Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2003. Том 44, № 3

УДК 517.54

О САМОПОДОБНЫХ ЖОРДАНОВЫХ КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ

В. В. Асеев, А. В. Тетенов, А. С. Кравченко

Аннотация: Изучаются аттракторы конечной системы сжимающих подобий S_j ($j = 1, \dots, n$) на плоскости, удовлетворяющей условию сцепленности: для множества точек $\{x_0, \dots, x_n\}$ и бинарного вектора $(s_1, \dots, s_n)$, называемого сигнатурой, пара $\{x_0, x_n\}$ переводится отображением S_j либо в пару $\{x_{j-1}, x_j\}$ (если $s_j = 0$), либо в пару $\{x_j, x_{j-1}\}$ (если $s_j = 1$). Описаны ситуации, в которых из жордановости такого аттрактора следует, что он имеет ограниченное искривление, т. е. является квазиконформным образом отрезка прямой.

Ключевые слова: аттрактор, самоподобный фрактал, условие открытого множества, кривые с ограниченным искривлением, квазиконформное отображение, квазидуга, мера Хаусдорфа, хаусдорфова размерность, размерность подобия

В работе изучаются аттракторы конечной системы S_j ($j = 1, \dots, n$) сжимающих подобий полного метрического пространства $\mathscr{X}$, удовлетворяющие следующему *условию сцепленности*: для некоторого множества $\{x_0, \dots, x_n\}$ точек пространства $\mathscr{X}$, называемых *вершинами*, и бинарного вектора $(s_1, \dots, s_n)$, называемого *сигнатурой*, пара $\{x_0, x_n\}$ переводится отображением S_j ($i = 1, \dots, n$) либо в пару $\{x_{j-1}, x_j\}$ (если $s_j = 0$), либо в пару $\{x_j, x_{j-1}\}$ (если $s_j = 1$). Мы называем такие системы подобий *циpперами.* Общие свойства аттракторов систем сжимающих отображений в полном метрическом пространстве, включая теоремы существования и единственности аттрактора, можно найти в основополагающей статье Дж. Хатчинсона [1] или в монографии М. Р. Кроновера [2]. Некоторые свойства цipперов описаны в § 3.5 статьи [1]. В общем случае, как показывает пример 1.4, аттрактор циппера не должен быть жордановой дугой. Мы не останавливаемся в данной статье на условиях, достаточных для жордановости циппера, а исследуем свойства регулярности его аттрактора, которые вытекают из одного лишь требования жордановости. В § 4 описаны те ситуации на плоскости, когда аттрактор жорданова циппера является дугой с ограниченном искривлением, т. е. квазиконформным образом отрезка прямой. К таковым ситуациям относятся, в частности,

1) случай чередующейся сигнатуры $s_{j-1} + s_j = 1$ для всех $j = 1, \dots, n$;

2) случай $s_1 + s_n \geq 1$;

3) случай рациональной соизмеримости чисел $\mathrm{Ln}(|x_1 - x_0|/|x_n - x_0|)$ и $\mathrm{Ln}(|x_n - x_{n-1}|/|x_n - x_0|)$.

В § 2 на плоскости построен пример жорданова циппера, аттрактор которого не является дугой с ограниченным искривлением. В теореме 2.2 установлено, что если аттрактор жорданова циппера имеет ограниченное искривление, то он является множеством конечной ненулевой α-мерной меры Хаусдорфа, где α — размерность подобия системы $\mathbf{S}$, которая в этом случае совпадает с хаусдорфовой размерностью аттрактора. Заметим, что при выводе леммы 1.1 о непрерывной структурной параметризации аттрактора циппера мы не можем следовать доказательству аналогичного утверждения в [1, теорема (3), с. 731] из-за имеющегося там неявного требования связности метрического пространства.

1. Аттракторы, цепперы и их параметризации. Отображение $S : (\mathscr{X}_1, \rho_1) \to (\mathscr{X}_2, \rho_2)$ метрических пространств называется *сжимающим*, если

$$\mathrm{Lip}(S) := \sup\{\rho_2(S(x), S(y))/\rho_1(x, y) : x, y \in \mathscr{X}_1,\ x \neq y\} < 1.$$

Для натурального $n \in \mathbb{N}$ положим $I = \{1, \dots, n\}$; $I^k = \prod_{j=1}^{k} I$, где $k \in \mathbb{N}$; $I^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} I^k$ и $I^\infty = \prod_{j=1}^{\infty} I$. Элементы множеств I^k и I^* записываются в виде слов конечной длины над алфавитом I. Множество мультииндексов I^* является свободной полугруппой, порожденной элементами множества I, относительно операции конкатенации (concatenation), т. е. простого приписывания одного слова к другому. Элементы множества I^∞ записываются в виде слов бесконечной длины над алфавитом I.

Для набора $\mathbf{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ сжимающих отображений полного метрического пространства $(\mathscr{X}, \rho)$ в себя и любого $i = i_1 \dots i_k \in I^k$ используется аббревиатура $S_i = S_{i_1 \dots i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$. Для любого $i = i_1 i_2 \dots \in I^\infty$ и $k \in \mathbb{N}$ полагаем $i|_k = i_1 \dots i_k \in I^k$. В пространстве $\mathrm{Comp}(\mathscr{X})$ всех непустых компактных подмножеств $A \subset \mathscr{X}$, метризованном *расстоянием Хаусдорфа* [3, гл. 2, § 21, с. 223], система $\mathbf{S}$ задает *оператор Хатчинсона* $\Phi : \mathrm{Comp}(\mathscr{X}) \to \mathrm{Comp}(\mathscr{X})$, сопоставляющий каждому непустому компактному множеству $A \subset \mathscr{X}$ непустое компактное множество

$$\Phi(A) = \bigcup_{k=1}^{n} S_k(A)$$

(см. [1] или [2, (4.1), с. 99]). Неподвижная точка оператора Φ, т. е. непустое компактное множество $K(\mathbf{S}) \in \mathrm{Comp}(\mathscr{X})$, удовлетворяющее равенству $K(\mathbf{S}) = \Phi(K(\mathbf{S}))$, называется *аттрактором* (или *инвариантным множеством*) системы $\mathbf{S}$. Формула

$$\pi(i) = \lim_{k \to \infty} S_{i|_k}(x)$$

корректно задает непрерывное, не зависящее от выбора точки $x \in \mathscr{X}$ отображение $\pi : I^\infty \to K(\mathbf{S})$ (где I^∞ наделено тихоновским произведением дискретных топологий), называемое *индексной параметризацией* аттрактора $K(\mathbf{S})$ системы $\mathbf{S}$ (см. [1, (vii), с. 725]). Для $i \in I^k$ подмножества $K_i(\mathbf{S}) := S_i(K(\mathbf{S}))$ аттрактора $K(\mathbf{S})$ называются его *копиями* k-го ранга. Систему $\mathbf{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ сжимающих отображений полного метрического пространства $(\mathscr{M}, \rho)$ в себя, удовлетворяющую условию: «существуют набор точек $\{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathscr{M}$ и вектор $(s_1, \dots, s_n) \in \{0, 1\}^n$, для которых $S_j(x_0) = x_{j-1+s_j}$ и $S_j(x_n) = x_{j-s_j}$ при всех $j \in I$», будем называть, используя идущую от Тёрстона терминологию [4], *циппером* с *вершинами* $\{x_0, \dots, x_n\}$ и *сигнатурой* $(s_1, \dots, s_n)$. Обобщающим аналогом утверждений в [1, § 3.5, с. 730–731], полученных Дж. Хатчинсоном для цепперов с сигнатурой $s_j = 0$ при всех $j \in I$, является следующая

Лемма 1.1. *Для любого циппера $\mathbf{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ с вершинами $\{x_0, \dots, x_n\}$ и сигнатурой $(s_1, \dots, s_n)$ в полном метрическом пространстве $(\mathscr{M}, \rho)$ и для любого набора точек $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ на отрезке $J = [0, 1] \subset \mathbb{R}^1$*

существует единственное отображение $\gamma : J \to K(\mathbf{S})$, *при котором* $\gamma(t_i) = x_i$ *и* $S_i \circ \gamma = \gamma \circ T_i$ *для каждого* $i \in I$, *где* $T_i(t) = t_{i-1}(1-t) + t_i t$ *при* $s_i = 0$ *и* $T_i(t) = t_{i-1}t + t_i(1-t)$ *при* $s_i = 1$. *При этом отображение* γ *непрерывно по Гёльдеру и* $\gamma(J) = K(\mathbf{S})$.

Доказательство. Пусть $R < 1$ — максимальный из коэффициентов подобия отображений системы $\mathbf{S}$, а $r > 0$ — минимальный из коэффициентов подобия отображений системы $\mathbf{T}$. Положим $V = V^{(0)} = \{x_0, \dots, x_n\}$, $W = W^{(0)} = \{0, t_1, \dots, t_{n-1}, 1\}$, $V^{(k)} = \Phi^k(V)$ и $W^{(k)} = \Psi^k(W)$, где Φ, Ψ — операторы Хатчинсона систем $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ соответственно. Требуемое отображение γ задается на каждом конечном множестве $W^{(k)}$ единственным образом: для каждого мультииндекса $j \in I^k$ полагаем $\gamma(T_j(0)) = S_j(x_0)$ и $\gamma(T_j(1)) = S_j(x_n)$. Корректность задания γ обеспечивается совпадением сигнатур систем $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$. Тем самым γ задано на плотном в J множестве

$$W^{(\infty)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} W^{(k)}.$$

Для любого $\delta \in (0, r)$ имеется номер $k \geq 1$ такой, что $r^{k+1} \leq \delta \leq r^k$. Так как $\operatorname{diam}(T_j(J)) \geq r^k$ для любого мультииндекса $j \in I^k$, любая пара точек $a, b \in W^{(\infty)}$ с расстоянием $|a-b| < \delta$ покрывается не более, чем двумя смежными (т. е. пересекающимися) копиями k-го ранга аттрактора $K(\mathbf{T})$. По построению отображения γ их образы $\gamma(a), \gamma(b)$ также лежат в объединении не более двух пересекающихся копий k-го ранга аттрактора $K(\mathbf{S})$. Следовательно,

$$\rho(\gamma(a), \gamma(b)) \leq 2R^k \operatorname{diam}(V).$$

Поскольку $k+1 \geq \operatorname{Ln}(\delta)/\operatorname{Ln}(r)$, имеем $R^k \leq (1/R)\delta^\alpha$, где $\alpha = \operatorname{Ln}(R)/\operatorname{Ln}(r)$. Значит, на множестве $W^{(\infty)}$ отображение γ непрерывно по Гёльдеру с показателем $\alpha = \operatorname{Ln}(R)/\operatorname{Ln}(r)$ и тем самым продолжается по непрерывности на J. При этом

$$\gamma(J) = \lim_{k\to\infty} \gamma_k(W^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} V^{(k)} = K(\mathbf{S}).$$

Лемма доказана.

Отображения γ, построенные в лемме 1.1 для разных наборов точек $0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < 1$, называются *структурными параметризациями* аттрактора циппера $\mathbf{S}$. Циппер $\mathbf{S}$ называется *жордановым* в том и только в том случае, когда одна из структурных параметризаций (а следовательно, и любая) его аттрактора осуществляет гомеоморфизм отрезка $J = [0, 1]$ на $K(\mathbf{S})$.

Теорема 1.2. *Пусть циппер* $\mathbf{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ *с вершинами* $\{x_0, \dots, x_n\}$ *в полном метрическом пространстве* $(\mathscr{M}, \rho)$ *таков, что все сжимающие отображения* $S_j : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ *являются инъективными. Если для любых* $i, j \in I$ *множество* $K_i(\mathbf{S}) \cap K_j(\mathbf{S})$ *является пустым при* $|i-j| > 1$ *и одноточечным при* $|i-j| = 1$, *то любая структурная параметризация* $\gamma : [0,1] \to K(\mathbf{S})$ *его аттрактора является гомеоморфизмом, а* $K(\mathbf{S})$ *— жордановой дугой с концами в точках* x_0 *и* x_n.

Доказательство. Пусть $\gamma : J \to K(\mathbf{S})$ — структурная параметризация аттрактора $K(\mathbf{S})$, построенная в лемме 1.1. Систему $\mathbf{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ рассматриваем как циппер с той же сигнатурой, что и у циппера $\mathbf{S}$, с вершинами $\{0, t_1, \dots, t_{n-1}, 1\}$ и аттрактором $J = K(\mathbf{T})$.

Заметим, что выполнено следующее условие.

(A) Если $x = \gamma(a) = \gamma(b)$ для $a, b \in J$, $a < b$, то либо

($a1$) $a, b \in K_i(\mathbf{T})$ при некотором $i \in I$,
либо
($a2$) при некотором $i \in I$ выполняются соотношения $a \in K_i(\mathbf{T})$, $b \in K_{i+1}(\mathbf{T})$ и $x = \gamma(t_i)$.

Действительно, пусть $a \in K_i(\mathbf{T})$, $b \in K_j(\mathbf{T})$. Тогда $x \in K_i(\mathbf{S}) \cap K_j(\mathbf{S})$ и по условию теоремы $|i-j| \le 1$. Если $i = j$, то реализуется ($a1$). Если же $|i-j| = 1$, то из $a < b$ следует, что $j = i + 1$, и получаем ($a2$).

Пусть отображение γ не инъективно. Тогда имеются точки $a, b \in J$, $a < b$, в которых $\gamma(a) = \gamma(b)$. Используя (A) и заменяя в случае ($a2$) точку b точкой t_i, можно считать без нарушения общности, что исходные точки a, b лежат в одной и той же копии 1-го ранга $K_i(\mathbf{T})$ и, следовательно, существует $q = \max\{k : \exists j \in I^k$ такой, что $a, b \in K_j(\mathbf{T})\} \ge 1$. Пусть $a, b \in K_{j_0}(\mathbf{T})$ при $j_0 \in I^q$. Тогда точки $a' = T_{j_0}^{-1}(a)$, $b' = T_{j_0}^{-1}(b)$ лежат в разных копиях 1-го ранга аттрактора $J = K(\mathbf{T})$, при этом

$$\gamma(a') = S_{j_0}^{-1} \circ \gamma(a) = S_{j_0}^{-1} \circ \gamma(b) = \gamma(b').$$

Следовательно, для точек $a_0 = \min\{a', b'\}$ и $b_0 = \max\{a', b'\}$ в (A) реализуется ($a2$), т. е. $a_0 \in K_{i_0}(\mathbf{T})$, $b_0 \in K_{i_0+1}(\mathbf{T})$ при некотором $i_0 \in I$, при этом $\gamma(a_0) = \gamma(t_{i_0})$. Тогда точки $a_0' = T_{i_0}^{-1}(a_0)$ и $b_0' = T_{i_0}^{-1}(t_{i_0}) = 1 - s_{i_0}$ различны и

$$\gamma(a_0') = S_{i_0}^{-1} \circ \gamma(a_0) = S_{i_0}^{-1} \circ \gamma(t_{i_0}) = \gamma(1 - s_{i_0}) = x_{1-s_{i_0}}.$$

Таким образом, приходим к следующему условию.
(B) Если параметризация γ не инъективна, то либо
($b1$): $\gamma(a) = \gamma(0) = x_0$ при некотором $a \in (0,1)$,
либо
($b2$): $\gamma(a) = \gamma(1) = x_n$ для некоторого $a \in (0,1)$.

Рассмотрим случай ($b1$). Так как $\gamma(t_1) = x_1 \ne x_0 = \gamma(0)$, для пары точек $0, a$ ситуация ($a2$) в утверждении (A) невозможна и поэтому $a \in K_1(\mathbf{T})$. Следовательно, $q = \max\{k : a \in K_j(\mathbf{T})$, где $j = 11\dots1 \in I^k\} \ge 1$. Пусть $j_0 = 11\dots1 \in I^q$. Тогда точки $a_0 = T_{j_0}^{-1}(0) \in \{0,1\}$ и $a_1 = T_{j_0}^{-1}(a)$ не лежат в одной и той же копии 1-го ранга аттрактора $J = K(\mathbf{T})$, но $\gamma(a_0) = \gamma(a_1)$. Тогда для точек a_0, a_1 в (A) должна иметь место ситуация ($a2$). При $a_0 = 0$ получаем противоречие: $x_0 = \gamma(0) = \gamma(t_1) = x_1$. Но и $a_0 = 1$ приводит к такому же противоречию: $x_n = \gamma(1) = \gamma(t_{n-1}) = x_{n-1}$. Поэтому случай ($b1$) невозможен. Аналогично устанавливается невозможность ситуации ($b2$). Таким образом, допущение о неинъективности γ приводит к противоречию. Теорема доказана.

Пример 1.3 (см. [1, с. 729]). На комплексной плоскости (z) положим

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1/2 + i/2\sqrt{3}, \quad z_2 = 1,$$

$$S_1(z) = (1/\sqrt{3})\bar{z}\exp(i\pi/6), \quad S_2(z) = 1 + (1/\sqrt{3})(\bar{z} - 1)\exp(-i\pi/6).$$

Система $\mathbf{S} = \{S_1, S_2\}$ сжимающих подобий является циппером с вершинами $\{z_0, z_1, z_2\}$ и сигнатурой $(0,0)$, а ее аттрактор $K(\mathbf{S})$ — классической *кривой Коха*.

Пример 1.4. На комплексной плоскости (z) система $\mathbf{Q}$ сжимающих подобий

$$Q_1(z) = \frac{1}{2}z, \quad Q_2(z) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right), \quad Q_3(z) = 1 + \frac{1}{2}(z - 1)$$

имеет аттрактором $K(\mathbf{Q}) = D$ — классический *треугольник Серпинского*. Положим

$$z_0 = 0, \quad z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}, \quad z_2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}, \quad z_3 = 1;$$

$$S_1(z) = \frac{1}{2}\bar{z}\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right), \quad S_2 = \frac{1}{2}z + \frac{1+i\sqrt{3}}{4}, \quad S_3(z) = 1 + \frac{1}{2}(\bar{(z)} - 1)\exp\left(-\frac{i\pi}{3}\right).$$

Система $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$ — циппер с вершинами $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ и сигнатурой $(0,0,0)$, а его аттрактор $K(\mathbf{S})$ — тот же треугольник Серпинского D. Это следует из очевидных равенств $S_j(D) = Q_j(D)$ при $j = 1,2,3$, равенства $D = S_1(D) \cup S_2(D) \cup S_3(D)$ и единственности инвариантного множества для системы $\mathbf{S}$.

Пример 1.5. В комплексной плоскости ($z = x+iy$) система $\mathbf{S}$ отображений

$$S_1(x+iy) = \frac{xi}{2}, \quad S_2(x+iy) = \frac{x+i}{2},$$

$$S_3(x+iy) = \frac{1+x+i}{2}, \quad S_4(x+iy) = 1 + \frac{(1-x)i}{2}$$

является циппером с вершинами

$$\{0, i/2, (1+i)/2, 1+i/2, 1\}$$

и сигнатурой $(0,0,0,0)$. Аттрактором $K(\mathbf{S})$ служит объединение отрезков

$$[0, i/2], \quad [i/2, 1/2+i/2], \quad [1/2+i/2, 1+i/2], \quad [1+i/2, 1],$$

каждый из которых является соответствующей копией 1-го ранга. В этом примере аттрактор $K(\mathbf{S})$ является жордановой дугой с концами в точках $0, 1$; для копий 1-го ранга выполнены условия теоремы 1.2, но никакая структурная параметризация $\gamma : J \to K(\mathbf{S})$ не является гомеоморфизмом (некоторые копии 2-го ранга — одноточечные множества). Следовательно, условие инъективности сжимающих отображений S_i в теореме 1.2 не может быть опущено.

Циппер $\mathbf{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ будем называть *самоподобным*, если отображения $S_i : (\mathscr{M}, \rho) \to (\mathscr{M}, \rho)$ являются *подобиями* с коэффициентами $r_i \in (0,1)$ (т. е. $\rho(S_i(x), S_i(y)) = r_i \cdot \rho(x,y)$ для всех $x, y \in \mathscr{M}$). При этом единственное решение α уравнения $r_1^\alpha + \cdots + r_n^\alpha = 1$ называется *размерностью подобия* системы $\mathbf{S}$.

2. Жордановыципперы с ограниченным искривлением. Следуя [5, 2.7, с. 100], введем класс c-BT ($c \in [1, \infty)$) метрических пространств $(\mathscr{M}, \rho)$ *с ограниченным искривлением*, определяемый следующим условием: любую пару точек $a, b \in \mathscr{M}$ можно соединить континуумом $\Gamma \subset \mathscr{M}$, у которого $\operatorname{diam}(\Gamma) = \sup\limits_{x,y\in\Gamma} \rho(x,y) \le c\rho(a,b)$.

Лемма 2.1. *Пусть в полном метрическом пространстве $(\mathscr{M}, \rho)$ задан самоподобный жорданов циппер $\mathbf{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ с вершинами $\{x_0, \ldots, x_n\}$ и сигнатурой $(s_1, \ldots, s_n)$. Аттрактор $K = K(\mathbf{S})$ является дугой с ограниченным искривлением ($K \in c$-BT) тогда и только тогда, когда в каждой вершине x_i ($i = 1, \ldots, n-1$) выполняется условие:*

(U) *существует $c_i \ge 1$ такое, что для любой жордановой дуги $\Gamma_{xy} \subset K$ с концами $x \in K_i(\mathbf{S})$ и $y \in K_{i+1}(\mathbf{S})$ справедлива оценка $\operatorname{diam}(\Gamma_{xy}) \le c_i\rho(x,y)$.*

Доказательство. Если $K(\mathbf{S}) \in c$-BT, то (U), очевидно, выполняется при любом $i = 1, \ldots, n-1$ с константой $c_i = c$. Для проверки обратной импликации положим $\delta = \min\{\rho(x, y) : x \in K_i(\mathbf{S}), y \in K_j(\mathbf{S}); |i - j| > 1\} > 0$; $d = \operatorname{diam} K$; $c' = \max\{c_1, \dots, c_n\}$; $c'' = d/\delta$ и $c = \max\{c', c''\}$. Если точки a, b лежат в разных копиях 1-го ранга, то либо $\operatorname{diam}(\Gamma_{ab}) \le c'\rho(a, b)$ (точки лежат в смежных копиях 1-го ранга), либо $\operatorname{diam}(\Gamma_{ab}) \le d \le c''\rho(a, b)$ (точки лежат в непересекающихся копиях 1-го ранга). Если же точки a, b лежат в одной и той же копии 1-го ранга, то $p = \max\{k : \exists j \in I^k$ такой, что $a, b \in K_j(\mathbf{S})\} \ge 1$. Пусть $a, b \in K_j(\mathbf{S})$, $j \in I^p$. Тогда точки $a' = S_j^{-1}(a)$, $b' = S_j^{-1}(b)$ лежат в разных копиях первого ранга. Так как S_j — подобие с коэффициентом r_j, с учетом предыдущих оценок получаем неравенство

$$\operatorname{diam}(\Gamma_{ab}) = r_j \operatorname{diam}(\Gamma_{a'b'}) \le r_j \max\{c', c''\}\rho(a', b') = c\rho(a, b).$$

Таким образом, $K \in c$-ВТ. Лемма доказана.

Для $\alpha > 0$ символом $\mathscr{H}_\alpha$ обозначаем обычную α-мерную меру Хаусдорфа на σ-кольце всех борелевских множеств в пространстве $\mathbb{R}^d$, а через $\dim_H$ — хаусдорфову размерность борелевского множества в $\mathbb{R}^d$.

Теорема 2.2. *Если аттрактор $K = K(\mathbf{S})$ самоподобного жорданова циппера $\mathbf{S}$ в пространстве $\mathbb{R}^d$ имеет ограниченное искривление и α — размерность подобия системы $\mathbf{S}$, то $0 < \mathscr{H}_\alpha(K) < +\infty$ и, следовательно, $\dim_H(K) = \alpha$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ — жорданов циппер с вершинами $\{x_0, \dots, x_n\}$, отображения $S_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ являются подобиями с коэффициентами $r_i \in (0, 1)$ $(i \in I)$, $K \in c$-ВТ и $D = \operatorname{diam}(K)$. Допустим, что $\mathscr{H}_\alpha(K) = 0$. Тогда (см. [6, с. 996]) тождественное отображение id является пределом некоторой сходящейся равномерно на компактах в $\mathbb{R}^d$ последовательности из семейства $\mathscr{F}$ всех отображений (подобий) вида $S_i^{-1} \circ S_j$ с мультииндексами $i = i_1 \dots i_p \in I^p$, $j = j_1 \dots j_q \in I^q$, $p, q = 1, 2, \dots$, у которых $i_1 \ne j_1$. Положим $\varepsilon = D/c$. Тогда найдутся $p \ge 1$, $q \ge 1$ и мультииндексы $i \in I^p$, $j \in I^q$ с $i_1 \ne j_1$, для которых

$$\max\big\{\big|x_0 - S_i^{-1} \circ S_j(x_0)\big|, \big|x_n - S_i^{-1} \circ S_j(x_n)\big|\big\} < \varepsilon.$$

Так как S_i есть подобие с коэффициентом $r_i = r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_p}$, то

$$\max\{|S_i(x_0) - S_j(x_0)|, |S_i(x_n) - S_j(x_n)|\} < r_i\varepsilon.$$

Точки $S_i(x_0), S_i(x_n) \in K_{i_1}$ являются концами жордановой дуги $K_i(\mathbf{S})$ — копии p-го ранга, а точки $S_j(x_0), S_j(x_n) \in K_{j_1}$ — концами жордановой дуги $K_j(\mathbf{S})$ — копии q-го ранга. Из расположения этих дуг на K вытекает, что

$$\max\{\operatorname{diam}(\Gamma_{S_i(x_0), S_j(x_0)}), \operatorname{diam}(\Gamma_{S_i(x_n), S_j(x_n)})\} \ge \operatorname{diam}(K_i) = r_i D.$$

Так как $K \in c$-ВТ, отсюда следует неравенство

$$r_i D \le c \max\{|S_i(x_0) - S_j(x_0)|, |S_i(x_n) - S_j(x_n)|\} < c r_i \varepsilon,$$

дающее противоречие: $D < c\varepsilon = D$. Теорема доказана.

Пример 2.3. Покажем, что в плоскости $(z = x + iy)$ существует самоподобный жорданов циппер $\mathbf{S}$, аттрактор $K = K(\mathbf{S})$ которого не является дугой с ограниченным искривлением. Заметим, что для любых рациональных чисел d_1, $d_2 \ne 0$ и натурального $n \ge 1$ число $(d_1 + d_2\sqrt{5})^n$ иррационально. (Если $(d_1 + d_2\sqrt{5})^n = A + B\sqrt{5}$ с рациональными A и B, то формула бинома Ньютона дает соотношение $0 \ne (d_1 + d_2\sqrt{5})^n - (d_1 - d_2\sqrt{5})^n = 2B\sqrt{5}$, означающее, что $B \ne 0$.) В частности, для $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2 \in (0, 1)$ число τ^n при $n \ge 1$ не может быть целой степенью числа 2, и, следовательно, числа $\log_2(\tau) \in (-1, 0)$ и $\log_2(\tau^2/2) \in (-3, -1)$ иррациональны.

Построим циппер $\mathbf{S} = \{S_1, \dots, S_4\}$ с вершинами

$$z_0 = -\tau, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = 1, \quad z_4 = 2 + \tau$$

и сигнатурой $(0, 0, 0, 0)$, порожденный подобиями S_j с коэффициентами

$$r_1 = \frac{\tau}{2 + 2\tau} = \frac{\tau^2}{2}, \quad r_2 = r_3 = \frac{1}{2 + 2\tau} = \frac{\tau}{2}, \quad r_4 = \frac{1}{2}$$

такими, что S_1, S_4 сохраняют ориентацию плоскости, а S_2 и S_3 обращают ее. Треугольники $z_0z_1z_2$ и $z_2z_3z_4$ подобны (ибо $\tau/1 = 1/(1+\tau)$). Обозначив через β_0 угол при вершине z_0, а через β_1 — угол при вершине z_4, замечаем, что $\beta_0 + \beta_1 = \pi/3$, угол $z_0z_2z_1$ равен β_1, а угол $z_3z_2z_4$ равен β_0. Взяв в качестве области U открытый треугольник с вершинами z_0, z_2, z_4, видим, что $S_i(U) \cap S_j(U) = \varnothing$ при $i \neq j$ и, следовательно, для самоподобного циппера $\mathbf{S}$ выполняется условие открытого множества (OSC) (см. [1, (1), с. 735]), равносильное (см. [7, теорема 2.2, с. 114]) тому, что хаусдорфова размерность $\dim_H(K)$ аттрактора $K = K(\mathbf{S})$ совпадает с размерностью подобия α системы $\mathbf{S}$ и для α-мерной меры Хаусдорфа справедливо неравенство $0 < \mathscr{H}^\alpha(K) < +\infty$ (см. также [8, теорема 3, с. 7]). Так как $K_j = S_j(K) \subset \overline{S_j(U)}$ при $j = 1, \dots, 4$, то K_1 пересекается лишь с копией K_2 в точке z_1; K_4 пересекается только с копией K_3 в точке z_3, а копии K_2 и K_3 могут пересекаться лишь в точках отрезка $L = [z_2z_5]$, где точка z_5 на отрезке $[z_1z_3]$ такова, что угол $z_1z_2z_5$ равен β_1, а угол $z_5z_2z_3$ равен β_0. Тогда

$$K_2 \cap L = \{z_2\} \cup \bigl\{a_n = S_2\bigl(S_4^n(z_2)\bigr) : n = 0, 1, \dots\bigr\},$$
$$K_3 \cap L = \{z_2\} \cup \bigl\{b_n = S_3\bigl(S_1^n(z_2)\bigr) : n = 0, 1, \dots\bigr\},$$
$$\rho_n = |a_n - z_2| = \bigl|S_2\bigl(S_4^n(z_2)\bigr) - S_2(z_4)\bigr| = r_2 r_4^n |z_2 - z_4| = \sqrt{2}/2^{n+1},$$
$$\sigma_m = |b_m - z_2| = \bigl|S_3\bigl(S_1^m(z_0)\bigr) - S_3(z_0)\bigr| = r_3 r_1^m |z_2 - z_0| = \sqrt{2}(\tau^2/2)^m \tau/2.$$

Поэтому равенство $a_n = b_m$ реализуется лишь при условии $\tau^{2m+1} = 2^{m-n}$, что невозможно при целых m и n. Следовательно, копии K_2 и K_3 пересекаются только в точке z_2, и поэтому $\mathbf{S}$ является жордановым циппером.

В силу иррациональности $\log_2(\tau^2/2)$ множество дробных частей всех чисел вида $m\log_2(\tau^2/2)$ при $m = 1, 2, \dots$ является плотным на отрезке $[0, 1]$. Поэтому для произвольно заданного $\varepsilon \in (0, 1)$ найдутся натуральные m и n, при которых

$$|(m\log_2(\tau^2/2) + n) - (-\log_2\tau)| \le \log_2(1 + \varepsilon).$$

Так как

$$|\log_2(\sigma_m/\rho_n)| = |\log_2[(\tau^2/2)^m \tau 2^n]| = |m\log_2(\tau^2/2) + n + \log_2\tau| \le \log_2(1 + \varepsilon),$$

то $(1 + \varepsilon)^{-1} \le \sigma_m/\rho_n \le 1 + \varepsilon$. Тогда для дуги $\gamma \subset K(\mathbf{S})$ с концами в точках a_n и b_m выполняется неравенство

$$\frac{|a_n - b_m|}{\rho_n + \sigma_m} = \frac{|\sigma_m - \rho_n|}{\sigma_m + \rho_n} \le \varepsilon,$$

из которого следует, что

$$\operatorname{diam}(\gamma) \ge \max\{\sigma_m, \rho_n\} \ge \frac{\sigma_m + \rho_n}{2} \ge \frac{|a_n - b_m|}{2}\varepsilon.$$

Но в силу произвольной малости ε это означает, что дуга $K(\mathbf{S})$ не принадлежит классу c-BT ни при каком $c < \infty$.

3. Вершины первого и второго типов. На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ отметим одно геометрическое свойство периодических жордановых дуг, выраженное следующей леммой.

Лемма 3.1 (о непересекающихся периодических дугах). *Пусть жордановы дуги* Γ_1, Γ_2 *в комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ *с общим началом в точке* 0 *и с концами в точках* a_1 *и* a_2 *соответственно не пересекаются в* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Если подобия* $F_j(z) = C_j z$ *с* $|\mathrm{C}_j| = \rho_j < 1$ *таковы, что* $F_j(\Gamma_j) \subset \Gamma_j$ $(j = 1, 2)$, *то*

$$\alpha_1 / \operatorname{Ln}(\rho_1) = \alpha_2 / \operatorname{Ln}(\rho_2), \tag{1}$$

где α_j — *приращение аргумента* z *вдоль дуги* $\tau_j \subset \Gamma_j$ *с концами* $a_j, F_j(a_j)$ *в направлении от* a_j *к* $F_j(a_j)$. (*Отметим, что в этих обозначениях* $C_j = \rho_j e^{i\alpha_j}$ *и* $\alpha_j = \operatorname{Im}\,(\int\limits_{\tau_j} z^{-1} dz)$), *где интеграл по жордановой дуге корректно определен* (*см. например,* [9, *замечание* 1, *с.* 78])).

Доказательство. При доказательстве равенства (1) можно, не ограничивая общности, заменить исходные дуги Γ_j их поддугами, лежащими в некотором замкнутом круге $\overline{B}(0, R_0)$, с общим началом в 0 и с концами $a_j' \in \partial B(0, R_0)$. Поэтому можно считать, что $|a_j| = R_0$ и $\Gamma_j \subset \overline{B}(0, R_0)$.

Рассмотрим отображение $z = \exp(w)$ плоскости $(w = p + i\varphi)$ как универсальное накрытие области $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ (см., например, [10, гл. 1, § 5]). При этом любые поднятия γ_j жордановых дуг Γ_j удовлетворяют условиям: $T_j(\gamma_j) \subset \gamma_j$ относительно переноса $T_j(w) = w + \operatorname{Ln}(\rho_j) + i\alpha_j$ $(j = 1, 2)$ и $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \varnothing$. Допустим, что $k_1 = \alpha_1/\operatorname{Ln}(\rho_1) \neq k_2 = \alpha_2/\operatorname{Ln}(\rho_2)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $k_1 < k_2$. Фиксируем какое-нибудь поднятие γ_1 дуги Γ_1, являющееся жордановой дугой с началом в точке $W_0 = p_0 + i\varphi_0$ (где $\exp(W_0) = a_1$), лежащей в полуплоскости $\{p \leq p_0 = \operatorname{Ln}(R_0)\}$ и проходящей через точки

$$T_1^n(W_0) = p_0 + n \operatorname{Ln}(\rho_1) + i(\varphi_0 + n\alpha_1), \quad n = 0, 1, \dots .$$

В силу периодичности (с периодом $\operatorname{Ln}(\rho_1) + i\alpha_1$) дуга γ_1 лежит в некоторой полуполосе

$$\Pi = \{w = p + i\varphi : -\infty < p \leq p_0, |\varphi - \varphi_0 - k_1(p - p_0)| < M\}.$$

Фиксируем какое-нибудь поднятие γ_2 дуги Γ_2 с началом в точке $W_0' = p_0 + i\varphi_0'$, $\exp(W_0') = a_2$, и возьмем натуральное N такое, что $\varphi_0' + 2\pi N > \varphi_0 + M$. Тогда поднятие $\gamma_2' = \{w + 2\pi N i : w \in \gamma_2\}$ дуги Γ_2 проходит через множество точек

$$\left\{T_2^n(W_0') = p_0 + n \operatorname{Ln}(\rho_2) + i(\varphi_0' + 2\pi N + n\alpha_2); n = 0, 1, \dots\right\},$$

лежащих на прямой с угловым коэффициентом k_2. Точка $W_0' + 2\pi N i$ лежит выше полуполосы Π, а так как $k_2 > k_1$, то при всех достаточно больших n точки $T_2^n(W_0')$ лежат ниже полуполосы Π. Следовательно, дуга γ_2' пересекает полосу Π, а вместе с тем и дугу γ_1. Поднятия дуги Γ_1 не могут пересекаться с поднятиями дуги Γ_2, и полученное противоречие показывает, что $k_1 = k_2$. Лемма доказана.

Для самоподобного жорданова циппера $\mathbf{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ с вершинами $x_0, \dots, x_n$ и сигнатурой $(s_1, \dots, s_n)$ введем следующую классификацию: вершину x_p $(p \in \{1, \dots, n-1\})$ назовем *вершиной первого типа*, если $s_p = s_{p+1}$ и $s_1 = s_n = 0$; во всех остальных случаях считаем x_p *вершиной второго типа*.

Лемма 3.2. *Пусть* x_p, $p = 1, \dots, n-1$, — *вершина самоподобного жорданова циппера* $\mathbf{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ *с сигнатурой* $(s_1, \dots, s_n)$. *Пусть*

(i) x_p *есть вершина второго типа*

или

(ii) x_p — *вершина первого типа, и рационально число*

$$\frac{\mathrm{Ln}\,|x_1 - x_0| - \mathrm{Ln}\,|x_n - x_0|}{\mathrm{Ln}\,|x_n - x_{n-1}| - \mathrm{Ln}\,|x_n - x_0|}. \tag{2}$$

Тогда в вершине x_p выполняется условие (U) *из леммы* 2.1.

Доказательство. Пусть $x_q = S_p^{-1}(x_p)$ и $x_{q'} = S_{p+1}^{-1}(x_p)$, где $q, q' \in \{0, n\}$. Пусть $w, w' \in I^\infty$ — индексные координаты точек x_q и $x_{q'}$, т. е. $x_q = \pi(w), x_{q'} = \pi(w')$, где $\pi : I^\infty \to K = K(\mathbf{S})$ — индексная параметризация аттрактора K. Непосредственно проверяем следующие соотношения.

При $s_p = s_{p+1}$ выполняется равенство $q' = n - q$ и

(A1) $w = 111\ldots$ и $w' = nnn\ldots$ при $q = 0$, $s_1 = 0$, $s_n = 0$;

(A2) $w = 111\ldots$ и $w' = n111\ldots$ при $q = 0$, $s_1 = 0$, $s_n = 1$;

(A3) $w = 1nnn\ldots$ и $w' = nnn\ldots$ при $q = 0$, $s_1 = 1$, $s_n = 0$;

(A4) $w = 1n1n\ldots1n\ldots$ и $w' = n1n1\ldots n1\ldots$ при $q = 0$, $s_1 = 1$, $s_n = 1$;

(A5) $w = nnn\ldots$ и $w' = 111\ldots$ при $q = n$, $s_1 = 0$, $s_n = 0$;

(A6) $w = n111\ldots$ и $w' = 111\ldots$ при $q = n$, $s_1 = 0$, $s_n = 1$;

(A7) $w = nnn\ldots$ и $w' = 1nnn\ldots$ при $q = n$, $s_1 = 1$, $s_n = 0$;

(A8) $w = n1n1\ldots n1\ldots$ и $w' = 1n1n\ldots1n\ldots$ при $q = n, s_1 = 1, s_n = 1$.

При $s_p \neq s_{p+1}$ выполняется равенство $q' = q$ и

(B1) $w = w' = 111\ldots$ при $q = 0$, $s_1 = 0$, s_n любое;

(B2) $w = w' = 1nnn\ldots$ при $q = 0$, $s_1 = 1$, $s_n = 0$;

(B3) $w = w' = 1n1n1n\ldots$ при $q = 0$, $s_1 = 1$, $s_n = 1$;

(B4) $w = w' = nnn\ldots$ при $q = n$, $s_n = 0$, s_1 любое;

(B5) $w = w' = n111\ldots$ при $q = n$, $s_n = 1$, $s_1 = 0$;

(B6) $w = w' = n1n1n1\ldots$ при $q = n$, $s_n = 1$, $s_1 = 1$.

Замечаем, что в каждой из возможных ситуаций мультииндексы w, w' можно записать в виде $w = abbb\ldots$ и $w' = a'b'b'b'\ldots$, где

(A2) $a = 1$, $a' = n$, $b = b' = 11$;

(A3) $a = 1$, $a' = n$, $b = b' = nn$;

(A4) $a = 1$, $a' = n$, $b = n1n1$, $b' = 1n1n$;

(A6) $a = n$, $a' = 1$, $b = b' = 11$;

(A7) $a = n$, $a' = 1$, $b = b' = nn$;

(A8) $a = n$, $a' = 1$, $b = 1n1n$, $b' = n1n1$;

(B1) $a = a' = 1$, $b = b' = 11$;

(B2) $a = a' = 1$, $b = b' = nn$;

(B3) $a = a' = 1$, $b = b' = n1n1$;

(B4) $a = a' = n$, $b = b' = nn$;

(B5) $a = a' = n$, $b = b' = 11$;

(B6) $a = a' = n$, $b = b' = 1n1n$.

В случаях (A1) и (A5) в силу рациональности числа (2) имеются взаимно простые натуральные числа P, Q, при которых коэффициенты растяжения r_1, r_n подобий S_1, S_n связаны равенством $r_1^Q = r_n^P$. Положим

(A1) $a = 1$, $a' = n$, $b = 1\ldots1 \in I^{2Q}$, $b' = n\ldots n \in I^{2P}$;

(A5) $a = n$, $a' = 1$, $b = n\ldots n \in I^{2P}$, $b' = 1\ldots1 \in I^{2Q}$.

Отметим, что подобия S_b и S'_b во всех ситуациях сохраняют ориентацию, имеют неподвижные точки $S_a^{-1}(x_q)$ и $S_{a'}^{-1}(x_{q'})$ соответственно и их коэффициенты растяжения r_b и $r_{b'}$ совпадают, $r_b = r_{b'}$.

Жорданова дуга

$$\tau = S_{pa}(K) \subset S_p(K) = K_p$$

имеет конец в вершине x_p, а сохраняющее ориентацию подобие

$$A = S_p \circ S_a \circ S_b \circ S_a^{-1} \circ S_p^{-1}$$

с коэффициентом растяжения r_b и неподвижной точкой x_p таково, что

$$A(\tau) = (A \circ S_p \circ S_a)(K) = S_{pa}(S_b(K)) \subset S_{pa}(K) = \tau.$$

Аналогично жорданова дуга

$$\tau' = S_{(p+1)a'}(K) \subset S_{p+1}(K) = K_{p+1}$$

имеет конец в вершине x_p, а сохраняющее ориентацию подобие

$$A' = S_{p+1} \circ S_{a'} \circ S_{b'} \circ S_{a'}^{-1} \circ S_{p+1}^{-1}$$

с коэффициентом растяжения $r_{b'}$ и неподвижной точкой x_p таково, что $A'(\tau') \subset \tau'$. В силу жордановости циппера $\tau \cap \tau' = \{x_p\}$ и поэтому к дугам τ, τ' и соответствующим подобиям A, A' применима лемма 3.1. Так как $A = r_b e^{i\alpha}$ и $A' = r_b e^{i\alpha'}$, то в силу равенства (1) в лемме 3.1 получаем равенство $\alpha = \alpha' (\operatorname{mod} 2\pi)$ и совпадение этих подобий, $A' = A$.

Пусть $D = \operatorname{diam}(K)$, $\delta = \inf\{|x-y| : (x \in K_p \backslash A(\tau),\ y \in K_{p+1})$ или $(x \in K_p,\ y \in K_{p+1} \backslash A'(\tau'))\}$ и r — максимальный коэффициент растяжения подобий $S_1, \dots, S_n$. Для произвольно заданной пары точек $x \in K_p$, $y \in K_{p+1}$, из которых хотя бы одна отлична от x_p, найдем минимальный номер $k \geq 1$, при котором либо $x \notin A^k(\tau)$, либо $y \notin A^k(\tau')$. Если $k = 1$, то либо $x \in K_p \backslash A(\tau)$, либо $y \in K_{p+1} \backslash A(\tau')$, и в этом случае $|x-y| \geq \delta$. Для диаметра дуги $\Gamma_{xy} \subset K_p \cap K_{p+1}$ имеем оценку

$$\operatorname{diam}(\Gamma_{xy}) \leq \operatorname{diam}(K_p) + \operatorname{diam}(K_{p+1}) \leq 2rD \leq 2rD\delta^{-1}|x-y|. \tag{3}$$

Если $k > 1$, то $x \in A^{k-1}(\tau)$, $y \in A^{k-1}(\tau')$, при этом либо $x \notin A^k(\tau)$, либо $y \notin A^k(\tau')$. Тогда $\tilde{x} = A^{1-k}(x) \in \tau$, $\tilde{y} = A^{1-k}(y) \in \tau'$, причем либо $\tilde{x} \notin A(\tau)$, либо $\tilde{y} \notin A(\tau')$. Учитывая, что $\Gamma_{xy} = A^{k-1}(\Gamma_{\tilde{x}\tilde{y}})$, имеем равенства

$$\operatorname{diam}(\Gamma_{xy}) = r_b^{k-1} \operatorname{diam}(\Gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}), \quad |\tilde{x} - \tilde{y}| = |A^{1-k}(x) - A^{1-k}(y)| = r_b^{1-k}|x-y|,$$

использование которых в оценке (3) для пары точек $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ приводит к соотношению

$$\operatorname{diam}(\Gamma_{xy}) \leq 2rD\delta^{-1}|x-y|.$$

Таким образом, мы получаем выполнение условия (U) в лемме 2.1 для вершины x_p с константой $c_p = 2rD\delta^{-1}$. Лемма доказана.

Существенность рациональности числа (2) в случае вершины первого типа проиллюстрирована примером 2.3.

4. Основные теоремы о самоподобных жордановых цепперах. Приведенные в этом пункте теоремы являются результатом непосредственного применения лемм 2.1 и 3.2 к некоторым частным случаям, важным для приложений.

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathbf{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ — *самоподобный жорданов циппер на плоскости* $\mathbb{R}^2$ *с вершинами* $z_0, \ldots, z_n$. *Если число*

$$\frac{\operatorname{Ln}|z_1 - z_0| - \operatorname{Ln}|z_n - z_0|}{\operatorname{Ln}|z_n - z_{n-1}| - \operatorname{Ln}|z_n - z_0|}$$

рационально, то аттрактор $K = K(\mathbf{S})$ *имеет ограниченное искривление.*

Теорема 4.2. *Если самоподобный жорданов циппер* $\mathbf{S}$ *на плоскости* $\mathbb{R}^2$ *не имеет вершин первого типа, то его аттрактор* $K = K(\mathbf{S})$ *является дугой с ограниченным искривлением.*

Частными случаями теоремы 4.2 являются два следующих утверждения.

Теорема 4.3. *Если самоподобный жорданов циппер* $\mathbf{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ *на плоскости имеет сигнатуру* $(s_1, \ldots, s_n)$ *такую, что* $s_1 + s_n \geq 1$, *то его аттрактор является дугой с ограниченным искривлением.*

Теорема 4.4. *Если самоподобный жорданов циппер* $\mathbf{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ *на плоскости* $\mathbb{R}^2$ *имеет чередующуюся сигнатуру, т. е.* $s_p \neq s_{p+1}$ *для всех* $p = 1, \ldots, n-1$, *то его аттрактор является дугой с ограниченным искривлением.*

Примечание 1. В схеме, по которой выполняется построение циппера с чередующейся сигнатурой, усматривается обобщение на двумерный случай схемы *инверсного рефрена*, предложенной П. Тукиа в [11, с. 154] в качестве модификации конструкции Салема и использованной им при построении специальных квазисимметрических гомеоморфизмов отрезка на себя.

Примечание 2. Теоремы 4.1–4.4 не исчерпывают всех случаев, когда аттрактор жорданова циппера на плоскости имеет ограниченное искривление, так как это свойство может возникнуть в результате подходящего расположения вершин (например, когда все вершины лежат на одной прямой и аттрактор является отрезком).

Изложенные выше результаты частично анонсированы в [12, 13]. Авторы благодарны рецензенту за сделанные им замечания, которые способствовали существенному улучшению текста статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hutchinson J.* Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30, N 5. P. 713–747.
2. *Кроновер М. Р.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000.
3. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1966. Т. 1.
4. *Astala K.* Selfsimilar zippers // Holomorphic functions and moduli: Proc. Workshop, March 13–19, 1986, New York etc., 1988. V. 1. P. 61–73.
5. *Tukia P., Väisälä J.* Quasisymmetric embeddings of metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. 1980. V. 5. P. 97–114.
6. *Bandt Ch., Graf S.* Self-similar sets 7. A characterization of self-similar fractals with positive Hausdorff measure // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 114, N 4. P. 995–1001.
7. *Schief A.* Separation properties for self-similar sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 112, N 1. P. 111–115.
8. *Асеев В. В.* Критерий регулярности аттрактора системы сжимающих подобий в полном метрическом пространстве // Математические проблемы механики сплошных сред. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 2002. С. 3–7. (Динамика сплошной среды; вып. 120).
9. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969.
10. *Форстер О.* Римановы поверхности. М.: Мир, 1980.
11. *Tukia P.* Hausdorff dimension and quasiconformal embeddings // Math. Scand. 1989. V. 65. P. 152–160.

12. *Асеев В. В.* Самоподобные жордановы кривые (ципперы) на плоскости // 4-й Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике, посв. памяти М. А. Лаврентьева: Тез. докл. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2000. Ч. 1. С. 147–148.

13. *Aseev V. V.* On the regularity of self-similar zippers // Materials. The 6-th Russian — Korean Int. symp. on sci. and technology. KORUS-2002, June 24-30 2002, Novosibirsk State Techn. Univ., Russia. Новосибирск: НГТУ, 2002. Part 3 (Abstracts). P. 167.

Статья поступила 17 декабря 2002 г., окончательный вариант — 25 марта 2003 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
ase@math.ncs.ru

Тетенов Андрей Викторович
Горно-Алтайский гос. университет, ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 649000
atet@mail.gasu.ru

Кравченко Алексей Станиславович
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет, кафедра теории функций, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090