Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 517.929

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р. К. Романовский, Г. А. Троценко

Аннотация: Предложен вариант прямого метода Ляпунова для систем указанного в заголовке класса, в котором условие на производную функционала вдоль траекторий системы ослаблено по сравнению с известными результатами для уравнений с произвольными непрерывными коэффициентами.

Ключевые слова: уравнение нейтрального типа, почти периодические коэффициенты, вариант прямого метода Ляпунова, асимптотическая и слабая экспоненциальная устойчивости, оболочка почти периодической матрицы, разрешающая пара

В ряде работ [1–6] предложен вариант прямого метода Ляпунова для различных классов уравнений с почти периодическими коэффициентами, в котором условие на производную функции (функционала) Ляпунова вдоль траекторий системы ослаблено по сравнению с известными результатами для систем общего вида. В основе этих работ лежит следующее наблюдение. Для автономных систем $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, известен результат Е. А. Барбашина [7, гл. 1, § 3, с. 19], усиливающий теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости: для того, чтобы решение $x = 0$ было асимптотически устойчивым, достаточно, чтобы существовала положительно определенная функция $v(x)$ такая, что $\dot{v}(x) \leq 0$ и при этом поверхности уровня $v(x) = \mathrm{const} > 0$ не содержат целых траекторий. В работах [1, 2] замечено, что этот результат распространяется, с естественными видоизменениями в формулировке, на неавтономные системы $\dot{x} = f(x,t)$ при условии, что правая часть системы, функция Ляпунова $v(x,t)$ и ее частные производные первого порядка почти периодичны по t (в случае линейных систем речь идет об экспоненциальной устойчивости). Позднее в [3, 4] эти результаты были распространены на системы разностных уравнений, в [5, 6] — на системы функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа. Признаки устойчивости, полученные в указанных работах, являются новыми и в частном случае периодических коэффициентов.

В работе [1] центральным местом в обосновании признака устойчивости для системы $\dot{x} = A(t)x$ с почти периодической матрицей $A(t)$ является построение компакта E в прямом произведении фазового пространства $\mathbb{C}^N$ и банахова пространства почти периодических матриц порядка N с равномерной на оси нормой, а также непрерывного отображения $\mathscr{F} : E \to (0, \infty)$; вытекающая отсюда оценка $\inf \mathscr{F}(E) > 0$ позволила построить экспоненциальную оценку для нормы решения. Этот прием получил развитие в [3] для линейных разностных систем и в [6] для линейных дифференциально-разностных систем запаздывающего типа. В [6] схема построения «разрешающей» пары $(E, \mathscr{F})$ существенно усложнилась в связи с некомпактностью единичной сферы в пространстве начальных данных.

В данной работе предложенный в указанных работах вариант прямого метода Ляпунова распространен на линейные дифференциально-разностные системы нейтрального типа. Получен достаточный признак асимптотической устойчивости; при дополнительном условии, означающем, что система «достаточно близка» к системе запаздывающего типа, получен, как и в [6], достаточный признак слабой экспоненциальной устойчивости; термин «слабая» означает, что скорость экспоненциального убывания зависит от начального возмущения. Схема построения пары $(E, \mathscr{F})$ здесь существенно упрощена по сравнению с [6] (см. замечание в конце статьи).

Далее $|\cdot|$ — эрмитова норма в $\mathbb{C}^N$, так же обозначается согласованная с ней матричная норма, $a = \mathrm{const} > 0$, $J = [-a, 0]$, $C[J]$ — банахово пространство непрерывных функций $\varphi(\theta) : J \to \mathbb{C}^N$ с нормой $\|\varphi\| = \max|\varphi|$. Рассмотрим систему

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}[x(t) - g(x_t, t)] = f(x_t, t), \\ f(x_t, t) = A_0(t)x(t) + \sum_{k=1}^{n} A_k(t)x(t - a_k), \\ g(x_t, t) = \sum_{k=1}^{n} B_k(t)x(t - a_k). \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $a_k = \mathrm{const}$, $0 < a_1 < \dots < a_n = a$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in J$, A_k, B_k — почти периодические матрицы порядка N, при этом

$$\sup_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} |B_k(t)| \le \rho = \mathrm{const} < 1. \tag{2}$$

Под решением (1) понимается непрерывная функция $x(t) : [-a, \infty) \to \mathbb{C}^N$, удовлетворяющая при $t \ge 0$ интегральному уравнению

$$[x(\tau) - g(x_\tau, \tau)]_0^t = \int_0^t f(x_\tau, \tau)\, d\tau. \tag{3}$$

При условии (2) решение (3) однозначно определяется [8, гл. 12, 12.2] начальным условием $x_0(t) \in C[J]$.

Построим по набору почти периодических матриц $\Gamma_0(t), \dots, \Gamma_n(t)$ порядка N, где Γ_0 гладкая, $\Gamma_k^* = \Gamma_k$, $\Gamma_1 \ge \dots \ge \Gamma_n$, $\Delta_1 I \le \Gamma_k \le \Delta_2 I$, $\Delta_k = \mathrm{const} > 0$, функционал $C[J] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по формуле

$$V(\varphi, t) = [\varphi(0) - g(\varphi, t)]^* \Gamma_0(t)[\varphi(0) - g(\varphi, t)] + \sum_{k=1}^{n} \int_{-a_k}^{-a_{k-1}} \varphi^*(\theta)\Gamma_k(t + \theta)\varphi(\theta)\ d\theta \tag{4}$$

(здесь $a_0 = 0$). Производная функционала (4) вдоль траекторий системы (1) дается формулой

$$\dot V(x_t, t) = \Phi^* F \Phi, \quad F(t) = \begin{pmatrix} p & q \\ q^* & r \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где

$$\Phi = (x(t), x(t-a_1), \ldots, x(t-a_n))^T, \quad p = \dot{\Gamma}_0 + A_0^*\Gamma_0 + \Gamma_0 A_0 + \Gamma_1,$$
$$q = (q_1, \ldots, q_n), \quad q_k = \Gamma_0 A_k - A_0^*\Gamma_0 B_k - \dot{\Gamma}_0 B_k, \quad r = (r_{ij})_1^n, \tag{6}$$
$$r_{ij} = B_i^*\dot{\Gamma}_0 B_j - A_i^*\Gamma_0 B_j - B_i^*\Gamma_0 A_j - \delta_{ij}[\Gamma_i(t-a_i) - \Gamma_{j+1}(t-a_j)]$$

(здесь $\Gamma_{n+1} = 0$, δ_{ij} — символ Кронекера).

Будем говорить, что решение $x = 0$ системы (1) *слабо экспоненциально устойчиво*, если для любого решения $x(t)$

$$|x(t)| \le \mu \exp(-\nu t)\|x_0\|, \ t \ge 0, \quad \mu = \mu(x_0), \quad \nu = \nu(x_0). \tag{7}$$

Решение $x(t)$ будем называть *существенно ненулевым*, если $\|x_t\| > 0$ при $t \ge 0$; остальные решения обращаются в нуль, начиная с некоторого момента t.

Теорема. *Пусть существует набор матриц Γ_k с указанными выше свойствами такой, что*

1°) $F(t) \le 0$;

2°) *эрмитова форма* (5) *отлична от тождественного нуля на каждом существенно ненулевом решении: $\|x_t\| > 0 \Rightarrow \dot{V}(x_t, t) \not\equiv 0$.*

Тогда решение $x = 0$ асимптотически устойчиво. Если, кроме того, константа ρ в (2) *столь мала, что*

$$\rho(1-\rho)^{-1}\mu_0^2 < 1, \quad \mu_0 = (1-\rho)^{-1}\sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}[a + (1+\rho)^2]}, \tag{8}$$

то решение $x = 0$ слабо экспоненциально устойчиво.

Доказательству теоремы предпошлем леммы 1–4.

Лемма 1. *При условии* 1° *для любого решения уравнения* (3) *имеет место оценка*

$$|x(t)| \le \mu_0\|x_\tau\|, \quad 0 \le \tau \le t, \tag{9}$$

где μ_0 — константа (8).

Доказательство. Из (4) следует, что

$$\Delta_1(|\varphi(0)| - |g(\varphi, t)|)^2 \le V(\varphi, t) \le \Delta_2[a + (1+\rho)^2] \ \|\varphi\|^2. \tag{10}$$

При условии 1° для любого решения имеем $V(x_t, t) \le V(x_\tau, \tau)$ при $t \ge \tau$, поэтому из (10) при $\varphi = x_t$ с учетом $|g(x_t, t)| \le \rho\|x_t\|$ получим

$$|x(t)| - \rho\|x_t\| \le c_0\|x_\tau\|, \quad t \ge \tau, \quad c_0 = \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}[a + (1+\rho)^2]}. \tag{11}$$

Зафиксируем $\tau \ge 0$, $T > \tau$. Из (11) следует неравенство

$$|x(t)| - \rho \max_{[\tau-a, T]} |x(s)| \le c_0\|x_\tau\|, \quad t \in [\tau, T]. \tag{12}$$

Если максимум достигается в точке $s_0 \in [\tau - a, \tau]$, то из (12) имеем

$$|x(t)| \le (c_0 + \rho)\|x_\tau\|.$$

Если $s_0 \in (\tau, T]$, то, подставляя в (12) $t = s_0$, получим

$$\max_{[\tau-a, T]} |x(t)| \le (1-\rho)^{-1}c_0\|x_\tau\|.$$

Из последних двух неравенств и равенства $\max\{c_0+\rho, (1-\rho)^{-1}c_0\} = (1-\rho)^{-1}c_0 = \mu_0$ следует оценка (9). Лемма доказана.

Лемма 2. *При условии* 1° *все решения уравнения* (3) *равномерно непрерывны на полуоси* $t \geq 0$.

Доказательство. В силу леммы 1 при условии 1° для любого решения $x(t)$ и любого $\delta > 0$

$$\omega(\delta) = \sup_{\tau \geq 0} |x(\tau + \delta) - x(\tau)| < \infty.$$

Покажем, что для любой последовательности $\delta_i \downarrow 0$

$$\lim_{i \to \infty} \omega(\delta_i) = 0. \tag{13}$$

Достаточно рассмотреть два случая.

(i). Существуют такие $T > 0$ и номер i_0, что $\omega(\delta_i)$ при $i \geq i_0$ реализуется на $[0, T]$. В этом случае (13) следует из равномерной непрерывности $x(t)$ на $[0, T]$.

(ii). Ситуация (i) не имеет места, при этом начиная с некоторого номера

$$\omega(\delta_i) = \sup_{\tau \geq i} |x(\tau + \delta_i) - x(\tau)|.$$

Из (3) легко получить при $t \geq 0$ оценку

$$|x(t + \delta_i) - x(t)| \leq \rho\omega(\delta_i) + (L\delta_i + \varepsilon_i) \sup_{t \geq -a} |x(t)|, \tag{14}$$

где

$$L = \sup \sum_{k=0}^{n} |A_k(\tau)|, \quad \varepsilon_i = \sum_{k=1}^{n} \sup |B_k(\tau + \delta_i) - B_k(\tau)|$$

(супремум берется по $\tau \in \mathbb{R}$). Так как почти периодическая функция ограничена и равномерно непрерывна на оси [9, гл. 1, § 1, с. 8], то $L < \infty$ и $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$. Подставляя в (14) $t = \tau_0$, если $\omega(\delta_i)$ реализуется в точке $\tau_0 \geq i$, или переходя в левой части к пределу при $t_m \to \infty$, если $\omega(\delta_i)$ реализуется при $t_m \to \infty$, получим

$$\omega(\delta_i) \leq (1 - \rho)^{-1}(L\delta_i + \varepsilon_i) \sup_{\tau \geq -a} |x(\tau)|.$$

Ввиду ограниченности $x(t)$ отсюда следует (13). Лемма доказана.

Рассмотрим матрицы $A = (A_0, \dots, A_n)$, $B = (B_1, \dots, B_n)$, $\Gamma = (\Gamma_0, \dots, \Gamma_n)$, (A, B, Γ). Обозначим через $H = H(A, B, \Gamma)$ оболочку почти периодической матрицы (A, B, Γ), т. е. замыкание множества сдвигов в равномерной на оси метрике. В силу критерия Бохнера [9, гл. 1, § 2, с. 10] H — компакт в банаховом пространстве непрерывных ограниченных функций $\mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(N \times [3N + 2], \mathbb{C})$. Для троек $h = (\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{T}) \in H$ выполняются указанные выше свойства тройки (A, B, Γ), включая неравенство (2). Поставим в соответствие каждой тройке $h \in H$ систему

$$\frac{d}{dt}[x(t) - g_h(x_t, t)] = f_h(x_t, t) \tag{15}$$

и функционал $V_h(\varphi, t)$, где f_h, g_h, V_h вычисляются по формулам (1), (4) с заменой (A, B, Γ) на $(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{T})$. Производная $\dot{V}_h(x_t, t)$ вычисляется по формулам (5), (6) с такой же заменой.

Лемма 3. *Если тройка (A, B, Γ) удовлетворяет условиям 1°, 2° теоремы, то каждая тройка $h \in H$ удовлетворяет таким же условиям: $F_h(t) \le 0$, $\dot V_h(x_t, t) \not\equiv 0$ на каждом существенно ненулевом решении системы* (15).

Доказательство повторяет обоснование аналогичного утверждения из [6].

Рассмотрим наряду с системой (1) последовательность систем такого же вида

$$\frac{d}{dt}[x(t) - g_m(x_t, t)] = f_m(x_t, t), \quad m = 1, 2, \dots . \tag{16}$$

В следующей лемме предполагается, что коэффициенты (A_k, B_k), (A_k^m, B_k^m) систем (1), (16) — непрерывные на $[-a, \infty)$ матрицы.

Лемма 4. *Пусть $x(t)$, $x_m(t)$ — решения систем* (1), (16) *с начальными функциями $x_0(t)$, $x_{0,m}(t)$. Если $\left(A_k^m, B_k^m\right) \rightrightarrows (A_k, B_k)$ на $[-a, \infty)$ и $x_{0,m}(t) \rightrightarrows x_0(t)$ на J, то $x_m(t) \rightrightarrows x(t)$ на любом промежутке $[0, T]$.*

Доказательство. Обозначим $I_j = [ja_1 - a, ja_1]$, $J_j = [ja_1, (j+1)a_1]$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Для обоснования утверждения леммы достаточно проверить,что

$$x_m(t) \rightrightarrows x(t) \text{ на } I_j \Longrightarrow x_m(t) \rightrightarrows x(t) \text{ на } J_j. \tag{17}$$

Пусть верно соотношение в левой части (17), $t \in J_j$. Тогда $t - a_i \in I_j$, $i = \overline{1, n}$. Интегрируя равенства (1), (16) по отрезку $[ja_1, t]$ и вычитая почленно, получим для $\xi_m(t) = |x(t) - x_m(t)|$ с учетом (9) оценку

$$\xi_m(t) \le r_m + M \int\limits_{ja_1}^{t} \xi_m(s)\, ds, \tag{18}$$

где

$$M = \max_{J_j} \sum_{k=0}^{n} |A_k|, \quad r_m = (1 + 2\rho + aM) \max_{I_j} \xi_m(s) + \mu_0 \|x_0\| r'_m,$$

$$r'_m = a \sup \sum_{k=0}^{n} |A_k^m - A_k| + 2 \sup \sum_{k=1}^{n} \bigl|B_k^m - B_k\bigr|,$$

супремум берется по $[-a, \infty)$. С учетом соотношения в левой части (17) $r_m \to 0$ при $m \to \infty$. Интегральный оператор в правой части (18) оставляет инвариантным конус неотрицательных функций в банаховом пространстве непрерывных функций $J_j \to \mathbb{R}$ и имеет спектральный радиус 0. Применяя теорему об операторном неравенстве в банаховом пространстве с конусом [10, с. 85], получим: при $t \in J_j$

$$\xi_m(t) \le r_m e^{M(t - ja_1)} \le r_m e^{aM} \to 0 \quad (m \to \infty).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. **I.** Из леммы 1 следует: при условии 1° теоремы решение $x = 0$ системы (1) устойчиво по Ляпунову. Покажем, что при условиях 1°, 2° решение $x = 0$ асимптотически устойчиво: все решения $x(t)$ стремятся к 0 при $t \to +\infty$. Для этого покажем, что в противном случае существуют система (15) при некотором $h \in H$ и решение $y(t)$ этой системы такие, что $V_h(y_t, t) = \mathrm{const} > 0$, тем самым будет получено противоречие с леммой 3.

Предполагая противное, имеем, что для некоторой траектории $x(t)$ системы (1) множество Z ω-предельных точек содержит хотя бы одну точку, отличную от нуля. Так как Z — компакт в $\mathbb{C}^N$, существует наиболее удаленная от нуля точка

$z_0 \in Z$: $|z| \le |z_0|$ для всех $z \in Z$. Пусть z_0 реализуется на последовательности $t_m \uparrow +\infty$: $x(t_m) \to z_0$ при $m \to \infty$. Построим последовательность функций $z_m(\theta) = x(t_m + \theta) \in C[J]$. Так как в силу лемм 1, 2 и принципа компактности Арцела — Асколи множество $x_t(\theta)$, $t \ge 0$, — предкомпакт в $C[J]$, то существует подпоследовательность $z_{m_i}(\theta)$, сходящаяся в $C[J]$ к некоторой функции $z(\theta)$: $d_{m_i} = \|z_{m_i}(\theta) - z(\theta)\| \to 0$ при $m_i \to \infty$. Очевидно, что $z(\theta) \in Z$, при этом

$$|z(0)| = |z_0| = \max_J |z(\theta)| = \|z(\theta)\|.$$

Обозначим $v(t) = V(x_t, t)$. Проверим справедливость неравенства

$$v(t) \ge \frac{\Delta_1}{2}[(1-\rho)|z_0|]^2, \quad t \ge 0. \tag{19}$$

В силу условия $\dot V \le 0$ достаточно проверить (19) при $t = t_{m_i}$ со сколь угодно большими номерами. Из левого неравенства (10) вытекает, что

$$v(t_{m_i}) = V(z_{m_i}, t_{m_i}) \ge \Delta_1 \ [|z_{m_i}(0)| - |g(z_{m_i}, t_{m_i})| \ ]^2.$$

Имеем $|z_{m_i}(0)| \ge |z_0| - d_{m_i}$, $|g(z_{m_i}, t_{m_i})| \le \rho \|z_{m_i}\| \le \rho(|z_0| + d_{m_i})$, поэтому

$$v(t_{m_i}) \ge \Delta_1 \ [(1-\rho)|z_0| - 2d_{m_i} \ ]^2,$$

откуда ввиду $d_{m_i} \to 0$ следует (19) при $t = t_{m_i}$ начиная с некоторого номера. Из (19) с учетом монотонности $v(t)$ следует: существует

$$\lim_{t \to +\infty} V(x_t, t) = V_0 > 0. \tag{20}$$

Рассмотрим последовательность троек $h_i = (A^i, B^i, \Gamma^i) \in H$, получающуюся из тройки (A, B, Γ) заменой t на $t + t_{m_i}$. Выделяя сходящуюся подпоследовательность и сохраняя для нее те же обозначения, получим

$$h_i \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} h = (\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{T}) \in H. \tag{21}$$

Пусть $y(t)$ — решение системы (15) с коэффициентами $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ из h, отвечающее начальной функции $z(\theta)$, построенной выше. Так как функция $x_{m_i}(t) = x(t + t_{m_i})$ — решение системы (16) с коэффициентами A^i, B^i из h_i, отвечающее начальной функции $z_{m_i}(\theta)$, то в силу (21), сходимости $\|z_{m_i} - z\| \to 0$ и леммы 4 выводим, что

$$x(t + t_{m_i}) \rightrightarrows y(t) \quad \text{на любом отрезке } [0, T]. \tag{22}$$

Пусть $V_h(\varphi, t)$ — функционал, вычисляемый по формуле (4) с заменой (B, Γ) на $(\mathscr{B}, \mathscr{T})$ из h. Имеем

$$V_h(y_t, t) = a_i(t) + b_i(t) + c_i(t), \tag{23}$$

где $a_i = V_h(y_t, t) - V_{h_i}(y_t, t)$, $b_i = V_{h_i}(y_t, t) - V_{h_i}(x_{t+t_{m_i}}, t)$, $c_i = V_{h_i}(x_{t+t_{m_i}}, t)$. Из определения функционала $V_h(\varphi, t)$ при любом $h \in H$ следует: если $h_i \to h$ в H и $\varphi_i \to \varphi$ в $C[J]$, то $V_{h_i}(\varphi_i, t) \to V_h(\varphi, t)$ при каждом $t \in \mathbb{R}$. Поэтому переход к пределу в (23) при $i \to \infty$ с учетом (20)–(22) и равенства $V_{h_i}(x_{t+t_{m_i}}, t) = V(x_{t+t_{m_i}}, t + t_{m_i})$ дает: $V(y_t, t) = V_0 > 0$, что противоречит лемме 3. Первая часть утверждения теоремы доказана.

II. Покажем, что при условиях 1°, 2° и (8) для всех решений системы (1) имеет место оценка (7). Пусть $x(t)$ — существенно ненулевое решение системы

(1). Обозначим $\psi_m(\theta) = x(ma+\theta)$, $\theta \in J$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Из неравенства (8) следует: существует такое $\rho_0 \in (0,1)$, что

$$r_0 = \rho_0^{-1}\rho(1-\rho)^{-1}\mu_0^2 < 1. \tag{24}$$

Возможны два случая:

1) для любой последовательности номеров $m_k \uparrow \infty$ выполняется неравенство $\|\psi_{m_k}\| \cdot \|\psi_{m_{k-1}}\|^{-1} < \rho_0$;

2) существует последовательность $m_k \uparrow \infty$ такая, что $\|\psi_{m_k}\| \cdot \|\psi_{m_{k-1}}\|^{-1} \geq \rho_0$.

В первом случае оценка (7) очевидна. Далее в пп. 1–3 показано, что оценка (7) имеет место и во втором случае.

1. В случае 2 имеет место неравенство

$$\|\psi_m\| \cdot \|\psi_{m-1}\|^{-1} \geq \rho_0\mu_0^{-2}, \quad m > m_1. \tag{25}$$

В самом деле, в силу (9) имеем $\|\psi_i\| \leq \mu_0\|\psi_j\|$ при $i > j$. Пусть $m_k \leq m-1$, $m \leq m_{k+1}$. Если оба неравенства строгие, то, представляя левую часть (25) в виде произведения чисел $\|\psi_m\|\cdot\|\psi_{m_{k+1}}\|^{-1}$, $\|\psi_{m_{k+1}}\|\cdot\|\psi_{m_k}\|^{-1}$, $\|\psi_{m_k}\|\cdot\|\psi_{m-1}\|^{-1}$, получим требуемое, в остальных случаях оценка сохраняется ввиду $\mu_0 > 1$. Покажем, что при условиях (8), (25) функции

$$\varphi_m = \psi_m\|\psi_m\|^{-1}, \quad m \geq 0,$$

равностепенно непрерывны на J. Очевидно, достаточно считать $m \geq m_1$. Зафиксируем $\delta \in (0,a)$ и обозначим

$$\alpha_m(\delta) = \sup_{\theta_1,\theta_2} |\psi_m(\theta_1) - \psi_m(\theta_2)|, \quad \beta_m(\delta) = \sup_{\theta_1,\theta_2} |\varphi_m(\theta_1) - \varphi_m(\theta_2)|,$$

$\theta_j \in J$, $|\theta_1 - \theta_2| = \delta$, и пусть $\beta(\delta) = \sup\limits_{j \geq m_1} \beta_j(\delta)$. Покажем, что

$$\delta_i \to 0 \Longrightarrow \beta(\delta_i) \to 0. \tag{26}$$

Из (3) с учетом (2), (9) легко получить: при любых $\theta_1, \theta_2 \in J$, $|\theta_1 - \theta_2| = \delta_i$,

$$|\psi_m(\theta_1) - \psi_m(\theta_2)| \leq \rho[\alpha_{m-1}(\delta_i) + \alpha_m(\delta_i)] + \mu_0(L\delta_i + \varepsilon_i)\|\psi_{m-1}\|,$$

где L, ε_i — константы из (14). После почленного деления на $\|\psi_m\|$ получим

$$|\varphi_m(\theta_1) - \varphi_m(\theta_2)| \leq \rho\beta_m(\delta_i) + [\rho\beta_{m-1}(\delta_i) + \mu_0(L\delta_i + \varepsilon_i)]\|\psi_{m-1}\| \cdot \|\psi_m\|^{-1},$$

откуда с учетом (25) и $\beta_{m-1}(\delta_i) \leq \beta(\delta_i)$ следует, что

$$\beta_m(\delta_i) \leq r_0\beta(\delta_i) + \rho_0^{-1}\mu_0^3(L\delta_i + \varepsilon_i), \quad m > m_1, \tag{27}$$

где r_0 — константа (24). Достаточно, как при доказательстве леммы 2, рассмотреть две возможности.

1. Существуют такие номера i_0, $j_0 \geq m_1$, что $\beta(\delta_i)$ при $i \geq i_0$ реализуется на одной из функций $\varphi_j(\theta)$, $m_1 \leq j \leq j_0$. В этом случае (26) следует из равностепенной непрерывности на J конечного числа функций φ_j.

2. Ситуация 1 не имеет места, при этом начиная с некоторого номера i_0 имеет место равенство $\beta(\delta_i) = \sup\limits_{j \geq j_i} \beta_j(\delta_i)$, где $j_i \to \infty$. Подставляя в (27) $m = j$, если $\beta(\delta_i) = \beta_j(\delta_i)$, $j \geq j_i$, или переходя в (27) при $m = j_p$ к пределу при

$j_p \to \infty$, если $\beta(\delta_i) = \lim\limits_{j_p \to \infty} \beta_{j_p}(\delta_i)$, и учитывая $r_0 < 1$, получим $\beta(\delta_i) \le \rho_0^{-1}(1 - r_0)^{-1}\mu_0^3(L\delta_i + \varepsilon_i)$. Соотношение (26) доказано.

Обозначим через S замыкание множества $\{\varphi_m(\theta),\ m \ge 0\}$ в $C[J]$; очевидно, что S — компакт на единичной сфере в $C[J]$. Поэтому множество $E = H \times S$ — компакт в метрике $\operatorname{dist}[(h_1, \varphi_1), (h_2, \varphi_2)] = \sup\limits_{\mathbb{R}} |h_1 - h_2| + \|\varphi_1 - \varphi_2\|$.

2. Поставим в соответствие каждой паре $(h, \varphi) \in E$ решение $x(t, h, \varphi)$ системы (15) с начальным значением φ и функцию $v(t, h, \varphi)$ — значение функционала $V_h(\psi, t)$ при $\psi(\theta) = x(t + \theta, h, \varphi)$. Из очевидной оценки $V_h(\psi, t) \ge \Delta_1 \int\limits_{-a}^{0} |\psi|^2 \, d\theta$, условий 1°, 2° теоремы и леммы 3 следует, что

$$v(t, h, \varphi) > 0, \quad \dot v(t, h, \varphi) \le 0, \quad \dot v(t, h, \varphi) \not\equiv 0 \quad (t \ge 0). \tag{28}$$

Введем множества $M_{h,\varphi} = \{t \ge 0 : \dot v(t, h, \varphi) < 0\}$. Нетрудно убедиться, что функция $E \to \mathbb{R}$, определяемая формулой $r(h, \varphi) = \inf M_{h,\varphi}$, полунепрерывна сверху, поэтому ограничена сверху. Отсюда следует существование такого $T > 0$, что

$$M_{h,\varphi} \cap [0, T] \ne \varnothing, \quad (h, \varphi) \in E. \tag{29}$$

Обозначим

$$\mathscr{F}(h, \varphi) = \int\limits_0^T \frac{-\dot v(t, h, \varphi)}{v(t, h, \varphi)} dt. \tag{30}$$

В силу (28), (29), непрерывной зависимости на $[0, T]$ решений системы (15) от коэффициентов и начальных данных (лемма 4) и функционала V_h от (h, φ) формула (30) задает непрерывное отображение $\mathscr{F} : E \to (0, \infty)$. Так как E — компакт, имеем

$$\nu_0 = \inf \mathscr{F}(E) > 0. \tag{31}$$

3. Обозначим

$$I(t) = \int\limits_0^t \frac{\dot V(x_\tau, \tau)}{V(x_\tau, \tau)} \, d\tau, \quad t > 0,$$

где $x(t)$ — исходное решение системы (1), V — функционал (4). Пусть $t \in [mT, (m+1)T]$. Тогда

$$I \le \sum_{k=1}^m I_k, \quad I_k = \int\limits_{(k-1)T}^{kT} \frac{\dot V(x_\tau, \tau)}{V(x_\tau, \tau)} \, d\tau \tag{32}$$

(учтено, что подынтегральная функция неположительна). Разделим числитель и знаменатель дроби в (32) на $\|x_\tau\|^2$ и выполним замену $\tau \sim \tau + (k-1)T$. После вычислений получим

$$I_k = -\mathscr{F}(h_k, \varphi_k), \tag{33}$$

где $(h_k, \varphi_k) = [(A, B, \Gamma)_{t=\tau+(k-1)T},\ x_{(k-1)T}\|x_{(k-1)T}\|^{-1}] \in E$. Из (31)–(33) следует оценка

$$I(t) \le -m\nu_0 \le \nu_0(-T^{-1}t + 1).$$

Далее, вычисляя интеграл $I(t)$ и оценивая $V(x_t, t)$, $V(x_0, 0)$ соответственно снизу и сверху с помощью оценок (10), получим аналогично (11) неравенство

$$|x(t)| - \rho\|x_t\| \le \mu_0 \exp(-(2T)^{-1}\nu_0 t)\|x_0\|, \quad \mu_0 = c_0 \exp(\nu_0/2). \tag{34}$$

Выберем число ν так, что $0 < \nu < \min\{(2T)^{-1}\nu_0,\ a^{-1}\ln\rho^{-1}\}$. Тогда тем более

$$|x(t)| - \rho\|x_t\| \le \mu_0 \exp(-\nu t)\|x_0\|. \tag{35}$$

Покажем, что верна оценка (7) с такой константой ν и некоторой $\mu = \mu(\nu)$. Рассмотрим снова функции $\psi_m(\theta)$, $m \ge 0$, и пусть $t_m \in [(m-1)a, ma]$ таково, что $\|\psi_m\| = |x(t_m)|$. Подставляя в (35) $t = t_m$, с учетом неравенств $\|x_{t_m}\| \le \max\{\|\psi_{m-1}\|, \|\psi_m\|\}$, $t_m \ge (m-1)a$ получим

$$\|\psi_m\| - \rho\max\{\|\psi_{m-1}\|, \|\psi_m\|\} \le \mu_0 e^{-a\nu(m-1)}\|x_0\|. \tag{36}$$

Обозначим $y_m = |\psi_m\|\ \|x_0\|^{-1}e^{a\nu m}$. Для обоснования оценки (7) достаточно показать, что последовательность y_m ограничена. Зафиксируем $m_0 \in \mathbb{Z}_+$. Из (36) следует, что

$$y_m - \rho\max\{e^{a\nu}y_{m-1}, y_m\} \le \mu_0 e^{a\nu}$$

при любом $m \le m_0$, поэтому тем более

$$y_m - \rho_1\max\{y_0, \dots, y_{m_0}\} \le \mu_0 e^{a\nu}, \quad \rho_1 = \rho e^{a\nu}.$$

В силу выбора ν имеем $\rho_1 < 1$. Подставляя значение m, на котором реализуется максимум, получим

$$\max\{y_0, \dots, y_{m_0}\} \le (1-\rho_1)^{-1}\mu_0 e^{a\nu}.$$

Так как правая часть не зависит от выбора m_0, это неравенство доказывает теорему.

Замечание. В [6] для системы запаздывающего типа построение «разрешающей» пары $(E, \mathscr{F})$ в отличие от данной работы не привязано к конкретному решению. Это объясняется тем, что там была предпринята попытка получить оценку (7) с константами μ, ν, не зависящими от начальной функции x_0. Попытка не реализовалась; причину авторы связывают с некомпактностью единичной сферы в $C[J]$. В данной работе компакт E строится «сразу» по фиксированному решению $x(t, x_0)$, поэтому μ, ν в (7) зависят от x_0. При этом процедура построения пары $(E, \mathscr{F})$ существенно упростилась.

Отметим, что в частном случае системы запаздывающего типа ($g = 0$) оценка (34) является окончательной, для системы нейтрального типа (1) на скорость экспоненциального убывания влияет помимо начальной функции константа ρ в оценке (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Добровольский С. М., Котюргина А. С., Романовский Р. К.* Об устойчивости решений линейных систем с почти периодической матрицей // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 6. С. 10–14.
2. *Добровольский С. М., Романовский Р. К.* Метод функций Ляпунова для почти периодических систем // Мат. заметки. 1997. Т. 62, № 1. С. 151–153.
3. *Кириченова О. В., Котюргина А. С., Романовский Р. К.* Метод функций Ляпунова для систем линейных разностных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 170–174.
4. *Кириченова О. В.* Об устойчивости решений нелинейных почти периодических систем разностных уравнений // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 45–48.
5. *Алексенко Н. В.* Устойчивость решений почти периодических систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Изв. вузов. Математика. 2000. № 2. С. 3–6.

6. *Алексенко Н. В., Романовский Р. К.* Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 2. С. 147–153.

7. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.

8. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

9. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.

10. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

Статья поступила 3 августа 2001 г., окончательный вариант — 9 июля 2002 г.

Романовский Рэм Константинович,
Омский гос. технический университет, кафедра высшей математики,
пр. Мира, 11, Омск 644050
`email@omgtu.omskelecom.ru,  root@omgtu.omsk.su`

Троценко Галина Алексеевна
Омский гос. технический университет, кафедра высшей математики,
пр. Мира, 11, Омск 644050