Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2003. Том 44, № 3

УДК 517.9:514.7

ОЦЕНКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СНОСОМ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Ю. Н. Бернацкая

Аннотация: Для параболического уравнения со сносом на римановом многообразии неположительной кривизны построено фундаментальное решение. Получены оценки этого фундаментального решения в зависимости от условий на поле сноса.

Ключевые слова: фундаментальное решение, риманово многообразие, оператор Лапласа — Бельтрами, векторное поле

§ 1. Введение

В статье будет рассматриваться параболическое уравнение со сносом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\Delta\, u + \langle \operatorname{grad} u, b(x)\rangle, \tag{1}$$

определенное на полном односвязном римановом многообразии $\mathscr{M}$ размерности n, где Δ — оператор Лапласа — Бельтрами, который через ортобазис $\{e_k\}$ в $T_x\mathscr{M}$ определяется следующим образом:

$$\Delta\, u \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad} u = \sum_k \langle \nabla_{e_k} \operatorname{grad} u, e_k\rangle.$$

Поле сноса $b(x)$ является векторным полем на $\mathscr{M}$. Следует заметить, что уравнение (1) представляет собой параболическое уравнение с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + b^k(x) \frac{\partial u}{\partial x^k}. \tag{2}$$

В монографии [1] показано, что уравнение вида (2) можно рассматривать на многообразии, порожденном невырожденной матрицей диффузии a_{ij} так, что метрический тензор многообразия определяется следующей формулой: $g_{ij}(x) = a_{ij}(x) \equiv [a^{ij}(x)]^{-1}$. Преимущество перехода от $\mathbb{R}^n$ к многообразию заключается в возможности получить быстрее сходящуюся процедуру построения фундаментального решения.

Традиционно фундаментальное решение $p^R(t,x,y)$ уравнения (2) ищется методом параметрикса (см. [2]), согласно которому

$$p^R(t,x,y) = q^R(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} q^R(t-\tau,x,z) r^R(\tau,z,y)\, dz,$$

где

$$q^R(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}\sqrt{\det(a_{ij}(x))}} \exp\left\{-\frac{a_{ij}(x)(x^i-y^i)(x^j-y^j)}{2t}\right\},$$

а функция $r^R(t,x,y)$ удовлетворяет уравнению Вольтерра

$$r^R(t,x,y) = M^R(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} M^R(t-\tau,x,z) r^R(\tau,z,y)\, dz.$$

Невязка $M^R(t,x,y)$ получается при подстановке в уравнение (2) начального приближения $q^R(t,x,y)$:

$$M^R(t,x,y) = \frac{1}{2} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 q^R}{\partial x^i \partial x^j} + b^k(x) \frac{\partial q^R}{\partial x^k} - \frac{\partial q^R}{\partial t}.$$

Уравнение Вольтерра решается методом итераций, а функция $r^R(t,x,y)$ и члены образующего ее ряда $\sum\limits_k r_k^R(t,x,y)$ оцениваются такими выражениями:

$$|r_k^R(t,x,y)| \le \frac{C_0 C^k}{\Gamma(k\alpha) t^{(n+2-2k\alpha)/2}} \exp\left\{-\frac{\lambda_1^*|x-y|^2}{2t}\right\},$$

$$|r^R(t,x,y)| \le \frac{\mathrm{const}}{t^{(n+2-\alpha)/2}} \exp\left\{-\frac{\lambda_1^*|x-y|^2}{2t}\right\}, \tag{3}$$

где α — показатель Гёльдера функций $a_{ij}(x)$, а $\lambda_1^* < \lambda_1$, где число λ_1 взято из условия эллиптичности матрицы a_{ij}:

$$\lambda_1 |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \le \lambda_2 |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Фундаментальное решение (1) можно построить исходя из фундаментального решения $p_0(t,x,y)$ (ядра теплопроводности) уравнения без сноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\Delta\, u, \tag{4}$$

которое будем называть *невозмущенным.* Уравнение (1) соответственно будем называть *возмущенным.* В [3] при определенных условиях на многообразие $\mathscr{M}$ (см. ниже) ядро невозмущенного уравнения строится методом параметрикса с начальным приближением функцией

$$m(t,x,y) = q(t,x,y) \exp\left\{-\frac{\phi(x,y)}{2}\right\},$$

где

$$q(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\rho^2(x,y)}{2t}\right\},$$

$\rho(x,y)$ — метрика в $\mathscr{M}$, а функция $\phi(x,y)$ определяется в терминах базисных полей Якоби $Z_k(\rho)$ [4]:

$$\phi(x,y) = \int\limits_0^{\rho(x,y)} \frac{a(\varphi(s),y)}{s}\, ds, \quad a(\varphi(\rho),y) = \sum_k \langle \rho Z_k'(\rho) - Z_k(\rho), Z_k(\rho)\rangle.$$

Фундаментальное решение представляется суммой

$$p_0(t,x,y) = m(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} m(t-\tau,x,z) r(\tau,z,y) \sigma(dz),$$

где функция $r(t,x,y)$ — решение уравнения Вольтерра

$$r(t,x,y) = M(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} M(t-\tau,x,z) r(\tau,z,y)\, \sigma(dz), \tag{5}$$

$M(t,x,y)$ — невязка уравнения (4) при начальном приближении $m(t,x,y)$.

Условия на многообразие $\mathscr{M}$, при которых указанным выше способом можно построить фундаментальное решение невозмущенного уравнения, формулируются в терминах тензора кривизны $R(x)$ [3, 4]:

(1a) $\langle R(x)(U,V)U,V\rangle \geq 0$ для всех $x \in \mathscr{M}$, $U,V \in T_x\mathscr{M}$, т. е. секционная кривизна многообразия неположительна;

(1b) для произвольных ортобазисов $\{e_k\}$, $\{h_k\}$ в $T_x\mathscr{M}$

$$\sum_k |\langle R(x)(U,e_k)V,h_k\rangle| \leq c\sqrt{\operatorname{Ric}(x)(U,U)\operatorname{Ric}(x)(V,V)},$$

а константа c не зависит от x;

(1c) вдоль любой геодезической γ скалярная кривизна убывает достаточно быстро, т. е. $\int\limits_0^\infty s r(\gamma(s))\, ds < c$, где c не зависит от γ;

(1d) ковариантные производные тензора кривизны удовлетворяют оценкам

$$\|(\nabla_{X(s)}R)(\varphi(s))(Y(s),\dot\varphi(s))Z(s)\| \leq f_1(\varphi(s))\|X(s)\|\cdot\|Y(s)\|\cdot\|Z(s)\|,$$

$$\|\nabla_{U(s)}\nabla_{X(s)}R(\varphi(s))(Y(s),\dot\varphi(s))Z(s)\| \leq f_2(\varphi(s))\|X(s)\|\cdot\|Y(s)\|\cdot\|Z(s)\|\cdot\|U(s)\|,$$

где функции f_1, f_2 такие, что вдоль любой геодезической γ выполняется неравенство $\int\limits_0^\infty s^2 f_k(\gamma(s))\, ds < c$ и c не зависит от γ.

Тензор Риччи и скалярная кривизна вводятся соответственно с помощью формул (отличаются от общепринятых знаком)

$$\operatorname{Ric}(x)(U,V) = \sum_{k=1}^n \langle R(x)(U,e_k)V,e_k\rangle, \quad r(x) = \operatorname{tr}\operatorname{Ric}(x).$$

При этих условиях интегральное уравнение (5) имеет единственное решение, удовлетворяющее оценке [3]

$$|r_k(t,x,y)| < \frac{c^k t^k}{k!} q(t,x,y), \quad |r(t,x,y)| < ce^{ct}q(t,x,y),$$

где c — некоторая константа. Эта оценка, очевидно, лучше (3) за счет скорости сходимости ряда $\sum\limits_k r_k(t,x,y)$. Ядро теплопроводности оценивается выражением

$$p_0(t,x,y) \leq e^{ct}q(t,x,y).$$

В [5] при выполнении условий (1a)–(1d) получено представление для градиента ядра теплопроводности:

$$\operatorname{grad} p_0(t,x,y) = \left(\frac{\rho(x,y)}{t} e(x,y) + w(t,x,y)\right) p_0(t,x,y), \tag{6}$$

где векторное поле $w(t,x,y)$ ограничено, пусть $\|w(t,x,y)\| \leq c_1$.

Также имеет место следующий результат [6].

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия* (1a)–(1d). *Тогда для фундаментального решения* $p_0(t,x,y)$ *уравнения* (4) *для всех* $t>0$, x, $y\in\mathscr{M}$ *справедлива двусторонняя оценка*

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}b(x,y)-kt\right\}\le\frac{p_0(t,x,y)}{q(t,x,y)}\le 1,$$

где k *— константа, а*

$$b(x,y)=\int\limits_0^{\rho}(\rho-s)\,\mathrm{Ric}(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol\gamma}(s),\dot{\boldsymbol\gamma}(s))\,ds.$$

В дальнейшем будем использовать аппарат базисных полей Якоби.

Определение. *Базисными полями Якоби вдоль геодезической* γ, $\gamma(0)=y$, $\gamma(\rho)=x$, называются n решений $Z_1(s),\ldots,Z_n(s)$ уравнения Якоби

$$Z''(s)=R(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol\gamma}(s),Z(s))\dot{\boldsymbol\gamma}(s),$$

где $Z'(s)=\nabla_{\dot{\boldsymbol\gamma}(s)}Z(s)$, такие, что $Z_k(0)=0$, $Z_k(\rho)$ образуют в $T_x\mathscr{M}$ полугеодезический ортобазис (т. е. $Z_1(s)=\frac{s}{\rho}\dot{\boldsymbol\gamma}(s)$, $Z_k(s)\perp\dot{\boldsymbol\gamma}(s)$).

Отметим, что при такой параметризации геодезической $e(x,y)=-\dot{\boldsymbol\gamma}(x)$.

Замечание 1. Вообще говоря, краевая задача для уравнения Якоби не всегда однозначно разрешима: достаточным условием однозначной разрешимости является неположительность кривизны $\mathscr{M}$.

Замечание 2. Для $0<s<\rho$ базисные поля Якоби образуют базис в $T_{\gamma(s)}\mathscr{M}$.

Определим некоторые свойства полей Якоби [4]. Из неположительности кривизны следует выпуклость вниз функции $\|Z(s)\|$, т. е. имеет место

Утверждение 2. *Если* $\mathscr{M}$ *удовлетворяет условию* (1a) *и* $Z(0)=0$, *то выполнены неравенства*

$$\|Z'(0)\|\le\frac{\|Z(\tau)\|}{\tau}\le\frac{\|Z(s)\|}{s},\quad 0<\tau<s,$$

$$s^2\|Z'(s)\|^2\ge s\langle Z'(s),Z(s)\rangle\ge\|Z(s)\|^2.$$

Из свойств базисных полей Якоби следует также

Утверждение 3. *Пусть* $\mathscr{M}$ *удовлетворяет* (1a) *и* (1c). *Рассмотрим интеграл* $\int\limits_{\mathscr{M}}f(y)\sigma(dy)$, *где* σ *— объем на многообразии,* f *— интегрируемая на* $\mathscr{M}$ *функция. Тогда замена* $y=\mathrm{Exp}_x U$, $U=\rho(x,y)e(x,y)$ *приводит к равенству*

$$\int\limits_{\mathscr{M}}f(y)\sigma(dy)=\int\limits_{T_x\mathscr{M}}f(\mathrm{Exp}_x U)J(x,U)\sigma_x(dU),$$

где σ_x *— объем на* $T_x\mathscr{M}$, *а якобиан* J *удовлетворяет оценкам* $1\le J(x,U)<c$.

Утверждение 4. *Пусть на многообразии неположительной кривизны поля Якоби* $X(s)\perp\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)$, $Z(s)\perp\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)$, $X(0) = Z(0) = 0$, $\|Z(\rho)\| = 1$. *Тогда имеет место представление*

$$\nabla_X Z(s) = -\langle X'(s), Z(s)\rangle\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) + H(s),$$

где $H(s)\perp\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ *и справедлива оценка*

$$\|H(s)\| \le (\rho - s)\int\limits_0^\rho \|f(\tau, X(\tau), Z(\tau))\|\,d\tau,$$

векторное поле f *определяется формулой*

$$\begin{aligned} f(s, X(s), Z(s)) &= 2R(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), X(s))Z'(s) + 2R(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), Z(s))X'(s) \\ &+ (\nabla_X R)(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), Z(s))\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) + (\nabla_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}} R)(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), X(s))Z(s). \end{aligned}$$

Построенное фундаментальное решение $p_0(t,x,y)$ является решением уравнения на многообразии без сноса, которое отвечает уравнению в $\mathbb{R}^n$ (2) со специальным сносом $b^k(x) = \Gamma^i_{ij}(x)g^{jk}(x)$. В данной работе построение фундаментального решения расширено на уравнения с произвольным сносом. В первом разделе фундаментальное решение построено исходя из простейшего начального приближения в виде $p_0(t,x,y)$, во втором — начальное приближение выбрано в виде $p_0(t,x,y)e^{\psi(x,y)}$, где

$$\psi(x,y) = -\int\limits_0^{\rho(x,y)} \langle b(\gamma(s)), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)\rangle\,ds.$$

§ 2. Построение фундаментального решения при простейшем начальном приближении

Пусть $m(t,x,y)$ — начальное приближение. Фундаментальное решение возмущенного уравнения (1) будем искать в виде

$$p(t,x,y) = m(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} m(t-\tau, x, z) r(\tau, z, y)\,\sigma(dz),$$

где функция $r(t,x,y)$ определяется уравнением Вольтерра

$$r(t,x,y) = M(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} M(t-\tau, x, z) r(\tau, z, y)\,\sigma(dz),$$

$M(t,x,y)$ — невязка уравнения (1) при выбранном начальном приближении. Функция $r(t,x,y)$ ищется методом итераций в виде ряда

$$r(t,x,y) = r_0(t,x,y) + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t,x,y), \quad r_0(t,x,y) = M(t,x,y),$$

$$r_k(t,x,y) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} M(t-\tau, x, z) r_{k-1}(\tau, z, y)\,\sigma(dz).$$

Рассмотрим сначала простейший вариант начального приближения — ядро теплопроводности невозмущенного уравнения: $m(t,x,y) = p_0(t,x,y)$, невязка которого, очевидно, равна

$$M(t,x,y) = \frac{1}{2}\,\Delta\, p_0 + \langle \operatorname{grad} p_0, b(x)\rangle - \frac{\partial p_0}{\partial t} = \langle \operatorname{grad} p_0(t,x,y), b(x)\rangle.$$

Воспользуемся представлением (6) для градиента фундаментального решения. При условии, что поле сноса $b(x)$ ограничено: $\|b(x)\| \le c_2$, невязка оценивается таким выражением:

$$|M(t,x,y)| \le c_2 \left(\frac{\rho(x,y)}{t} + c_1\right) p_0(t,x,y).$$

Согласно утверждению 1

$$p_0(t,x,y) \le q(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\rho^2(x,y)}{2t}\right\},$$

тогда из неравенства $u^n e^{-u} \le e^{-(1-\varepsilon)u}$ следует, что

$$|M(t,x,y)| \le \frac{\sqrt{2}c_2}{\sqrt{t}} \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left\{-(1-\varepsilon)\frac{\rho^2(x,y)}{2t}\right\} \triangleq \frac{\sqrt{2}c_2}{\sqrt{t}} q_\varepsilon(t,x,y).$$

Оценка функции $r(t,x,y)$ и скорости сходимости образующего ее ряда дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1a)–(1d) *на многообразии* $\mathscr{M}$ *и поле сноса уравнения* (1) *ограничено:* $\|b(x)\| \le c_2$. *Тогда имеют место оценки*

$$|r_k(t,x,y)| \le c_2\sqrt{2\pi}\frac{\tilde{c}^k t^{(k-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} q_\varepsilon(t,x,y),$$

$$|r(t,x,y)| \le c_2\sqrt{2\pi} q_\varepsilon(t,x,y) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{c}^k t^{(k-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)},$$

$$p(t,x,y) \le (1-\varepsilon)^{n/2} q_\varepsilon(t,x,y) \left(e^{\tilde{c}^2 t}\left(\tilde{c}\sqrt{t}+1\right) + \frac{1}{(1-\varepsilon)^{n/2}} - 1\right),$$

где $\tilde{c} = \frac{cc_2\sqrt{2\pi}}{(1-\varepsilon)^{n/2}}$.

Доказательство. Оценим первую итерацию:

$$|r_1(t,x,y)| = \left|\int_0^t d\tau \int_{\mathscr{M}} M(t-\tau,x,z)M(\tau,z,y)\,\sigma(dz)\right|$$

$$\le (\sqrt{2}c_2)^2 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)\tau}} \int_{\mathscr{M}} q_\varepsilon(t-\tau,x,z) q_\varepsilon(\tau,z,y)\,\sigma(dz)$$

$$= \frac{(\sqrt{2}c_2)^2}{(2\pi)^n} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)\tau}} \int_{\mathscr{M}} \frac{\exp\left\{-(1-\varepsilon)\frac{\rho^2(x,z)}{2(t-\tau)} - (1-\varepsilon)\frac{\rho^2(z,y)}{2\tau}\right\}}{(t-\tau)^{n/2}\tau^{n/2}}\,\sigma(dz).$$

Сделаем замену

$$U = \sqrt{\frac{t}{\tau(t-\tau)}}\rho(x,z)e(x,z) - \sqrt{\frac{t-\tau}{t\tau}}\rho(x,y)e(x,y),$$

$$z(U) = \operatorname{Exp}\left[\sqrt{\frac{\tau(t-\tau)}{t}}U + \frac{t-\tau}{t}\rho(x,y)e(x,y)\right], \tag{7}$$

$$\sigma(dz) = \left(\frac{\tau(t-\tau)}{t}\right)^{n/2} J(z,U)\,dU,$$

где якобиан $J(z,U)$ ограничен константой c. Тогда выражение в аргументе экспоненты преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\rho^2(x,z)}{2(t-\tau)} - \frac{\rho^2(z,y)}{2\tau} \pm \frac{\|U\|^2}{2} \\
&\qquad = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{t}{\tau(t-\tau)}}\rho(x,z)e(x,z) - \sqrt{\frac{t-\tau}{t\tau}}\rho(x,y)e(x,y)\right)^2 \\
&-\frac{\|U\|^2}{2} - \frac{\rho^2(x,z)}{2(t-\tau)} - \frac{\rho^2(z,y)}{2\tau} = -\frac{\|U\|^2}{2} - \frac{\rho^2(x,y)}{2t} - \frac{1}{2\tau}(\rho^2(z,y) - \rho^2(x,z) \\
&\qquad - \rho^2(x,y) + 2\rho(x,z)\rho(x,y)\langle e(x,z), e(x,y)\rangle) \le -\frac{\|U\|^2}{2} - \frac{\rho^2(x,y)}{2t},
\end{aligned}$$

поскольку согласно неравенству теоремы косинусов на многообразии неположительной кривизны выражение в скобках больше нуля. Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
|r_1(t,x,y)| &\le \frac{(\sqrt{2}c_2)^2}{(2\pi)^{n/2}} q_\varepsilon(t,x,y) \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)\tau}} \int_{\mathscr{M}} e^{-(1-\varepsilon)\frac{\|U\|^2}{2}} J(z,U)\,dU \\
&\le \frac{(\sqrt{2}c_2)^2}{(2\pi)^{n/2}} \frac{c\pi}{\Gamma(1)} \left(\frac{2\pi}{(1-\varepsilon)}\right)^{n/2} q_\varepsilon(t,x,y) = \frac{(c_2\sqrt{2\pi})^2 c}{(1-\varepsilon)^{n/2}\Gamma(1)} q_\varepsilon(t,x,y).
\end{aligned}$$

По индукции доказывается, что

$$|r_k(t,x,y)| \le c_2\sqrt{2\pi}\left(\frac{cc_2\sqrt{2\pi}}{(1-\epsilon)^{n/2}}\right)^k \frac{t^{(k-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} q_\varepsilon(t,x,y).$$

Далее,

$$|r(t,x,y)| \le \sum_{k=0}^{\infty} |r_k(t,x,y)| = c_2\sqrt{2\pi} q_\varepsilon(t,x,y) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{c}^k t^{(k-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)},$$

откуда фундаментальное решение оценивается так:

$$\begin{aligned}
p(t,x,y) &= p_0(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathscr{M}} p_0(t-\tau,x,z) r(\tau,z,y)\,\sigma(dz) \\
&\le q_\varepsilon(t,x,y) + c_2\sqrt{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{\mathscr{M}} q_\varepsilon(t-\tau,x,z) q_\varepsilon(\tau,z,y) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{c}^k \tau^{(k-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\,\sigma(dz) \\
&\le q_\varepsilon(t,x,y)\left(1 + cc_2\sqrt{2\pi}\left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tilde{c}^{2l} t^{l+1/2}}{l!} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tilde{c}^{2l+1} t^{l+1}}{(l+1)!}\right]\right) \\
&= (1-\varepsilon)^{n/2} q_\varepsilon(t,x,y)\left(e^{\tilde{c}^2 t}\left(\tilde{c}\sqrt{t}+1\right) + \frac{1}{(1-\varepsilon)^{n/2}} - 1\right).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 3. Построение фундаментального решения при более точном начальном приближении

Возьмем в качестве начального приближения функцию

$$m(t,x,y)=p_0(t,x,y)e^{\psi(x,y)}, \quad \text{где} \quad \psi(x,y)=-\int\limits_0^{\rho(x,y)}\langle b(\gamma(s)),\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)\rangle\,ds,$$

γ — геодезическая, соединяющая точки x и y так, что $x=\gamma(\rho)$, $y=\gamma(0)$. Вычислим невязку уравнения (1) при таком начальном приближении:

$$M(t,x,y)=\frac{1}{2}\,\Delta\, m(t,x,y)+\langle\operatorname{grad}_x m(t,x,y),b(x)\rangle-\frac{\partial}{\partial t}m(t,x,y).$$

Очевидно, что

$$\operatorname{grad}_x m(t,x,y)=e^{\psi(x,y)}\operatorname{grad}_x p_0(t,x,y)+p_0(t,x,y)e^{\psi(x,y)}\operatorname{grad}_x\psi(x,y).$$

Вычислим лапласиан:

$$\begin{aligned}\Delta\, m(t,x,y)=\sum_k\langle\nabla_{e_k}\operatorname{grad}_x m(t,x,y),e_k\rangle=e^{\psi(x,y)}\,\Delta\, p_0(t,x,y)\\ +2e^{\psi(x,y)}\langle\operatorname{grad}_x\psi(x,y),\operatorname{grad}_x p_0(t,x,y)\rangle\\ +m(t,x,y)(\|\operatorname{grad}_x\psi(x,y)\|^2+\Delta\,\psi(x,y)).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}M(t,x,y)&=e^{\psi(x,y)}\langle\operatorname{grad}_x p_0(t,x,y),\operatorname{grad}_x\psi(x,y)+b(x)\rangle\\ &\quad+m(t,x,y)\left(\frac{1}{2}\,\Delta\,\psi(x,y)+\frac{1}{2}\|\operatorname{grad}_x\psi(x,y)\|^2+\langle\operatorname{grad}_x\psi(x,y),b(x)\rangle\right).\end{aligned}$$

Чтобы найти производную $\psi(x,y)$ в направлении h, необходимо взять кривую $\alpha(\varepsilon)$ такую, что $\alpha(0)=x$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(0)=h$, и вдоль этой кривой построить вариацию $\varphi(s,\varepsilon)$. Если $h\perp\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\rho)$, то производная определяется так:

$$\begin{aligned}\langle\operatorname{grad}_x\psi(x,y),h\rangle&=\frac{d}{d\varepsilon}\left[-\int\limits_0^{\rho}\langle b(\varphi(s,\varepsilon)),\dot{\boldsymbol{\varphi}}(s,\varepsilon)\rangle ds\right]_{\varepsilon=0}\\ &=-\langle b(x),h\rangle+\int\limits_0^{\rho}\Big(\langle\nabla_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)}b(\gamma(s)),Z(s)\rangle-\langle\nabla_{Z(s)}b(\gamma(s)),\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)\rangle\Big)\,ds,\end{aligned}\tag{8}$$

где $Z(s)=\frac{\partial\varphi(s,\tau+\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}$ — поле Якоби вдоль $\gamma(s)$, порожденное вариацией $\varphi(s,\varepsilon)$, такое, что $Z(0)=0$, $Z(\rho)=h$. Производная в направлении $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(x)$ имеет вид

$$\langle\operatorname{grad}_x\psi(x,y),\dot{\boldsymbol{\gamma}}(x)\rangle=\frac{d}{d\varepsilon}\left[-\int\limits_0^{\rho+\varepsilon}\langle b(\gamma(s)),\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)\rangle\,ds\right]_{\varepsilon=0}=-\langle b(x),\dot{\boldsymbol{\gamma}}(x)\rangle.\tag{9}$$

Рассмотрим первое слагаемое невязки. Учитывая представление (6) градиента ядра теплопроводности и выражение для производной (8), получим

$$\begin{aligned}&\langle\operatorname{grad}_x p_0(t,x,y),\operatorname{grad}_x\psi(x,y)+b(x)\rangle\\ &\quad=\left\langle-\frac{\rho(x,y)}{t}\dot{\boldsymbol{\gamma}}(x)+w(t,x,y),\operatorname{grad}_x\psi(x,y)+b(x)\right\rangle p_0(t,x,y)\\ &\quad=\langle w(t,x,y),\operatorname{grad}_x\psi(x,y)+b(x)\rangle p_0(t,x,y).\end{aligned}$$

Окончательно выражение для невязки принимает вид

$$M(t,x,y) = \langle w(t,x,y), \operatorname{grad}_x \psi(x,y) + b(x)\rangle m(t,x,y) \\ + m(t,x,y)\left(\frac{1}{2}\,\Delta\,\psi(x,y) + \frac{1}{2}\|\operatorname{grad}_x \psi(x,y)\|^2 + \langle \operatorname{grad}_x \psi(x,y), b(x)\rangle\right).$$

Далее представлены оценки полученной невязки при разных условиях на поле $b(x)$: теорема 2 налагает более сильные условия, условия слабее рассмотрены в теореме 3.

3.1. Оценка невязки при сильных ограничениях.

Теорема 2. *Пусть поле* $b(x)$ *удовлетворяет условиям:*

1) *оно ограничено:* $\|b(x)\| \le c_2$,

2) *ковариантная производная для любого векторного поля* $h(x) \in T_x\mathscr{M}$, $\|h\| < c$, *интегрируема вдоль любой геодезической* $\gamma(s)$, *т. е.*

$$\int\limits_0^\rho \|\nabla_{h(\gamma(s))} b(\gamma(s))\|\, ds \le c_3,$$

3) *вторая ковариантная производная для любых векторных полей* $h_1(x)$ *и* $h_2(x) \in T_x\mathscr{M}$, $\|h_1(x)\| < c$, $\|h_2(x)\| < c$, *интегрируема вдоль любой геодезической* $\gamma(s)$*:*

$$\int\limits_0^\rho \|\nabla_{h_1(\gamma(s))}\nabla_{h_2(\gamma(s))} b(\gamma(s))\|\, ds \le c_4.$$

Тогда имеет место оценка

$$|M(t,x,y)| \le \operatorname{const} m(t,x,y).$$

Доказательство. Поскольку $|w(t,x,y)| \le c_1$, а также $\|b(x)\| \le c_2$, первое слагаемое в выражении для невязки оценивается так:

$$|\langle w(t,x,y), \operatorname{grad}_x \psi(x,y) + b(x)\rangle m(t,x,y)| \le c_1(\tilde{c}_2 + c_2) m(t,x,y).$$

Оценку градиента функции $\psi(x,y)$ представим в виде леммы.

Лемма 1. *Если выполнены условия* 1 *и* 2 *теоремы, то*

$$\|\operatorname{grad}_x \psi(x,y)\| \le \operatorname{const}.$$

Доказательство. Разложим $\operatorname{grad}_x \psi(x,y)$ по базису, которым будут базисные поля Якоби $Z_k(s)$, $Z_k(0) = 0$, $Z_k(\rho) = e_k$, определенные вдоль геодезической $\gamma(s)$:

$$\|\operatorname{grad}_x \psi(x,y)\|^2 = \langle \operatorname{grad}_x \psi(x,y), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(x)\rangle^2 + \sum_{k=2}^n \langle \operatorname{grad}_x \psi(x,y), e_k\rangle^2 \\ = \|b(x)\|^2 + \sum_{k=2}^n \left(\int\limits_0^\rho (\langle \nabla_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s)\rangle - \langle \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s))ds\right)^2 \\ - 2\sum_{k=2}^n \langle b(x), e_k\rangle \int\limits_0^\rho (\langle \nabla_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s)\rangle - \langle \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)\rangle)\, ds.$$

В силу выпуклости $\|Z_k(s)\| \le \frac{s}{\rho} \le 1$ имеем

$$\left|\int\limits_0^\rho \langle \nabla_{\dot{\boldsymbol\gamma}(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s)\rangle\, ds\right| \\ \le \int\limits_0^\rho \|\nabla_{\dot{\boldsymbol\gamma}(s)} b(\gamma(s))\| \|Z_k(s)\|\, ds \le \int\limits_0^\rho \|\nabla_{\dot{\boldsymbol\gamma}(s)} b(\gamma(s))\|\, ds \le c_3,$$

$$\left|\int\limits_0^\rho \langle \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), \dot{\boldsymbol\gamma}(s)\rangle ds\right| \\ \le \int\limits_0^\rho \|\nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s))\| \|\dot{\boldsymbol\gamma}(s)\|\, ds \le \int\limits_0^\rho \|\nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s))\|\, ds \le c_3.$$

Тогда

$$\|\operatorname{grad}_x \psi(x,y)\|^2 \le c_2^2 + (n-1)\big(3c_3^2 + 4c_2c_3\big) \triangleq \tilde{c}_2^2,$$

где константа $\tilde{c}_2$ зависит от размерности n многообразия. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если выполнены условия* 2 *и* 3 *теоремы и выполняется условие* (1c) *на скалярную кривизну* $r(x)$, *то*

$$|\,\Delta\,\psi(x,y)| \le \mathrm{const}\,.$$

Доказательство. Найдем выражение для $\Delta\,\psi(x,y)$. По определению

$$\Delta\,\psi(x,y) = \sum_k \langle \nabla_{e_k} \operatorname{grad}_x \psi(x,y), e_k\rangle = \nabla_{\dot{\boldsymbol\gamma}(\rho)} \langle \operatorname{grad}_x \psi(x,y), \dot{\boldsymbol\gamma}(\rho)\rangle \\ + \sum_{k=2}^n (\nabla_{e_k} \langle \operatorname{grad}_x \psi(x,y), e_k\rangle - \langle \operatorname{grad}_x \psi(x,y), \nabla_{e_k} e_k\rangle).$$

Используя найденные выше производные $\psi(x,y)$ (8) и (9), имеем

$$\nabla_{\dot{\boldsymbol\gamma}} \langle \operatorname{grad}_x \psi(x,y), \dot{\boldsymbol\gamma}(x)\rangle = -\nabla_{\dot{\boldsymbol\gamma}} \langle b(x), \dot{\boldsymbol\gamma}(x)\rangle = -\langle \nabla_{\dot{\boldsymbol\gamma}} b(x), \dot{\boldsymbol\gamma}(x)\rangle,$$

$$\nabla_{e_k} \langle \operatorname{grad}_x \psi(x,y), e_k\rangle = -2\langle \nabla_{e_k} b(x), e_k\rangle + \langle Z_k'(\rho), Z_k(\rho)\rangle \langle b(x), \dot{\boldsymbol\gamma}(x)\rangle \\ + \int\limits_0^\rho (\langle \nabla_{Z_k(s)} \nabla_{\dot{\boldsymbol\gamma}(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s)\rangle - \langle Z_k'(s), Z_k(s)\rangle \langle \nabla_{\dot{\boldsymbol\gamma}(s)} b(\gamma(s)), \dot{\boldsymbol\gamma}(s)\rangle \\ + \langle \nabla_{\dot{\boldsymbol\gamma}(s)} b(\gamma(s)), H_k(s)\rangle - \langle \nabla_{Z_k(s)} \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), \dot{\boldsymbol\gamma}(s)\rangle \\ + \langle \nabla_{\dot{\boldsymbol\gamma}(s)} \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s)\rangle)\, ds.$$

Здесь учтены результаты утверждения 4. Далее,

$$\langle \operatorname{grad}_x \psi(x,y), \nabla_{e_k} e_k\rangle = -\langle Z_k'(\rho), Z_k(\rho)\rangle \langle \operatorname{grad}_x \psi(x,y), \dot{\boldsymbol\gamma}(x)\rangle \\ = \langle Z_k'(\rho), Z_k(\rho)\rangle \langle b(x), \dot{\boldsymbol\gamma}(x)\rangle.$$

Тогда

$$\Delta\,\psi(x,y) = -\langle \nabla_{\dot{\boldsymbol\gamma}} b(x), \dot{\boldsymbol\gamma}(x)\rangle - 2\sum_{k=2}^n \langle \nabla_{e_k} b(x), e_k\rangle$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\int\limits_{0}^{\rho}(\langle\nabla_{Z_k(s)}\nabla_{\dot{\gamma}(s)}b(\gamma(s)), Z_k(s)\rangle$$
$$+\langle\nabla_{\dot{\gamma}(s)}\nabla_{Z_k(s)}b(\gamma(s)), Z_k(s)\rangle - \langle\nabla_{Z_k(s)}\nabla_{Z_k(s)}b(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s)\rangle)\,ds$$
$$-\int\limits_{0}^{\rho}\langle\nabla_{\dot{\gamma}(s)}b(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s)\rangle\sum_{k=2}^{n}\langle Z_k'(s), Z_k(s)\rangle ds + \int\limits_{0}^{\rho}\left\langle\nabla_{\dot{\gamma}(s)}b(\gamma(s)), \sum_{k=2}^{n}H_k(s)\right\rangle ds. \tag{10}$$

Из условия интегрируемости ковариантных производных поля $b(x)$ вытекает их ограниченность:

$$\|\nabla_{\dot{\gamma}}b(x)\| \le c_3', \quad \|\nabla_{e_k}b(x)\| \le c_3'.$$

Тогда первые два слагаемых в (10) ограничены. Следующие интегралы оцениваются так:

$$\left|\int\limits_{0}^{\rho}\langle\nabla_{Z_k(s)}\nabla_{\dot{\gamma}(s)}b(\gamma(s)), Z_k(s)\rangle ds\right| \le \int\limits_{0}^{\rho}\|\nabla_{Z_k(s)}\nabla_{\dot{\gamma}(s)}b(\gamma(s))\|\|Z_k(s)\|\,ds \le c_4,$$

$$\left|\int\limits_{0}^{\rho}\langle\nabla_{\dot{\gamma}(s)}\nabla_{Z_k(s)}b(\gamma(s)), Z_k(s)\rangle ds\right| \le \int\limits_{0}^{\rho}\|\nabla_{\dot{\gamma}(s)}\nabla_{Z_k(s)}b(\gamma(s))\|\|Z_k(s)\|\,ds \le c_4,$$

$$\left|\int\limits_{0}^{\rho}\langle\nabla_{Z_k(s)}\nabla_{Z_k(s)}b(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s)\rangle ds\right| \le \int\limits_{0}^{\rho}\|\nabla_{Z_k(s)}\nabla_{Z_k(s)}b(\gamma(s))\|\|\dot{\gamma}(s)\|\,ds \le c_4.$$

С учетом утверждения 2 получим

$$\int\limits_{0}^{\rho}\langle\nabla_{\dot{\gamma}(s)}b(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s)\rangle\sum_{k=2}^{n}\langle Z_k'(s), Z_k(s)\rangle\,ds$$
$$\le \int\limits_{0}^{\rho}\|\nabla_{\dot{\gamma}(s)}b(\gamma(s))\|\sum_{k=2}^{n}\|Z_k'(s)\|\|Z_k(s)\|\,ds$$
$$\le c_3'\int\limits_{0}^{\rho}\sum_{k=2}^{n}\frac{s}{\rho^2}\,ds = c_3'(n-1)\frac{s^2}{2\rho^2}\bigg|_0^{\rho} = \frac{c_3'(n-1)}{2}.$$

Оценка последнего слагаемого вытекает из утверждения 4. В данном случае

$$\|H_k(s)\| \le (\rho - s)\int\limits_{0}^{\rho}\|f(s', Z_k(s'), Z_k(s'))\|\,ds',$$

где векторное поле f определяется формулой

$$f(s, Z_k(s), Z_k(s)) = 4R(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), Z_k(s))Z_k'(s)$$
$$+ (\nabla_{Z_k}R)(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), Z_k(s))\dot{\gamma}(s) + (\nabla_{\dot{\gamma}}R)(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), Z_k(s))Z_k(s).$$

Первое слагаемое, используя условие (1b), можно оценить таким образом:

$$\|R(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), Z_k(s))Z_k'(s)\|$$

$$\leq \sqrt{\langle R(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), Z_k(s))\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), Z_k(s)\rangle \operatorname{Ric}(\gamma(s))(Z_k'(s), Z_k'(s))}$$
$$\leq \sqrt{c\frac{s^2}{\rho^2}\operatorname{Ric}(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s))\operatorname{Ric}(\gamma(s))(Z_k'(s), Z_k'(s))}$$
$$\leq \sqrt{c}\frac{sr(\gamma(s))}{\rho}\|Z_k'(s)\| \leq \sqrt{c}\frac{sr(\gamma(s))}{\rho^2}.$$

Следующие два слагаемых оцениваются из условия (1d):

$$\|(\nabla_{Z_k}R)(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), Z_k(s))\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)\| \leq f_1(\gamma(s))\|Z_k(s)\|^2 \leq \frac{s^2 f_1(\gamma(s))}{\rho^2},$$
$$\|(\nabla_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}R)(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), Z_k(s))Z_k(s)\| \leq f_1(\gamma(s))\|Z_k(s)\|^2 \leq \frac{s^2 f_1(\gamma(s))}{\rho^2}.$$

Следовательно,

$$\|f(s, Z_k(s), Z_k(s))\| \leq 4\sqrt{c}\frac{sr(\gamma(s))}{\rho^2} + 2\frac{s^2 f_1(\gamma(s))}{\rho^2}.$$

Согласно условиям (1c) и (1d) скалярная кривизна $r(\gamma(s))$ интегрируема с весом s, а функция $f_1(\gamma(s))$ — с весом s^2, поэтому

$$\|H_k(s)\| \leq (\rho - s)\int_0^\rho \left(4\sqrt{c}\frac{sr(\gamma(s))}{\rho^2} + 2\frac{s^2 f_1(\gamma(s))}{\rho^2}\right) ds \leq \frac{\tilde{c}(\rho - s)}{\rho^2}.$$

Оценим последнее слагаемое:

$$\int_0^\rho \left\langle \nabla_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)} b(\gamma(s)), \sum_{k=2}^n H_k(s)\right\rangle ds \leq \int_0^\rho \|\nabla_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)} b(\gamma(s))\| \sum_{k=2}^n \|H_k(s)\|\, ds$$
$$\leq \frac{\tilde{c}(n-1)}{\rho^2}\int_0^\rho \|\nabla_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)} b(\gamma(s))\|(\rho - s)\, ds \leq c_3'\tilde{c}(n-1).$$

Окончательно получаем

$$|\,\Delta\,\psi(x,y)| \leq c_3' + (n-1)(2c_3' + c_4 + c_4 + c_4 + c_3'/2 + c_3'\tilde{c}) \triangleq \tilde{c}_3.$$

Константа $\tilde{c}_3$ также зависит от размерности многообразия. Лемма доказана.

Используя оценки, полученные в леммах, можем оценить невязку:

$$|M(t,x,y)| \leq \big(c_1(\tilde{c}_2 + c_2) + \tilde{c}_3/2 + \tilde{c}_2^2/2 + \tilde{c}_2 c_2\big) m(t,x,y).$$

Таким образом, получили оценку, когда невязка ограничена сверху функцией, пропорциональной начальному приближению. Теорема доказана.

3.2. Оценка невязки при слабых ограничениях.

Теорема 3. *Пусть поле $b(x)$ принадлежит классу $C^2(\mathscr{M})$, т. е.*

1) *оно ограничено: $\|b(x)\| \leq c_2$,*

2) *его ковариантная производная в произвольном направлении $h \in T_x\mathscr{M}$ ограничена, т. е. $\|\nabla_{h_1} b(x)\| \leq c_3$,*

3) *его вторая ковариантная производная в произвольных направлениях h_1 и $h_2 \in T_x\mathscr{M}$ ограничена: $\|\nabla_{h_2}\nabla_{h_1} b(x)\| \leq c_4$.*

Тогда имеет место оценка

$$|M(t,x,y)| \leq \operatorname{const}(\rho^2(x,y) + 1)m(t,x,y).$$

Доказательство. Оценки градиента и оператора Лапласа — Бельтрами приведены в следующих леммах.

Лемма 3. *Если выполнены условия* 1 *и* 2 *теоремы, то оценка градиента* $\psi(x,y)$ *имеет вид*

$$\|\operatorname{grad}_x \psi(x,y)\| \le \hat{c}_2(\rho(x,y)+1).$$

Доказательство. Из условия ограниченности ковариантной производной поля $b(x)$ получаем

$$\left|\int_0^\rho \langle \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s)\rangle ds\right| \le \int_0^\rho \|\nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s))\|\|Z_k(s)\|\,ds \le c_3\int_0^\rho ds = c_3\rho(x,y),$$

$$\left|\int_0^\rho \langle \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), \dot\gamma(s)\rangle ds\right| \le \int_0^\rho \|\nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s))\|\|\dot\gamma(s)\|\,ds \le c_3\int_0^\rho ds = c_3\rho(x,y).$$

Подставляя эти результаты в выражение для градиента (8) и учитывая, что само поле ограничено по норме, имеем

$$\|\operatorname{grad}_x \psi(x,y)\|^2 \le c_2^2 + (n-1)\big(4c_3^2\rho^2(x,y) + 4c_2c_3\rho(x,y)\big) \le \hat{c}_2^2(\rho(x,y)+1)^2,$$

где константа $\hat{c}_2$ зависит от размерности многообразия. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если выполнены условия* 2 *и* 3 *теоремы, то лапласиан* $\psi(x,y)$ *допускает оценку*

$$|\,\Delta\,\psi(x,y)| \le \hat{c}_3(\rho(x,y)+1).$$

Доказательство. Оценим интегралы от вторых производных:

$$\left|\int_0^\rho \langle \nabla_{Z_k(s)}\nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s)\rangle\,ds\right| \le \int_0^\rho \|\nabla_{Z_k(s)}\nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s))\|\|Z_k(s)\|\,ds \le c_4\rho(x,y),$$

$$\left|\int_0^\rho \langle \nabla_{\dot\gamma(s)}\nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s)\rangle\,ds\right| \le \int_0^\rho \|\nabla_{\dot\gamma(s)}\nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s))\|\|Z_k(s)\|\,ds \le c_4\rho(x,y),$$

$$\left|\int_0^\rho \langle \nabla_{Z_k(s)}\nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), \dot\gamma(s)\rangle\,ds\right| \le \int_0^\rho \|\nabla_{Z_k(s)}\nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s))\|\|\dot\gamma(s)\|\,ds \le c_4\rho(x,y).$$

Учитывая, что

$$\|Z_k'(s)\| \le \frac{\|Z_k(s)\|}{s}, \quad \|Z_k(s)\| \le \frac{s}{\rho},$$

получаем

$$\int_0^\rho \langle \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), \dot\gamma(s)\rangle \sum_{k=2}^n \langle Z_k'(s), Z_k(s)\rangle\,ds$$

$$\le \int_0^\rho \|\nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s))\| \sum_{k=2}^n \|Z_k'(s)\|\|Z_k(s)\|\,ds$$

$$\le c_3\int_0^\rho \sum_{k=2}^n \frac{\|Z_k(s)\|^2}{s}\,ds \le c_3(n-1)\int_0^\rho \frac{s^2}{s\rho^2}\,ds = c_3(n-1)\,\frac{s^2}{2\rho^2}\bigg|_0^\rho = \frac{c_3(n-1)}{2}.$$

Для последнего слагаемого с учетом выкладок из доказательства предыдущей теоремы

$$\int_0^\rho \left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), \sum_{k=2}^n H_k(s) \right\rangle ds \le \int_0^\rho \|\nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s))\| \sum_{k=2}^n \|H_k(s)\|\, ds$$
$$\le \frac{\tilde c(n-1)}{\rho^2} \int_0^\rho \|\nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s))\|(\rho - s)\, ds \le c_3 \tilde c(n-1).$$

Окончательно приходим к оценке

$$|\,\Delta\, \psi(x,y)| \le c_3 + (n-1)\,(2c_3 + 3c_4\rho(x,y) + c_3/2 + c_3\tilde c) \le \hat c_3(\rho(x,y)+1),$$

где константа $\hat c_3$ зависит от размерности многообразия. Лемма доказана.

Объединяя результаты обеих лемм и оценку первого слагаемого невязки, из доказательства теоремы 1 получим окончательную оценку для невязки:

$$|M(t,x,y)| \le \bigg(c_1(\tilde c_2 + c_2) + \frac{\hat c_3}{2}(\rho(x,y)+1) + \frac{\hat c_2^2}{2}(\rho(x,y)+1)^2$$
$$+ \hat c_2 c_2(\rho(x,y)+1)\bigg) m(t,x,y) \le \hat c(\rho^2(x,y)+1) m(t,x,y).$$

Теорема доказана.

3.3. Построение фундаментального решения.

Схема построения фундаментального решения описана в начале первого параграфа. Имея оценку невязки, можем оценить итерационную процедуру, приводящую к функции $r(t,x,y)$, через которую это решение определяется. Приведенные ниже теоремы дают оценки при разных по силе условиях на поле сноса.

Теорема 4. *Если условия теоремы* 2 *дополнить требованием интегрируемости поля* $b(x)$ *вдоль любой геодезической* $\gamma(s)$: $\int_0^\rho \|b(\gamma(s))\|\, ds \le c_2$, *то имеют место оценки*

$$|r_k(t,x,y)| \le \tilde c \frac{(\tilde c t)^k}{k!} p_0(t,x,y),$$
$$|r(t,x,y)| \le \tilde c e^{\tilde c t} p_0(t,x,y), \quad p(t,x,y) \le e^{c_2 + \tilde c t} p_0(t,x,y).$$

Доказательство. Как и в теореме 1, вычислим первую итерацию:

$$|r_1(t,x,y)| = \left| \int_0^t d\tau \int_{\mathscr M} M(t-\tau,x,z) M(\tau,z,y)\, \sigma(dz) \right|$$
$$\le c'^2 \int_0^t d\tau \int_{\mathscr M} m(t-\tau,x,z) m(\tau,z,y)\, \sigma(dz)$$
$$= c'^2 \int_0^t d\tau \int_{\mathscr M} e^{\psi(x,z)+\psi(y,z)} p_0(t-\tau,x,z) p_0(\tau,z,y)\, \sigma(dz).$$

Поскольку поле $b(x)$ интегрируемо вдоль любой геодезической, то

$$|\psi(x,y)| = \left| \int\limits_0^{\rho(x,y)} \langle b(\gamma(s)), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)\rangle\, ds \right| \le \int\limits_0^{\rho(x,y)} \|b(\gamma(s))\|\, ds \le c_2.$$

Тогда

$$|r_1(t,x,y)| \le c'^2 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} e^{2c_2} p_0(t-\tau,x,z) p_0(\tau,z,y)\, \sigma(dz) = (c' e^{c_2})^2 t p_0(t,x,y).$$

Здесь учтено, что фундаментальное решение $p_0(t,x,y)$ обладает полугрупповым свойством. Индукцией доказывается, что

$$|r_k(t,x,y)| \le \tilde{c}\frac{(\tilde{c}t)^k}{k!} p_0(t,x,y), \quad \tilde{c} = c' e^{c_2}.$$

Тогда сама функция $r(t,x,y)$ оценивается следующим образом:

$$|r(t,x,y)| \le \left| \sum_{k=0}^n \tilde{c}\frac{(\tilde{c}t)^k}{k!} p_0(t,x,y) \right| = \tilde{c} e^{\tilde{c}t} p_0(t,x,y).$$

Наконец, оценим фундаментальное решение:

$$p(t,x,y) \le m(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} m(t-\tau,x,z)|r(\tau,z,y)|\sigma(dz) \le e^{c_2} p_0(t,x,y)$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} e^{c_2} p_0(t-\tau,x,z)\tilde{c} e^{\tilde{c}\tau} p_0(\tau,z,y) = e^{c_2+\tilde{c}t} p_0(t,x,y).$$

Теорема доказана.

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы* 2, *то имеют место оценки*

$$|r_k(t,x,y)| \le c\frac{(ce^{c_2^2 t/2} t)^k}{k!} e^{c_2\rho(x,y)} q(t,x,y),$$

$$|r(t,x,y)| \le c' e^{c_2\rho + cc' t e^{c_2^2 t/2}} q(t,x,y), \quad p(t,x,y) \le e^{c_2\rho + c`\rho/2 + cc' t e^{c_2^2 t/2} + kt} p_0(t,x,y).$$

Доказательство. Если требовать от поля $b(x)$ только ограниченности, т. е. $\|b(x)\| \le c_2$, то

$$e^{\psi(x,y)} = \exp\left\{ -\int\limits_0^{\rho(x,y)} \langle b(\gamma(s)), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)\rangle\, ds \right\} \le e^{c_2\rho(x,y)}.$$

Тогда

$$|r_1(t,x,y)| \le c'^2 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} e^{c_2\rho(x,z)+c_2\rho(y,z)} p_0(t-\tau,x,z) p_0(\tau,z,y)\sigma(dz)$$

$$\le c'^2 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} \frac{e^{c_2\rho(x,z)+c_2\rho(y,z)}}{(2\pi(t-\tau))^{n/2}(2\pi\tau)^{n/2}} \exp\left\{ -\frac{\rho^2(x,z)}{2(t-\tau)} - \frac{\rho^2(z,y)}{2\tau} \right\} \sigma(dz).$$

Рассматривая величину

$$\frac{1}{(2\pi(t-\tau))^{n/2}(2\pi\tau)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{\rho^2(x,z)}{2(t-\tau)}-\frac{\rho^2(z,y)}{2\tau}\right\}\sigma(dz)$$

как новую меру $\mu(dz)$, применим неравенство Коши — Буняковского

$$\left|\int fg\,d\mu\right|\le\sqrt{\int f^2\,d\mu\int g^2\,d\mu}$$

к пространственному интегралу в оценке первой итерации $r_1(t,x,y)$. В первом интеграле под корнем перейдем к касательному пространству $T_x\mathscr{M}$, используя замену (7), а во втором — к $T_y\mathscr{M}$ заменой

$$U'=\sqrt{\frac{t}{\tau(t-\tau)}}\rho(y,z)e(y,z)-\sqrt{\frac{\tau}{t(t-\tau)}}\rho(x,y)e(x,y),$$

$$z(U')=\operatorname{Exp}\left[\sqrt{\frac{\tau(t-\tau)}{t}}U'+\frac{\tau}{t}\rho(x,y)e(x,y)\right], \tag{11}$$

$$\sigma(dz)=\left(\frac{\tau(t-\tau)}{t}\right)^{n/2}J(z,U')\,dU'.$$

В результате получим следующую оценку:

$$\int\limits_{\mathscr{M}}\frac{e^{c_2\rho(x,z)+c_2\rho(y,z)}}{(2\pi(t-\tau))^{n/2}(2\pi\tau)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{\rho^2(x,z)}{2(t-\tau)}-\frac{\rho^2(z,y)}{2\tau}\right\}\sigma(dz)$$

$$\le\frac{1}{(2\pi(t-\tau))^{n/2}(2\pi\tau)^{n/2}}\sqrt{\int\limits_{\mathscr{M}}\exp\left\{2c_2\rho(x,z)-\frac{\rho^2(x,z)}{2(t-\tau)}-\frac{\rho^2(z,y)}{2\tau}\right\}\sigma(dz)}$$

$$\times\sqrt{\int\limits_{\mathscr{M}}\exp\left\{2c_2\rho(y,z)-\frac{\rho^2(x,z)}{2(t-\tau)}-\frac{\rho^2(z,y)}{2\tau}\right\}\sigma(dz)}\le\frac{\exp\{-\frac{\rho^2(x,y)}{2t}\}}{(2\pi)^{n/2}(2\pi t)^{n/2}}$$

$$\times\sqrt{\int\limits_{T_x\mathscr{M}}\exp\left\{2c_2\frac{t-\tau}{t}\rho(x,y)+2c_2\sqrt{\frac{\tau(t-\tau)}{t}}\|U\|-\frac{\|U\|^2}{2}\right\}J(z,U)dU}$$

$$\times\sqrt{\int\limits_{T_y\mathscr{M}}\exp\left\{2c_2\frac{\tau}{t}\rho(x,y)+2c_2\sqrt{\frac{\tau(t-\tau)}{t}}\|U'\|-\frac{\|U'\|^2}{2}\right\}J(z,U')\,dU'}$$

$$=\frac{e^{c_2\rho(x,y)}q(t,x,y)}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left\{c_2^2\frac{2\tau(t-\tau)}{t}\right\}$$

$$\times\int\limits_{T_x\mathscr{M}}\exp\left\{-\left(\frac{\|U\|}{\sqrt{2}}-c_2\sqrt{\frac{2\tau(t-\tau)}{t}}\right)^2\right\}J(z,U)dU$$

$$\le ce^{c_2\rho(x,y)}q(t,x,y)\exp\left\{c_2^2\frac{2\tau(t-\tau)}{t}\right\}\le ce^{c_2\rho(x,y)+c_2^2t/2}q(t,x,y).$$

Здесь мы использовали неравенство

$$\frac{2\tau(t-\tau)}{t} \le \frac{t}{4}.$$

Для первой итерации

$$|r_1(t,x,y)| \le cc'^2 t e^{c_2^2 t/2} e^{c_2\rho(x,y)} q(t,x,y).$$

По индукции доказывается, что

$$|r_k(t,x,y)| \le c' \frac{(cc' e^{c_2^2 t/2} t)^k}{k!} e^{c_2\rho(x,y)} q(t,x,y),$$

$$|r(t,x,y)| \le c' e^{c_2\rho(x,y)} q(t,x,y) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cc' e^{c_2^2 t/2} t)^k}{k!} = c' e^{c_2\rho(x,y) + cc' t e^{c_2^2 t/2}} q(t,x,y).$$

Подставляя полученные оценки в формулу для фундаментального решения, получим

$$\begin{aligned}
p(t,x,y) &\le m(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathscr{M}} m(t-\tau,x,z)|r(\tau,z,y)|\sigma(dz) \\
&\le e^{c_2\rho(x,y)} p_0(t,x,y) + c' \int_0^t d\tau \int_{\mathscr{M}} e^{c_2\rho(x,z)} p_0(t-\tau,x,z) e^{c_2\rho(z,y)} e^{cc'\tau e^{c_2^2\tau/2}} q(\tau,z,y) \\
&\le e^{c_2\rho(x,y)} q(t,x,y) + e^{c_2\rho(x,y)} q(t,x,y) \int_0^t cc' e^{c_2^2 t/2} e^{cc'\tau e^{c_2^2 t/2}}\, d\tau \\
&= e^{c_2\rho(x,y) + cc' t e^{c_2^2 t/2}} q(t,x,y).
\end{aligned}$$

Из утверждения 1 следует неравенство

$$q(t,x,y) \le \exp\left\{\frac{1}{2} b(x,y) + kt\right\} p_0(t,x,y),$$

где

$$b(x,y) = \int_0^\rho (\rho - s)\operatorname{Ric}(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s))\, ds.$$

Условие (1c) достаточно быстрого убывания кривизны дает

$$|b(x,y)| \le \rho \int_0^\rho \operatorname{Ric}(\gamma(s))(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s))\, ds \le \rho \int_0^\rho r(\gamma(s))\, ds < c'\rho(x,y).$$

Тогда

$$p(t,x,y) \le c' e^{c_2\rho + c'\rho/2 + cc' t e^{c_2^2 t/2} + kt} p_0(t,x,y).$$

Теорема доказана.

Оценки при более слабых условиях на поле сноса описывает

Теорема 6. *Если выполнены условия теоремы* 3, *то имеют место оценки*

$$|r_k(t,x,y)| \le 4\hat{c}\big(4\hat{c}ce^{\frac{c_2^2 t}{2(1-\varepsilon)}}\big)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{c_2\rho(x,y)} q_\varepsilon(t,x,y),$$

$$|r(t,x,y)| \le 2\sqrt{\frac{\hat{c}}{c}} e^{c_2\rho - \frac{c_2^2 t}{4(1-\varepsilon)}} \operatorname{sh}\Big[t\sqrt{4\hat{c}ce^{\frac{c_2^2 t}{2(1-\varepsilon)}}}\Big] q_\varepsilon(t,x,y),$$

$$p(t,x,y) \le e^{c_2\rho(x,y)} \operatorname{ch}\Big[t\sqrt{4\hat{c}ce^{\frac{c_2^2 t}{2(1-\varepsilon)}}}\Big] q_\varepsilon(t,x,y).$$

Доказательство. Поскольку поле $b(x)$ только ограничено, имеем

$$e^{\psi(x,y)} = \exp\left\{ - \int_0^{\rho(x,y)} \langle b(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s)\rangle \, ds \right\} \le e^{c_2\rho(x,y)}.$$

Преобразуем оценку невязки, полученную в теореме 3, используя неравенство $u^n e^{-u} \le e^{-(1-\varepsilon)u}$:

$$|M(t,x,y)| \le \hat{c}(\rho^2(x,y)+1) e^{c_2\rho(x,y)} q(t,x,y) \le 4\hat{c} t e^{c_2\rho(x,y)} q_\varepsilon(t,x,y).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
|r_1(t,x,y)| &= \left| \int_0^t d\tau \int_{\mathscr{M}} M(t-\tau,x,z) M(\tau,z,y)\, \sigma(dz) \right| \\
&\le (4\hat{c})^2 \int_0^t (t-\tau)\tau \, d\tau \int_{\mathscr{M}} e^{c_2\rho(x,z)+c_2\rho(y,z)} q_\varepsilon(t-\tau,x,z) q_\varepsilon(\tau,z,y)\, \sigma(dz) \\
&= (4\hat{c})^2 \int_0^t (t-\tau)\tau \, d\tau \int_{\mathscr{M}} \frac{e^{c_2\rho(x,z)+c_2\rho(y,z)}}{(2\pi(t-\tau))^{n/2}(2\pi\tau)^{n/2}} \\
&\qquad \times \exp\left\{ -(1-\varepsilon)\frac{\rho^2(x,z)}{2(t-\tau)} - (1-\varepsilon)\frac{\rho^2(z,y)}{2\tau} \right\} \sigma(dz).
\end{aligned}$$

Рассматривая величину

$$\frac{1}{(2\pi(t-\tau))^{n/2}(2\pi\tau)^{n/2}} \exp\left\{ -(1-\varepsilon)\frac{\rho^2(x,z)}{2(t-\tau)} - (1-\varepsilon)\frac{\rho^2(z,y)}{2\tau} \right\} \sigma(dz)$$

как новую меру $\mu(dz)$, как и в доказательстве теоремы 5, применим неравенство Коши — Буняковского к пространственному интегралу и в первом интеграле перейдем к касательному пространству $T_x\mathscr{M}$ заменой (7), а во втором — к $T_y\mathscr{M}$ заменой (11). В результате получим следующую оценку:

$$\int\limits_{\mathscr{M}} \frac{e^{c_2\rho(x,z)+c_2\rho(y,z)}}{(2\pi(t-\tau))^{n/2}(2\pi\tau)^{n/2}}$$

$$\times \exp\left\{-(1-\varepsilon)\frac{\rho^2(x,z)}{2(t-\tau)} - (1-\varepsilon)\frac{\rho^2(z,y)}{2\tau}\right\}\sigma(dz) \le \frac{q_\varepsilon(t,x,y)}{(2\pi)^{n/2}}$$

$$\times \sqrt{\int\limits_{T_x\mathscr{M}} \exp\left\{2c_2\frac{t-\tau}{t}\rho(x,y) + 2c_2\sqrt{\frac{\tau(t-\tau)}{t}}\|U\| - (1-\varepsilon)\frac{\|U\|^2}{2}\right\} J(z,U)dU}$$

$$\times \sqrt{\int\limits_{T_y\mathscr{M}} \exp\left\{2c_2\frac{\tau}{t}\rho(x,y) + 2c_2\sqrt{\frac{\tau(t-\tau)}{t}}\|U'\| - (1-\varepsilon)\frac{\|U'\|^2}{2}\right\} J(z,U')dU'}$$

$$= \frac{e^{c_2\rho(x,y)}q_\varepsilon(t,x,y)}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{c_2^2\frac{2\tau(t-\tau)}{t(1-\varepsilon)}\right\}$$

$$\times \int\limits_{T_x\mathscr{M}} \exp\left\{-\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\|U\|}{\sqrt{2}} - c_2\sqrt{\frac{2\tau(t-\tau)}{t}}\right)^2\right\} J(z,U)dU$$

$$\le \frac{ce^{\frac{c_2^2 t}{2(1-\varepsilon)}}}{(1-\varepsilon)^{n/2}} e^{c_2\rho(x,y)}q_\varepsilon(t,x,y).$$

Окончательно выводим

$$|r_1(t,x,y)| = \frac{(4\hat{c})^2 ce^{\frac{c_2^2 t}{2(1-\varepsilon)}}}{(1-\varepsilon)^{n/2}} e^{c_2\rho(x,y)}q_\varepsilon(t,x,y)\int\limits_0^t (t-\tau)\tau\,d\tau$$

$$= \frac{(4\hat{c})^2 ce^{\frac{c_2^2 t}{2(1-\varepsilon)}}}{(1-\varepsilon)^{n/2}} \frac{t^3}{3!} e^{c_2\rho(x,y)}q_\varepsilon(t,x,y).$$

По индукции доказывается, что

$$|r_k(t,x,y)| \le 4\hat{c}\big(4\hat{c}ce^{\frac{c_2^2 t}{2(1-\varepsilon)}}\big)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{c_2\rho(x,y)}q_\varepsilon(t,x,y),$$

$$|r(t,x,y)| \le 2\sqrt{\frac{\hat{c}}{c}} e^{c_2\rho - \frac{c_2^2 t}{4(1-\varepsilon)}} \operatorname{sh}\big[t\sqrt{4\hat{c}ce^{\frac{c_2^2 t}{2(1-\varepsilon)}}}\big] q_\varepsilon(t,x,y).$$

Для ядра теплопроводности получаем

$$p(t,x,y) \le e^{c_2\rho(x,y)}p_0(t,x,y)$$

$$+ 2\sqrt{\frac{\hat{c}}{c}}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathscr{M}} e^{c_2\rho(x,z)}p_0(t-\tau,x,z)e^{c_2\rho(z,y)}e^{\frac{c_2^2 t}{4(1-\varepsilon)}} \operatorname{sh}\big[\tau\sqrt{4\hat{c}ce^{\frac{c_2^2 t}{2(1-\varepsilon)}}}\big] q_\varepsilon(\tau,z,y)\,d\tau$$

$$\le e^{c_2\rho(x,y)} \operatorname{ch}\big[t\sqrt{4\hat{c}ce^{\frac{c_2^2 t}{2(1-\varepsilon)}}}\big] q_\varepsilon(t,x,y).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маккин Г.* Стохастические интегралы. М.: Мир, 1972.
2. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
3. *Бондаренко В. Г.* Метод параметрикса для параболического уравнения на римановом многообразии // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 11. С. 1443–1448.
4. *Bondarenko V.* Diffusion sur une variété de courbure non positive // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I Math. 1997. V. 324, N 10. P. 1099–1103.
5. *Бондаренко В. Г.* Логарифмический градиент ядра теплопроводности на римановом многообразии // Мат. заметки. 2003. (В печати).
6. *Бондаренко В. Г.* Оценки ядра теплопроводности на многообразии неположительной кривизны // Укр. мат. журн. 1998. Т. 50, № 8. С. 1129–1136.

Статья поступила 21 октября 2002 г.

Бернацкая Юлия Николаевна
Институт прикладного системного анализа при Национальном техническом университете Украины «Киевский политехнический институт»,
пр. Победы, 37, корпус 14, к. 43, Киев 03056, Украина
jnb@ukma.kiev.ua