Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2003. Том 44, № 3

УДК 512.54

ОБ УПОРЯДОЧЕНИИ ГРУПП С НИЛЬПОТЕНТНЫМ КОММУТАНТОМ

В. В. Блудов, Е. С. Лапшина

Аннотация: Рассматриваются вопросы упорядочения групп с нильпотентным коммутантом. Доказано, что всякая группа с нильпотентным коммутантом, имеющая абелеву нормальную подгруппу, фактор по которой нильпотентен, доупорядочиваема тогда и только тогда, когда она без Г-кручения. Построен пример неупорядочиваемой группы без Г-кручения с двуступенно нильпотентным коммутантом, показывающий, что в общем случае в многообразии групп с нильпотентным коммутантом отсутствие в группе Г-кручения не является достаточным условием ее упорядочиваемости.

Ключевые слова: упорядочиваемые группы, доупорядочиваемые группы

Введение

Необходимым условием упорядочиваемости (доупорядочиваемости) группы является отсутствие в группе Г-кручения. То, что это условие не является достаточным, показано в серии примеров (см., например, [1]). Однако для (локально) нильпотентных групп уже отсутствие кручения является необходимым и достаточным условием упорядочиваемости [1, 2], а для метабелевых групп [2] и даже для центральных (гиперцентральных) расширений метабелевых групп [1] необходимым и достаточным условием упорядочиваемости как раз является отсутствие в группе Г-кручения. При этом до сих пор не было известно ни одного примера неупорядочиваемой группы без Г-кручения, принадлежащей многообразию $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$ групп с нильпотентным коммутантом. Отметим также, что если свободная группа некоторого многообразия доупорядочиваема, то отсутствие в группе Г-кручения также является необходимым и достаточным условием упорядочиваемости (доупорядочиваемости) для каждой группы из этого многообразия. Пока известно только одно многообразие групп, в котором существуют упорядочиваемые, но недоупорядочиваемые группы, и в то же время всякая группа без Г-кручения является упорядочиваемой — это многообразие центральных расширений метабелевых групп [1]. Хотя это многообразие и содержится в многообразии $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$, последнее таким свойством не обладает — пример неупорядочиваемой группы без Г-кручения из многообразия $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$ построен в настоящей работе (пример 3.1).

Что касается вопросов, связанных с доупорядочиваемостью, то известно, что если некоторое многообразие $\mathfrak{M}$ раскладывается в произведение двух нетривиальных многообразий: $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$, и при этом многообразие $\mathfrak{M}_1$ содержит некоммутативные группы, то нециклические свободные группы многообразия $\mathfrak{M}$ недоупорядочиваемы [2, гл. 4, § 1, следствие 4]. Тем самым нециклические свободные группы многообразий $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$, $c > 1$, недоупорядочиваемы. Будут ли доупорядочиваемы свободные группы многообразий $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_k$, $k > 1$, пока неизвестно. Отметим только, что до настоящего времени были известны только два примера многообразий, чьи свободные группы доупорядочиваемы. Это многообразие нильпотентных групп любой заданной ступени нильпотентности и многообразие метабелевых групп (см. [1, 2]). Поскольку многообразие $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_k \cap \mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$ содержит как многообразие метабелевых, так и многообразие нильпотентных групп, то естественно возникают вопросы об упорядочиваемости и доупорядочиваемости групп без Г-кручения из этого многообразия. Эти вопросы решены положительно в настоящей работе (теорема 2.2), и, как сообщил авторам А. Ремтулла во время подготовки рукописи к печати, им совместно с П. Лонгобарди и М. Май также получена теорема о доупорядочиваемости групп без Г-кручения из многообразия $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_k \cap \mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$ [3]. Еще один результат, представленный в настоящей работе, — нильпотентность по Мальцеву мультипликативной полугруппы кольца эндоморфизмов нормальной абелевой подгруппы $A \leq G$, порожденного внутренними автоморфизмами группы G, при условии, что G/A и G' нильпотентны (теорема 2.1).

§ 1. Предварительные сведения и обозначения

В основном в работе используются стандартные обозначения и определения теории групп [4, 5]. Все необходимые сведения по теории упорядочиваемых групп можно найти в книгах [1, 2]. Напомним некоторые из них:

— группа называется *доупорядочиваемой*, если любой ее частичный порядок продолжается до линейного, а подгруппа H группы G называется *G-доупорядочиваемой*, если любой максимальный порядок группы G индуцирует на H линейный порядок.

— элемент g группы G называется *Г-периодическим* (или *G-периодическим*), если найдется набор элементов $h_1, \dots, h_n \in G$ такой, что $g^{h_1+\dots+h_n} = 1$. Если в группе G нет нетривиальных Г-периодических элементов, то говорят, что G есть *группа без Г-кручения*.

В следующем утверждении через $S_G(a)$ обозначается инвариантная в группе G подполугруппа, порожденная элементом $a \in G$.

Утверждение 1.1 [2, гл. II, § 1, следствие 3]. *Подгруппа H группы G без Г-кручения G-доупорядочиваема тогда и только тогда, когда ее элементы удовлетворяют условию:*

$$\text{если } b, c \in S_G(a), \text{ то } S_G(b) \cap S_G(c) \neq \varnothing. \qquad (O^*)$$

Утверждение 1.2 (А. И. Кокорин, В. М. Копытов [2, гл. VI, § 1, следствие 5]). *Если фактор-группа G/H группы G по инвариантной G-доупорядочиваемой подгруппе H — гиперцентральная группа без кручения, то группа G доупорядочиваема.*

Напомним определение нильпотентной полугруппы, приведенное в работе А. И. Мальцева [6]. Пусть x, y, $u_1, \dots, u_n, \dots$ — произвольные переменные. Полагаем $X_0 = x$, $Y_0 = y$ и далее по индукции

$$X_{n+1} = X_n u_{n+1} Y_n, \quad Y_{n+1} = Y_n u_{n+1} X_n. \qquad (1.1)$$

Определение 1.3. Полугруппа H, элементы которой удовлетворяют тождеству $X_n = Y_n$, называется *n-ступенно нильпотентной*.

Если G — группа, то определение 1.3 эквивалентно обычному определению нильпотентности [5]. Отметим, что полугруппы с тождеством $x^n = 0$, т. е. нильпотентные полугруппы в классическом смысле, будут нильпотентны и по определению 1.3. Но в нашей работе классическое определение нильпотентной полугруппы не используется и всюду в дальнейшем под нильпотентной полугруппой понимается полугруппа, удовлетворяющая определению 1.3.

Известно, что эндоморфизмы абелевой группы A образуют кольцо End A с естественными операциями сложения и умножения (см. [5]):

$$a^{\alpha+\beta} = a^\alpha + a^\beta, \quad a^{\alpha\beta} = (a^\alpha)^\beta, \quad a \in A,\ \alpha, \beta \in \mathrm{End}\ A.$$

В случае, когда абелева группа A является нормальной подгруппой некоторой группы G, внутренние автоморфизмы группы G индуцируют автоморфизмы группы A:

$$g : a \mapsto a^g, \quad a \in A,\ g \in G. \tag{1.2}$$

Подкольцо кольца End A, порожденное всеми автоморфизмами (1.2), будем обозначать через $\mathrm{End}(G, A)$. Произвольный элемент $u \in \mathrm{End}(G, A)$ представляется (в общем случае неоднозначно) в виде

$$u = n_1 g_1 + \dots , n_k g_k, \quad n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z},\ g_1, \dots, g_k \in G,\ k \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Напомним определение нижнего центрального ряда группы G:

$$\gamma_1(G) = G, \quad \gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G].$$

Если $\gamma_{n+1}(G) = \{1\}$, то группа G нильпотентна и ее ступень нильпотентности не превосходит n.

Определим ряд идеалов $\mathrm{End}_n(G, A)$ кольца $\mathrm{End}(G, A)$, полагая $\mathrm{End}_0(G, A) = \mathrm{End}(G, A)$, а при $n > 0$ пусть $\mathrm{End}_n(G, A)$ — идеал, порожденный элементами вида

$$(d_{1,i_1} - 1) \cdot \ldots \cdot (d_{k,i_k} - 1), \quad d_{j,i_j} \in \gamma_{i_j+1}(G), \tag{1.4}$$

где $k \geq 1$, $1 \leq i_1, \dots, i_k$, $i_1 + \dots + i_k \geq n$.

Ввиду того, что $(d_{j,i_j} - 1)g = g\bigl(d^g_{j,i_j} - 1\bigr)$ и $d^g_{j,i_j} \in \gamma_{i_j+1}(G)$, с учетом (1.3) произвольный элемент $u \in \mathrm{End}_n(G, A)$ представляется в виде

$$u = m_1 h_1 w_1 + \dots + m_s h_s w_s, \tag{1.5}$$

где $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}$, $h_1, \dots, h_s \in G$, $w_1, \dots, w_s \in \mathrm{End}_n(G, A)$ — элементы вида (1.4).

Лемма 1.4. *Если $x \in \mathrm{End}_n(G, A)$, $y \in \mathrm{End}(G, A)$, то $xy - yx \in \mathrm{End}_{n+1}(G, A)$.*

Доказательство. Если $g, f \in G$, то для соответствующих автоморфизмов группы A имеем $gf - fg = fg([g, f] - 1) \in \mathrm{End}_1(G, A)$. Если, кроме того, $f \in \gamma_{n+1}(G)$, то

$$\begin{aligned} g(f-1) - (f-1)g &= g(f-1) - g(f^g - 1) \\ &= g(f-1) - g(f[f,g] - f + f - 1) = gf([f,g] - 1) \in \mathrm{End}_{n+1}(G, A), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} h(d_{1,i_1} - 1) \cdot \ldots \cdot (d_{k,i_k} - 1)g &\equiv h(d_{1,i_1} - 1) \cdot \ldots \cdot g(d_{k,i_k} - 1) \equiv \dots \\ &\equiv gh(d_{1,i_1} - 1) \cdot \ldots \cdot (d_{k,i_k} - 1) \pmod{\mathrm{End}_{i_1+\dots+i_k+1}(G, A)}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Пусть $u \in \mathrm{End}_n(G, A)$ представлен в виде (1.5), $v \in \mathrm{End}(G, A)$ представлен в виде (1.3), тогда $uv - vu$ является суммой слагаемых $n_i m_j (h_i w_i g_j - g_j h_i w_i)$, каждое из которых принадлежит $\mathrm{End}_{n+1}(G, A)$ ввиду (1.6).

§ 2. Доупорядочиваемость групп без Г-кручения из многообразия $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}\mathfrak{N}_k$

В этом параграфе доказывается, что всякая группа без Г-кручения из многообразия $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_k \cap \mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$ доупорядочиваема и, следовательно, упорядочиваема. Если рассматривать группы только из одного многообразия $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_k$, то уже в многообразии $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$ существуют неупорядочиваемые группы без Г-кручения (пример 3.1), а для многообразия $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_k$ вопрос о существовании неупорядочиваемых групп без Г-кручения остается открытым.

Предварительно доказываем теорему о нильпотентности мультипликативной полугруппы кольца эндоморфизмов $\operatorname{End}(G,A)$ (см. определения в § 1).

Теорема 2.1. *Пусть A — нормальная абелева подгруппа группы G и фактор-группа G/A нильпотентна ступени q. Если коммутант группы G нильпотентен ступени c, то $\operatorname{End}_{cq+1}(G,A) = 0$ и мультипликативная полугруппа кольца $\operatorname{End}(G,A)$ нильпотентна ступени не выше $cq+1$.*

Доказательство. Поскольку элементы идеала $\operatorname{End}_{cq+1}(G,A)$ представляются в виде (1.5), достаточно показать, что всякий $w \in \operatorname{End}_{cq+1}(G,A)$, представленный в виде (1.4), равен нулю. Если хотя бы для одного d_{j,i_j} из представления (1.4) $i_j > q$, то $d_{j,i_j} \in \gamma_{q+1}(G)$ и элемент d_{j,i_j} представляет тождественный автоморфизм группы A, поэтому $d_{j,i_j} - 1 = 0$, а с ним и $w = 0$. Если для всех d_{j,i_j} из представления (1.4) $i_j \le q$, то, поскольку $i_1 + \dots + i_k \ge cq+1$, имеем $k > c$. Поэтому

$$a^w = a^{(d_{1,i_1}-1)\cdot\ldots\cdot(d_{k,i_k}-1)} = [a, d_{1,i_1}, \dots, d_{k,i_k}] \in \gamma_k(G') \le \gamma_{c+1}(G') = 1$$

и w — нулевой эндоморфизм.

Теперь проверим, что мультипликативная полугруппа кольца $\operatorname{End}(G,A)$ нильпотентна и ее ступень нильпотентности не превосходит $cq+1$. Пусть $x = n_1g_1 + \dots + n_sg_s$, $y = m_1h_1 + \dots + m_th_t$, $u_i = k_{i,1}f_{i,1} + \dots + k_{i,r_i}f_{i,r_i}$ — элементы кольца $\operatorname{End}(G,A)$, представленные в виде (1.3). Построим X_n, Y_n по формулам (1.1) и индукцией по n покажем, что $X_n - Y_n \in \operatorname{End}_n(G,A)$. Имеем $X_1 = xu_1y$, $Y_1 = yu_1x$ и

$$\begin{aligned} X_1 - Y_1 = xu_1y - yu_1x = xu_1y - xyu_1 + xyu_1 - yu_1x \\ = x(u_1y - yu_1) + x(yu_1) - (yu_1)x \in \operatorname{End}_1(G,A). \end{aligned}$$

Пусть $X_n - Y_n \in \operatorname{End}_n(G,A)$, тогда $X_{n+1} = X_nu_{n+1}Y_n$, $Y_{n+1} = Y_nu_{n+1}X_n$ и, используя лемму 1.4, получаем

$$\begin{aligned} X_{n+1} - Y_{n+1} &= X_nu_{n+1}Y_n - Y_nu_{n+1}X_n \\ &= X_nu_{n+1}Y_n - X_nY_nu_{n+1} + X_nY_nu_{n+1} - Y_nu_{n+1}X_n \\ &= X_n(u_{n+1}Y_n - Y_nu_{n+1}) + X_n(Y_nu_{n+1}) - (Y_nu_{n+1})X_n \in \operatorname{End}_{n+1}(G,A). \end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{End}_{cq+1}(G,A) = 0$, то $X_{cq+1} = Y_{cq+1}$ и мультипликативная полугруппа кольца $\operatorname{End}(G,A)$ нильпотентна ступени не выше $cq+1$.

Теорема 2.2. *Группа G из многообразия $\mathfrak{A}N_k \cap \mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$ доупорядочиваема тогда и только тогда, когда она без Г-кручения.*

Доказательство. Известно, что всякая упорядочиваемая группа не имеет Г-кручения [1, 2]. Покажем, что группа G из указанного в теореме многообразия доупорядочиваема, если она без Г-кручения. Пусть A — нормальная абелева подгруппа группы G и фактор-группа G/A нильпотентна. Поскольку в группах без Г-кручения изолятор нормальной абелевой подгруппы также нормальная абелева подгруппа [2], то, не нарушая общности, можно считать, что G/A — нильпотентная группа без кручения. В силу утверждений 1.1 и 1.2 достаточно показать, что элементы подгруппы A удовлетворяют условию (O^*). Пусть $b, c \in S_G(a)$, тогда $b = a^{g_1+\dots+g_n}$, $c = a^{h_1+\dots+h_k}$ для подходящих $g_i, h_j \in G$. В этом случае элементы b и c являются образами элемента a относительно эндоморфизмов $v = g_1+\dots+g_k$ и $w = h_1+\dots+h_s$ соответственно. По теореме 2.1 мультипликативная полугруппа кольца эндоморфизмов $\mathrm{End}(G, A)$ удовлетворяет для подходящего n тождеству $X_n = Y_n$, определенному по формуле (1.1). Но тогда и всякая подполугруппа, в частности подполугруппа $\mathrm{End}(G, A)^*$, порожденная эндоморфизмами $n_1f_1 + \dots + n_mf_m$, $f_i \in G$, с положительными коэффициентами n_i, $i = 1, \dots, m$, также удовлетворяет тождеству $X_n = Y_n$. Положим $X_0 = v$, $Y_0 = w$ и получим согласно (1.1), что X_n начинается с v, а Y_n с w, т. е. $X_n = vv_1$, $Y_n = ww_1$ для подходящих $v_1, w_1 \in \mathrm{End}(G, A)^*$. А это означает, что

$$b^{v_1} = a^{vv_1} = a^{X_n} = a^{Y_n} = a^{ww_1} = c^{w_1}$$

и условие (O^*) выполняется.

§ 3. Пример неупорядочиваемой группы

В этом параграфе приводится пример неупорядочиваемой группы без Г-кручения из многообразия групп с двуступенно нильпотентным коммутантом.

Пример 3.1. Пусть N — свободная двуступенно нильпотентная группа с множеством свободных порождающих a, b, c_i, $i \in \mathbb{Z}$. Элементы $a^{-1}[b, c_1]$, $b^{-1}[a, c_1]^{-1}$, c_i, $i \in \mathbb{Z}$, также свободно порождают группу N, поэтому N допускает автоморфизм $d : N \to N$, продолжающий отображение

$$a^d = a^{-1}[b, c_1]^{-1}, \quad b^d = b^{-1}[a, c_1], \quad c_i^d = c_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

Из формулы (3.1) непосредственно следует, что

$$c_i^{d^n} = c_{i+n}, \tag{3.2}$$

$$[a, c_i]^{d^n} = [a, c_{i+n}]^{(-1)^n}, \quad [b, c_i]^{d^n} = [b, c_{i+n}]^{(-1)^n} \tag{3.3}$$

для любых целых i, n.

Индукцией по n из формул (3.1)–(3.3) для положительных n получаем

$$a^{d^n} = a^{(-1)^n}([b, c_1][b, c_2]\cdots[b, c_n])^{(-1)^n}, \quad i \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Пусть $N\lambda\langle d\rangle$ — полупрямое произведение группы N на бесконечную циклическую группу $\langle d\rangle$ и $H = \langle [a, b], [c_i, c_j] \mid i, j \in \mathbb{Z}\rangle < N\lambda\langle d\rangle$. В силу (3.1) H — нормальная подгруппа группы $N\lambda\langle d\rangle$. Фактор-группу $(N\lambda\langle d\rangle)/H$ обозначим через G и покажем, что группа G является неупорядочиваемой группой без Г-кручения из многообразия групп с двуступенно нильпотентным коммутантом.

По построению группы $N\lambda\langle d\rangle$ ее коммутант нильпотентен ступени два, а потому и коммутант G' фактор-группы G нильпотентен ступени не выше двух. Поскольку G' неабелев, то он двуступенно нильпотентен.

Как известно (см., например, [4, 5]), в полупрямом произведении $N\lambda\langle d\rangle$ произвольный элемент g имеет однозначное представление вида

$$g = hd^n, \quad h \in N, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.5}$$

а в свободной нильпотентной группе N произвольный элемент h имеет однозначное представление вида

$$h = u \cdot [a, c_{i_1}]^{m_{i_1}} \cdots [a, c_{i_r}]^{m_{i_r}} \cdot [b, c_{j_1}]^{n_{j_1}} \cdots [b, c_{j_s}]^{n_{j_s}} \cdot a^{p_1} b^{p_2} c_{k_1}^{q_{k_1}} \cdots c_{k_t}^{q_{k_t}}, \tag{3.6}$$

где u — произведение коммутаторов $[a, b]$ и $[c_i, c_j]$, а индексы и показатели — целые числа. Причем для любого целочисленного набора индексов и показателей представления (3.5) и (3.6) определяют некоторый элемент групп $N\lambda\langle d\rangle$ и N соответственно. Из (3.5), (3.6) и определения подгруппы H следует, что произвольный элемент $g \in G$ однозначно представляется в виде

$$[a, c_{i_r}]^{m_{i_r}} \cdot [b, c_{j_1}]^{n_{j_1}} \cdots [b, c_{j_s}]^{n_{j_s}} \cdot a^{p_1} b^{p_2} c_{k_1}^{q_{k_1}} \cdots c_{k_t}^{q_{k_t}} \cdot d^n \tag{3.7}$$

и для любого целочисленного набора индексов и показателей представление (3.7) определяет некоторый элемент группы G. Для обозначения элементов группы G мы используем те же символы, что и для элементов группы $N\lambda\langle d\rangle$; это не вызывает путаницы ввиду представлений (3.5) и (3.6). Из определения групп N, H и автоморфизма d группы N получаем определяющие соотношения группы G:

$$\begin{gathered} [a, b] = [c_i, c_j] = 1, \\ [a, c_i, a] = [a, c_i, b] = [a, c_i, c_j] = [b, c_i, a] = [b, c_i, b] = [b, c_i, c_j] = 1, \\ aa^d[b, c_1] = 1, \quad bb^d[a, c_1]^{-1} = 1, \quad c_i^d c_{i+1}^{-1} = 1, \quad i, j \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Покажем, что группа G не допускает никакого линейного упорядочения. Предположим противное: существует порядок $\le$, при котором $\langle G, \le\rangle$ — линейно упорядоченная группа. В силу (3.7) $a \ne 1$ в группе G. Если $a > 1$, то по формуле (3.1) $a^d = a^{-1}[b, c_1] > 1$ и $[b, c_1] > a > 1$; если же $a < 1$, то $a^d = a^{-1}[b, c_1] < 1$ и $1 < a^{-1} < [b, c_1]^{-1}$. В любом случае $|a| < |[b, c_1]|$. Аналогично получаем, что $|b| < |[a, c_1]|$. По построению группы G элементы a, b и c_1 порождают нильпотентную подгруппу, а для любых элементов x и y нильпотентных линейно упорядоченных групп справедливо неравенство $|[x, y]| \ll |x|$. Поэтому получаем противоречие: $|a| < |[b, c_1]| \ll |b| < |[a, c_1]| \ll |a|$.

Проверим, что группа G не имеет Г-кручения. Из представления (3.7) следует, что группа G допускает гомоморфизм на сплетение двух бесконечных циклических групп $\langle c_0\rangle \wr \langle d\rangle$ с ядром $K = \langle a, b, [a, c_i], [b, c_j] \mid i, j \in \mathbb{Z}\rangle$. Поскольку сплетение бесконечных циклических групп упорядочиваемо, то оно не имеет Г-кручения. Следовательно, Г-периодические элементы группы G должны принадлежать подгруппе K и потому имеют вид

$$g = [a, c_{i_1}]^{m_{i_1}} \cdots [a, c_{i_r}]^{m_{i_r}} \cdot [b, c_{j_1}]^{n_{j_1}} \cdots [b, c_{j_s}]^{n_{j_s}} \cdot a^{p_1} b^{p_2}. \tag{3.9}$$

Предположим, что для элемента $g \in K$, представленного в виде (3.9), найдутся $h_1, \dots, h_t \in G$ такие, что

$$g^{h_1 + \dots + h_t} = 1. \tag{3.10}$$

Если элементы a и b не входят явно в представление (3.9), т. е. $p_1 = p_2 = 0$, то ввиду перестановочности элементов a, b и c с коммутаторами $[a, c_i]$, $[b, c_j]$ можно считать, что элементы h_i, $i = 1, \dots, t$, в формуле (3.10) имеют вид $h_i = d^{n_i}$. Но в этом случае элементы $[a, c_i]$, $[b, c_j]$ и d порождают подгруппу, изоморфную сплетению $\langle [a, c_0], [b, c_0]\rangle \wr \langle d\rangle$ двух упорядочиваемых групп, и поэтому g не может быть нетривиальным Г-периодическим элементом.

Пусть теперь в представлении (3.9) элемента g будет $p_1^2 + p_2^2 \ne 0$. Ввиду перестановочности элементов a и b друг с другом и с коммутаторами $[a, c_i]$,

$[b, c_j]$ можно считать, что элементы h_i, $i = 1, \dots, t$, в формуле (3.10) имеют вид $h_i = v_i d^{n_i}$, где $v_i \in \langle c_j \mid j \in \mathbb{Z}\rangle$. Заметим, что группа G допускает автоморфизм $\varphi : G \to G$, продолжающий отображение

$$\varphi : a \mapsto b \mapsto a^{-1}, \quad c_i \mapsto c_i, \quad d \mapsto d,$$

поскольку φ переводит множество порождающих группы G в множество порождающих и согласован с определяющими соотношениями (3.8) группы G:

$$[a, b]^{\varphi} = [b, a^{-1}] = 1, \quad [c_i, c_j]^{\varphi} = [c_i, c_j] = 1, \dots,$$

$$(aa^d[b, c_1])^{\varphi} = bb^d[a^{-1}, c_1] = bb^d[a, c_1]^{-1} = 1,$$

$$(bb^d[a, c_1]^{-1})^{\varphi} = a^{-1}a^{-d}[b, c_1]^{-1} = (aa^d[b, c_1])^{-1} = 1,$$

$$(c_i^d c_{i+1}^{-1})^{\varphi} = c_i^d c_{i+1}^{-1} = 1.$$

Под действием φ элементы $h_i = v_i d^{n_i}$ остаются на месте, а элемент g переходит в элемент

$$g^{\varphi} = u \cdot a^{-p_2} b^{p_1}, \tag{3.11}$$

где u — некоторое произведение коммутаторов $[a, c_i]$, $[b, c_i]$. Отсюда

$$(g^{h_1 + \dots + h_t})^{\varphi} = (u \cdot a^{-p_2} b^{p_1})^{h_1 + \dots + h_n} = 1.$$

Возведя последнее равенство в степень $-p_2$ и перемножив с равенством (3.10), возведенным в степень p_1, получим

$$(w \cdot a^k)^{h_1 + \dots + h_t} = 1, \tag{3.12}$$

где $k = p_1^2 + p_2^2 \neq 0$, а w — некоторое произведение коммутаторов $[a, c_i]$, $[b, c_i]$.

Для упрощения дальнейших вычислений рассмотрим равенство (3.12) в фактор-группе $\overline{G}$ группы G по подгруппе, порожденной элементами $[a, c_i]$, $i \in \mathbb{Z}$. В группе $\overline{G}$ элементы a и c_i, $i \in \mathbb{Z}$, перестановочны, поэтому можно считать, что элементы h_i в формуле (3.12) имеют вид $h_i = d^{n_i}$, а

$$w = [b, c_{j_1}]^{m_1} \cdots [b, c_{j_s}]^{m_s}, \quad s \geq 1, \ j_1 < \dots < j_s, \tag{3.13}$$

и если $w \neq 1$, то $m_1, m_s \neq 0$ (при $s = 1$ формула (3.13) читается как $w = [b, c_{j_1}]^{m_1}$, и m_s в этом случае совпадает с m_1). Для элементов $w \in \langle [b, c_i] \mid i \in \mathbb{Z}\rangle$, представленных в виде (3.13), коммутаторы $[b, c_{j_1}]$ и $[b, c_{j_s}]$ будем называть младшими и старшими сомножителями соответственно. Сопрягая равенство (3.12) подходящей степенью элемента d, перепишем его в виде

$$(w \cdot a^k)^{n_0 + n_1 d + \dots + n_q d^q} = 1, \quad q \geq 0, \ n_0, n_q > 0, \ n_1, \dots, n_{q-1} \geq 0.$$

Полученное равенство эквивалентно равенству

$$a^{kn_0 + \dots + kn_q d^q} = w^{-(n_0 + n_1 d + \dots + n_q d^q)}. \tag{3.14}$$

Подсчитав $a^{kn_0 + kn_1 d + \dots + kn_q d^q}$ по формулам (3.4), получим

$$a^{kn_0 + kn_1 d + \dots + kn_q d^q} = a^{k(n_0 - n_1 + \dots + (-1)^q n_q)} w_1,$$

где

$$w_1 = [b, c_1]^{k(-n_1 + n_2 + \dots + (-1)^q n_q)} [b, c_2]^{k(n_2 + \dots + (-1)^q n_q)} \cdots [b, c_q]^{(-1)^q k n_q}. \tag{3.15}$$

Так как $kn_q \neq 0$, старший сомножитель в представлении (3.13) элемента w_1 равен $[b, c_q]$. В силу того, что в правой части равенства (3.14) элемент a встречается с нулевым показателем, имеем $n_0 - n_1 + \cdots + (-1)^q n_q = 0$, откуда $-n_1 + \cdots + (-1)^q n_q = -n_0 \neq 0$ и младший сомножитель в представлении (3.13) элемента w_1 равен $[b, c_1]$. Подсчитав младший и старший сомножители в правой части равенства (3.14), получим $[b, c_{j_1}]$, $[b, c_{j_s+q}]$ соответственно. Поскольку $\langle [b, c_i] \mid i \in \mathbb{Z} \rangle$ — свободная абелева группа, младший и старший сомножители левой и правой частей равенства (3.14) совпадают. Но тогда $j_1 = 1$, а $j_s + q = q$, откуда $j_s = 0$ и $j_1 > j_s$; противоречие с представлением (3.13). Таким образом, равенство (3.12) не выполняется в группе $\overline{G}$ и тем более в группе G. Следовательно, и в этом случае в группе G нет нетривиальных Γ-периодических элементов.

Пример построен, и тем самым доказано

Утверждение 3.2. *В многообразии групп с нильпотентным коммутантом существуют неупорядочиваемые группы без Γ-кручения.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mura R., Rhemtulla A. H.* Orderable groups. New York; Basel: Marcel Dekker, 1977.
2. *Кокорин А. И., Копытов В. М.* Линейно упорядоченные группы. М.: Наука, 1972.
3. *Longobardi P., Maj M., Rhemtulla A. H.* On solvable R^*-groups // J. Group Theory (to appear).
4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1996.
5. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
6. *Мальцев А. И.* Нильпотентные полугруппы // Избранные труды. М.: Наука, 1976. Т. I. С. 335–339.

Статья поступила 5 марта 2002 г.

Блудов Василий Васильевич
Иркутский гос. университет, ул. К. Маркса, 1, Иркутск 664003
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
bludov@math.isu.ru

Лапшина Елена Сергеевна
Иркутский гос. педагогический университет,
Нижняя набережная, 6, Иркутск 664003
lapshina_elena@mail.ru