных коэффициентов, голоморфных в квадрате (см. [5, 6]). Различные приложения, вытекающие из такого подхода, рассмотрены в работах [2, 7].

Как будет показано далее, переход к случаю $N > 1$ приводит к чрезвычайному разнообразию в картине разрешимости уравнения (3). При этом по-прежнему применим метод равносильной регуляризации л.р.у., предложенный в [2]. Но вопрос о вычислении числа условий разрешимости резко усложняется. Поэтому для сокращения весьма громоздких вычислений потребуем, чтобы множество (1) было симметрично относительно начала координат и одна из диагоналей каждого квадрата лежала на биссектрисе первого и третьего координатных углов. Кроме того, квадраты находятся «достаточно далеко» друг от друга.

Основная цель статьи — указать на примере уравнения (3) при $\lambda_{k,m} \equiv 1$ и $N = 2, 3$ те яркие эффекты, которые возникают при переходе к многомерному случаю $N > 1$. Для сравнения приведем результаты исследования соответствующего уравнения при $N = 1$ [4].

Теорема 1. *Уравнение* (3) *разрешимо тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{\Gamma} g^{+}(t) f_0^{-}(t)\, dt = 0.$$

Здесь $f_0(z)$ *— единственное нетривиальное решение однородного уравнения* (4).

Статья состоит из двух параграфов. В § 1 проводится регуляризация л.р.у., исследуются свойства соответствующего интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В § 2 установлено, что при $N = 2$ л.р.у. либо безусловно разрешимо, либо имеет два условия разрешимости. Найдены критерии реализации этих альтернатив. Рассмотрен также случай $N = 3$.

В статье используются следующие обозначения: $\alpha(t) : \Gamma_k \to \Gamma_k^-$ — кусочно-линейный разрывный в вершинах сдвиг, совпадающий на каждой стороне с одним из преобразований (2); $W : \varphi(t) \to \varphi[\alpha(t)]$ — инволютивный оператор сдвига; $\alpha_1(t) : l \to l^-$ — кусочно-линейный сдвиг, разрывный в вершинах и устанавливающий на каждой стороне соответствие между точками, симметричными относительно его середины; W_1 — оператор этого сдвига; $\zeta(z) = \zeta(z; 1, i)$ — квазипериодическая дзета-функция Вейерштрасса; R_0 — квадрат с вершинами $t_1 = -t_3 = 0,5(1+i)$ $t_2 = -t_4 = 0,5(1-i)$ и сторонами l_j, пронумерованными в порядке обхода его границы (l_1 — нижняя сторона); β — наименьшее расстояние между точками соседних квадратов; особый интеграл

$$(F_k\varphi)(t) \equiv \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} \varphi(\tau)\zeta(\tau - t)\, d\tau; \quad t \in \Gamma_k,$$

— понимаемый в смысле главного значения по Коши квазипериодический аналог интеграла типа Коши, двоякопериодический при выполнении условия

$$\int\limits_{\Gamma_k} \varphi(\tau) d\tau = 0. \tag{5}$$

Будем рассматривать на Γ и другой особый интеграл

$$F \equiv \sum_{k=1}^{N} F_k.$$

Функции, удовлетворяющие условию

$$\varphi = W\varphi \quad (\varphi = -W\varphi), \tag{6}$$

будем, как обычно, называть *инвариантными* (*антиинвариантными*). Под кусочной постоянной на R всюду понимается функция, постоянная в каждом R_k.

§ 1. Регуляризация разностного уравнения

Решение л.р.у. представим в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} (\tau - z)^{-1} \varphi(\tau)\, d\tau, \quad z \notin \overline{R}, \tag{7}$$

с неизвестной антиинвариантной плотностью, удовлетворяющей условию Гёльдера на замыкании каждой из сторон. В самом деле, интеграл (7) не изменится, если на произвольном контуре Γ_k его плотность заменить на $\varphi(\tau) + a_k^+(\tau)$, где функция $a_k(z)$ голоморфна в R_k. Условие антиинвариантности рассматриваем как частный случай задачи Карлемана для прямоугольника [8] относительно неизвестной функции $a(z)$, который безусловно разрешим. С учетом представления (7) имеем

$$(3) \Leftrightarrow (A\varphi)(z) \equiv \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} E(\tau - z) \varphi(\tau) d\tau = g(z), \quad z \in R, \tag{8}$$

где ядерная функция

$$E(\tau) = (\tau - 1)^{-1} + (\tau + 1)^{-1} + (\tau + i)^{-1} + (\tau - i)^{-1} \tag{9}$$

нечетна. Справедлив аналог формулы Сохоцкого — Племеля $A^+ = -W + A$, а с учетом антиинвариантности плотности имеем $A^+ = J + A$. Особый интегральный оператор A понимается в смысле главного значения по Коши и получается формальной заменой в (8) переменной z на $t \in \Gamma$.

Займемся регуляризацией функционального уравнения (8). Запишем его в виде $\varphi + A\varphi = g^+$ и возьмем от обеих частей оператор W. Вычитая из полученного уравнения исходное, имеем

$$T\varphi = g^+ - Wg^+, \tag{10}$$

где канонический оператор Фредгольма определен формулой $T = 2J + A + WAW$. Действительно, его ядро

$$K(t, \tau) = E(\tau - t) - E[\alpha(\tau) - \alpha(t)] \tag{11}$$

ограничено на Γ (проверяется непосредственно). Другими словами, операторы A и W антикоммутируют с точностью до компактного слагаемого в целом ряде функциональных пространств (например, в $L_2(\Gamma)$).

Замечание 1. Оператор A обладает тем свойством, что $A^2 = -J + F$, где оператор F компактен. Абстрактная теория таких операторов была впервые построена Г. Н. Агаевым [9]. Ее можно привлечь к исследованию проблемы обращения особого интеграла A [4].

Займемся исследованием однородного уравнения

$$T\varphi = 0. \tag{12}$$

Союзным к нему будет уравнение

$$T'\psi = 0, \tag{13}$$

где $T' = 2J - A - WAW$. Простейшие свойства ф.с.р. уравнений Фредгольма второго рода, ядра которых имеют структуру типа (11), хорошо известны [10]. Ее можно выбрать так, что каждая входящая туда функция либо инвариантна, либо антиинвариантна, либо четна, либо нечетна.

Лемма 1. *Ф.с.р. уравнения* (12) *содержит столько же инвариантных функций, сколько ф.с.р. союзного уравнения содержит антиинвариантных функций.*

Доказательство. Пусть φ — одно из искомых решений уравнения (12), т. е. $4\varphi + A^+\varphi + WA^+\varphi = 0$. Другими словами, функция

$$\psi = 2\varphi + A^+\varphi \tag{14}$$

антиинвариантна. Умножая обе части равенства (14) на множитель $E(t-z)\,dt$ и интегрируя по Γ при $z \in R$, имеем

$$A^+\psi = 2A^+\varphi. \tag{15}$$

С учетом равенств (14) и (15) получим $A^+\psi = 2\psi - 4\varphi$. Возьмем от обеих частей этого равенства оператор W и вычтем из него полученное. В итоге приходим к союзному уравнению (13). Допустим, что таким путем получено тривиальное решение. Тогда $\varphi = \varphi^+$ (см. соотношение (14)) и (14) $\Leftrightarrow 2\varphi = 0$, т. е. пришли к противоречию.

Обратно, если ψ — искомое решение союзного уравнения, то (13) $\Leftrightarrow A^+\psi - WA^+\psi = 4\psi$. Функция $\varphi = 2\psi - A^+\psi$ инвариантна и удовлетворяет уравнению (12), что и завершает доказательство.

Замечание 2. Существен лишь тот факт, что ф.с.р. обоих уравнений содержат одинаковое число решений с соответствующим свойством (6). Вопрос о том, чему же равно это число, не очень интересен, так как произведение двух антиинвариантных функций инвариантно. Поэтому данные решения союзного уравнения не порождают условий разрешимости неоднородного уравнения (10). Можно показать (используя далее полученные результаты), что при «достаточно больших» β таких решений нет вообще. Приводим этот факт без доказательства, поскольку нигде далее он не используется.

Следствие 1. *Ф.с.р. союзного уравнения содержит столько инвариантных функций, сколько ф.с.р. уравнения* (12) *содержит функций с противоположным свойством.*

Всюду в дальнейшем (если это особо не оговорено) под $\varphi(\varphi_j)$ будем понимать антиинвариантные решения уравнения (12), а под $\psi(\psi_j)$ — инвариантные решения союзного уравнения (13).

Так как (13) $\Leftrightarrow A^+\varphi - WA^+\varphi = 0$, (14) $\Leftrightarrow A^+\psi + WA^+\varphi = 0$, то

$$\forall k\ (A\varphi)(z) = c_k,\ z \in R_k, \tag{16}$$

$$(A\psi)(z) = 0,\ z \in R. \tag{17}$$

Кусочные постоянные

$$\psi_j(t) = \delta_{j,k}, \quad t \in \Gamma_k;\ k, j = \overline{1, N}, \tag{18}$$

удовлетворяют по теореме Коши функциональному уравнению (17), т. е. являются решениями союзного уравнения.

Теорема 2. *Ф.с.р. союзного уравнения при достаточно больших β содержит ровно N инвариантных функций* (*кусочных постоянных* (18)).

Доказательство разобьем на два этапа ввиду его громоздкости. Предварительно обозначим через L_1 (L_2) множество горизонтальных (вертикальных) сторон Γ. Через $\widetilde{C}(\Gamma)$ обозначим множество непрерывных на замыкании каждой из сторон функций с естественным образом определенной нормой $\|\varphi\| = \max|\varphi(\tau)|$, $\tau \in \Gamma$. Оператор T считаем действующим на этом банаховом пространстве. Очевидно, что $\varphi \in C^\infty(\bar{l})$.

Лемма 2. *Если*

$$\int\limits_{l} \varphi(\tau)d\tau = 0 \tag{19}$$

для любого $l \in L_1$, *то* $\varphi \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $M = \|\varphi\|$. Здесь возможны два случая.

(а) $M = |\varphi(t)|$, где $t \in L_1$. Без ограничения общности считаем, что t принадлежит a_1 (нижней стороне некоторого квадрата). Оценим интегральное слагаемое в формуле (12). При $\tau \in a_1$ имеем $K(t,\tau) = 0$. При τ, принадлежащем a_3 (противоположной стороне), получим $\alpha(\tau)-\alpha(t) = \tau-t-2i$. Для сокращения записи введем обозначение $\omega(a) = (\tau - t + a)^{-1}$. Тогда

$$K(t,\tau) = \omega(1) + \omega(-1) + \omega(i) - \omega(1-2i) - \omega(-1-2i) - \omega(-3i).$$

Поскольку $\tau - t = i + \theta$, $\theta \in [-1,1]$, то $K(t,\tau) = -4iq(\theta^2)$, где

$$q(\gamma) = (\gamma+2)(\gamma^2+4)^{-1} + (\gamma+4)^{-1}. \tag{20}$$

При соответствующем подборе чисто мнимой постоянной λ имеем $|K(t,\tau) - \lambda| < 0,22$, так как $3 \le 4q < 3,44$.

Пусть $\tau \in a_2$. Здесь

$$\alpha(\tau) = \tau - 1, \quad K(t,\tau) = \omega(1) + \omega(i) - \omega(-2-i) - \omega(-1-2i).$$

Справедливы очевидные оценки

$$|\omega(1) - \omega(-1-2i)| \le \sqrt{2}, \quad |\omega(i) - \omega(-2-i)| \le \sqrt{2},$$

вытекающие из равенства

$$\tau - t = 0,5(1+i) + i\alpha + \mu; \quad |\alpha| < 0,5, \quad |\mu| < 0,5.$$

Точно такие же оценки в силу симметрии имеют место и при $\tau \in a_4$. Кроме того,

$$\lim_{\beta\to\infty} K(t,\tau) = 0, \quad t \in \Gamma_k,\ \tau \in \Gamma_j,\ k \ne j. \tag{21}$$

Остается заметить, что $2\sqrt{2} + 0,22 < 2\pi$, и с учетом равенства (21) получим $M = 0$.

(б) $M = |\varphi(t)|$, $t \in L_2$. Не ограничивая общности считаем, что $t \in a_2$. Если $\tau \in a_2$, то $K(t,\tau) = 0$. При $\tau \in a_4$ ранее получена оценка $|K(t,\tau)| < 3,44$ (см. случай (а)).

Пусть $\tau \in a_1$, т. е.

$$K(t,\tau) = \omega(-1) + \omega(-i) - \omega(i+2) - \omega(2i+1).$$

Правая часть этого равенства зависит только от разности переменных τ и t, т. е. можно считать, что они лежат соответственно на сторонах l_1 и l_2 квадрата R_0 (см. введение). «Подправим» первое слагаемое, пользуясь условием (19), таким образом, что

$$(\tau-t-1)^{-1} + \left(t+1+\frac{i}{2}\right)^{-1} = \left(\tau+\frac{i}{2}\right)(\tau-t-1)^{-1}\left(t+1+\frac{i}{2}\right)^{-1}.$$

Модуль произведения в правой части не превосходит $\frac{1}{3}$. Применяя подобный прием к трем другим слагаемым в выражении для ядра («подправляем» слагаемыми, зависящими только от t так, чтобы возникал множитель $\tau+\frac{i}{2}$), получим следующие оценки для их модулей: $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{\sqrt{5}}{5}$. Итак, для подправленного ядра K_1 имеем оценку

$$|K_1| < 1,566. \tag{22}$$

В силу симметрии подобная оценка справедлива и при $\tau \in a_3$. К сожалению, полученные неравенства недостаточно точны и не позволяют применить принцип сжимающих отображений. Здесь нужны более тонкие рассуждения. Если точка t отлична от середины l_2, то одна из сторон l_1 и l_3 является от нее более удаленной. Произведем пересчет ранее полученных оценок для модулей «подправленных» слагаемых с учетом этого обстоятельства. При этом точку t считаем именно серединой стороны, поскольку этот случай наихудший. Тогда получим оценки $\frac{\sqrt{2}}{5}$, $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{2}}{5}$, $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$ соответственно. Вместо неравенства (22) теперь имеем $|K_1| < 1,058$, и это неравенство справедливо хотя бы для одной из сторон a_1 и a_3. Поскольку $3,44 + 1,566 + 1,058 < 2\pi$, с учетом соотношения (21) доказательство завершено.

Очевидно, что в условии леммы L_1 можно заменить на L_2, а φ на ψ.

Для окончания доказательства теоремы 1 теперь достаточно предположить, что ф.с.р. союзного уравнения содержит не менее $N+1$ инвариантных функций. Но тогда некоторое нетривиальное решение удовлетворяет условиям леммы 2, так что сразу приходим к противоречию.

Следствие 2. *Неоднородное уравнение* (10) *безусловно разрешимо.*

Следствие 3. *Пусть $N = 2k$. Тогда ф.с.р. уравнения* (12) *содержит k четных и k нечетных антиинвариантных функций. При $N = 2k + 1$ ф.с.р. содержит k четных и $k + 1$ нечетных антиинвариантных функций.*

Действительно, $R_0 \subset R$ только при нечетном N. Для четной антиинвариантной функции, определенной на Γ_0, справедливо равенство (19) для любой стороны $l \in \Gamma_0$.

Лемма 3. *Пусть φ — антиинвариантное решение однородного уравнения* (16) ($c_k \equiv 0$), *удовлетворяющее на любом контуре условию* (5). *Тогда $\varphi \equiv 0$.*

Доказательство. Рассмотрим инвариантную функцию, определенную на каждом контуре Γ_k формулой $\psi = F_k\varphi$. Поскольку справедлив аналог формулы Сохоцкого $\psi^+ = \varphi - W\varphi + \psi$ (с учетом антиинвариантности в данном случае $\psi = \psi^+ - 2\varphi$), такая функция — решение союзного уравнения (13). При этом она отлична от кусочной постоянной, так как в противном случае на любом контуре имели бы $\varphi = \varphi^+$, что в сочетании с антиинвариантностью сразу приводит к равенству $\varphi \equiv 0$. Но тогда пришли к противоречию с теоремой 2 и доказательство завершено.

Лемма 4. *Пусть φ — решение уравнения* (16), *удовлетворяющее условию*

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi(\tau)d\tau = 0. \tag{23}$$

Тогда функция $\psi = F\varphi$ удовлетворяет уравнению

$$(T^{'}\psi)(t) = -4Nc_k; \quad t \in \Gamma_k,\ k = \overline{1,N}. \tag{24}$$

Доказательство. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что

$$(A\psi)(z) = -2Nc_k, \quad z \in R_k.$$

Для этого используем нечетность ядерной функции (9) и дзета-функции Вейерштрасса. Кроме того, ядро $E(\tau - z)$ голоморфно по τ в $\overline{R}_k$ при фиксированном $z \in R$ и $F_k a^+ = a^+ + W a^+$, если функция $a(z)$ голоморфна в $\overline{R}_k$.

Замечание 3. В случае однородного уравнения (16) построенная функция ψ может оказаться и тривиальным решением союзного уравнения.

§ 2. Исследование случаев $N = 2, 3$

Перейдем к рассмотрению частного случая $N = 2$. Ф.с.р. уравнения (12) содержит две антиинвариантных функции, одна из которых (φ_1) нечетна, а другая (φ_2) четна. Для первой из них в равенстве (16) имеем $c_k = a(-1)^k$, а для второй $c_k \equiv c$. После соответствующей нормировки решений для чисел a и c возможны только два значения: 0 и 1.

Лемма 5. *Величины a и c равны.*

Доказательство. Предположим для определенности, что $a = 0$ и $c = 1$. Запишем одно из уравнений (16) с помощью аналога формулы Сохоцкого в виде $\varphi_2 + A\varphi_2 = 1$. Умножим его на φ_1 и проинтегрируем по Γ, изменяя порядок интегрирования и используя кососимметричность ядра. В итоге с учетом нечетности для функции $\varphi = \varphi_1$ имеем (23) $\Rightarrow$ (5), $k = 1, 2$.

Отсюда по лемме 3 получим $\varphi_1 \equiv 0$. Пришли к противоречию. Точно так же доказывается, что невозможен и другой случай $a = 1$ и $c = 0$. Теперь осуществим обратный переход от интегрального уравнения (10) к л.р.у. Существование антиинвариантного решения φ уравнения (10) в случае его разрешимости доказывается рассуждениями, полностью аналогичными проведенным в [10, § 4]. Для такого решения имеем уравнение

$$(A\varphi)(z) = g(z) + c_z, \quad z \in R, \tag{25}$$

отличающееся от исходного соотношения (8) наличием в правой части кусочной постоянной c_z.

Теорема 3. *Если $a = c = 1$, то л.р.у. (3) безусловно разрешимо (первый случай). Если $a = c = 0$, то оно имеет два условия разрешимости (второй случай):*

$$\int\limits_{\Gamma} g^+(t)\varphi_k(t)dt = 0. \tag{26}$$

Ф.с.р однородного л.р.у. (4) во втором случае содержит интегралы типа Коши (7) с плотностями φ_1 и φ_1.

Действительно, в первом случае всегда возможно так подправить решение уравнения (25) решениями уравнения (16), что (25) $\Rightarrow$ (8). Во втором случае условия разрешимости (26) получаются, если уравнение $\varphi(t) + (A\varphi)(t) = g^+(t) + c_t$ умножать соответственно на φ_1 и φ_2, а потом интегрировать по Γ.

Замечание 4. В условиях разрешимости (26) плотности интегралов типа Коши можно заменить граничными значениями самих интегралов (нетривиальных решений однородного л.р.у.).

Замечание 5. Если выполнен второй случай, то ни для какой из функций φ_1 и φ_2 не может выполняться условие (5) (см. лемму 3). Для первого случая оно, наоборот, выполняется для любой из этих двух функций на произвольном контуре Γ_k (см. альтернативу Фредгольма для уравнения (24)).

Оказывается, что даже условие достаточной удаленности квадратов друг от друга не может обеспечить однозначной картины разрешимости л.р.у. (3). Другими словами, могут реализовываться оба случая теоремы 3. Соответствующий критерий вытекает из двух следующих теорем.

Теорема 4. *Если $R_1 \not\equiv R_2 \operatorname{mod}(1, i)$, то справедлив первый случай.*

Доказательство. Допустим противное и воспользуемся леммой 4 для особого интеграла $\psi = F\varphi_2$, инвариантного из-за четной плотности. С учетом теоремы 2 сразу заключаем, что четная функция ψ тождественна c. Так как квадраты не конгруэнтны, то отсюда $2\varphi_2 = \psi^+ - c$, если только отбросить конечное число конгруэнтных точек из множества Г. Тогда функция φ_2 кусочно-голоморфна внутри каждого из квадратов (голоморфна внутри любого из четырех прямоугольников, составляющих в совокупности данный квадрат, общая вершина которых конгруэнтна вершинам другого квадрата). Условие антиинвариантности позволяет доопределить ее в комплексной плоскости как кусочно-голоморфную функцию, разрывную на счетном множестве прямых, не проходящих через вершины квадратов. В таком случае $\varphi_2 \in C(\Gamma)$. Ее производная является (с точностью до постоянного множителя) нечетным решением φ_1. Это проверяется интегрированием по частям интеграла в левой части уравнения (16) при $\varphi = \varphi_2'$ с учетом очевидного соотношения $\partial E/\partial\tau = -\partial E/\partial z$. Подчеркнем, что непрерывная и антиинвариантная кусочная постоянная на Г может быть лишь тождественным нулем, т. е. $\varphi_2' \not\equiv 0$. В силу непрерывности φ_2 и нечетности ее производной для $\varphi = \varphi_1$ имеем (23) $\Rightarrow$ (5), $k = 1, 2$, т. е. по лемме 3 $\varphi_2' \equiv 0$. Пришли к противоречию, т. е. ψ отлична от постоянной, а это, в свою очередь, противоречит теореме 2.

Теорема 5. *Если квадраты конгруэнтны, то справедлив второй случай.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть $\psi = F\varphi_1$. Этот интеграл инвариантен (см. замечание 4) и удовлетворяет уравнению (24) при $c_k = (-1)^k$, причем принимает равные значения в любых четырех конгруэнтных точках из множества Г. Поскольку он и нечетен, то на любой стороне

$$\psi = -W_1\psi. \tag{27}$$

Возьмем от обеих частей уравнения (24) оператор W_1 с учетом (27) и полученное уравнение вычтем из исходного. В итоге придем к однородному уравнению $(4I - AW - WA + W_1AW + W_1WA)\psi = 0$. Так как (27) $\Rightarrow$ (19), то из оценок, полученных при доказательстве леммы 2, имеем $\psi \equiv 0$, что противоречит неоднородности уравнения (24). Доказательство завершено.

Эти результаты справедливы, если, например, $\beta > 100$ (см. оценки в доказательстве леммы 2 и соотношение (21)).

Пусть $N = 3$, причем $R_3 \equiv R_0$. Ф.с.р. уравнения (16) содержит две нечетные функции φ_1, φ_3 и четную функцию φ_2 (см. следствие 3). Возможны два случая.

1. $R_1 \equiv R_2 \operatorname{mod}(1, i)$. Уравнение (16) разрешимо в классе антиинвариантных функций лишь при $c_k \equiv 0$ (см. доказательство теоремы 5). При этом используем симметричность квадрата R_0 относительно начала координат и наличие нечетного нетривиального решения φ, удовлетворяющего условию (23). В силу леммы 3

$$\int\limits_\Gamma \varphi_m(\tau)d\tau = \delta_{1,m}, \quad m = \overline{1,3}; \quad \int\limits_{\Gamma_1} \varphi_2(\tau)d\tau \neq 0. \tag{28}$$

Итак, разностное уравнение (3) имеет три условия разрешимости (26).

2. $R_1 \not\equiv R_2 \,\mathrm{mod}(1, i)$. Тогда

$$(A\varphi_m)(z) = c_{m,k}, \quad z \in R_k;\ k = \overline{0,2},$$

где $c_{1,k} \equiv 0$, $c_{2,k} \not\equiv 0$ — четная кусочная постоянная, $c_{3,k} = (-1)^k - \delta_{0,k}$ (см. доказательство теоремы 4). При этом первое из соотношений (28) выполняется, а второе нет. Разностное уравнение имеет единственное условие разрешимости (26), где $k = 1$.

Замечание 6. Разумеется, при других коэффициентах уравнения (1) подобного рода эффектов, зависящих от наличия конгруэнтных квадратов, может и не быть. Например, если $\lambda_{k,m} = (-1)^m, k = \overline{1, N}$, то л.р.у. (3) при достаточно больших β безусловно разрешимо и имеет единственное решение. Доказательство полностью идентично проведенному ранее в случае $N = 1$ [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
2. *Гарифьянов Ф. Н.* Трансформации биортогональных систем и некоторые их приложения. II // Изв. Вузов. Математика. 1996. № 8. С. 13–24.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
4. *Гарифьянов Ф. Н.* Проблема обращения особого интеграла и разностные уравнения для функций, аналитических вне квадрата // Изв. вузов. Математика. 1993. № 7. С. 7–16.
5. *Гарифьянов Ф. Н.* О регуляризации некоторых разностных уравнений // Актуальные проблемы математического анализа. Ростов-на-Дону: Гинго, 2000. С. 67–72.
6. *Гарифьянов Ф. Н.* О регуляризации одного класса разностных уравнений // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 1012–1017.
7. *Гарифьянов Ф. Н.* Моменты Стильтьеса целых функций экспоненциального типа // Мат. заметки. 2000. Т. 67. С. 674–679.
8. *Чибрикова Л. И.* О граничных задачах для прямоугольника // Уч. зап. Казанск. ун-та. 1964. Т. 123, № 9. С. 15–30.
9. *Агаев Г. Н.* К теории сингулярного уравнения в пространствах Банаха // Тр. Ин-та физики и математики АН АзССР. Сер. мат. 1959. Т. 8. С. 23–27.
10. *Аксентьева Е. П., Гарифьянов Ф. Н.* К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана // Изв. вузов. Математика. 1983. № 4. С. 43–51.

Статья поступила 29 октября 2002 г.

Гарифьянов Фархат Нургаязович
Казанский гос. энергетический университет, кафедра высшей математики,
ул. Красносельская, 51, Казань 420066