Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 517.547.3+519.652

ДЛЯ ГОЛОМОРФНОЙ В ОБЛАСТИ ФУНКЦИИ ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН В ФОРМУЛЕ ТЕЙЛОРА ДОПУСКАЕТ ЗАПИСЬ В ФОРМЕ ЛАГРАНЖА

Е. И. Радзиевская, Г. В. Радзиевский

Аннотация: Показано, что для голоморфной функции остаточный член в формуле Тейлора допускает запись в форме Лагранжа, если аргумент функции находится достаточно близко от точки интерполяции. При этом значение производной в остаточном члене можно взять из пересечения круга, диаметром которого является точка интерполяции и аргумент функции, с углом сколь угодно малого раствора и с биссектрисой, совпадающей с лучом, исходящим из точки интерполяции и проходящим через аргумент функции.

Ключевые слова: голоморфная функция, формула Тейлора, остаточный член, теорема о среднем

§ 1. Постановка задачи и формулировки основных следствий

Локальным теоремам о среднем для векторнозначных функций и, в частности, для голоморфных функций посвящено достаточно много работ (см., например, [1–6] и имеющуюся там большую библиографию, результаты перечисленных в ней работ обобщаются или уточняются теоремами из [1–6]). Данная статья непосредственно примыкает к этой тематике, и в ней, по-видимому, впервые изучена задача о представлении остаточного члена в формуле Тейлора для голоморфной функции в форме Лагранжа. Устанавливается, когда и как возможно перенести хорошо известную в случае вещественнозначных и заданных на отрезке вещественной оси функций формулу на случай голоморфных в комплексной области функций. Приведенные здесь теоремы не только содержат соответствующие результаты из [1, 2, 4–6], но из них, кроме того, следует такой интуитивно понятный факт: если f — голоморфная в окрестности вещественной оси функция, принимающая при вещественных значениях аргумента вещественные значения, то в остаточном члене в формуле Тейлора, записанном в форме Лагранжа, среднее значение можно локализовать более точно, нежели отказавшись от требования голоморфности f (см. следствие 1 и пример 1). Этот факт также, по-видимому, отмечен здесь впервые. Сравнение с ранее известными результатами, относящимися к настоящей работе, кратко дано по ходу изложения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект Ф7/329–2001).

Введем обозначения, используемые в работе. Как обычно, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ — множества вещественных, целых и целых положительных (натуральных) чисел соответственно. Везде далее f — голоморфная в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функция, ∂D — граница D, а $\overline{D}$ — замыкание D. Через $U(\alpha; r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r\}$ обозначен открытый круг с центром в точке α и радиуса $r > 0$, а через $\arg z$ — аргумент отличного от нуля комплексного числа z и $-\pi < \arg z \le \pi$. Считаем, что точки z_0 и z_1 принадлежат области D.

В работе изучен вопрос: когда в формуле Тейлора

$$f(z_1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z_1 - z_0)^k}{k!} f^{(k)}(z_0) + Q_n(z_0; z_1; f) \tag{1}$$

(здесь $n \in \mathbb{N}$) остаточный член $Q_n(z_0; z_1; f)$ представим в форме Лагранжа

$$Q_n(z_0; z_1; f) = \frac{(z_1 - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \tag{2}$$

и где расположено ξ?

Простые примеры показывают, что запись остатка в форме (2) в общем случае невозможна. Например, для $n = 1$ формулы (1) и (2) запишутся в виде

$$f(z_1) - f(z_0) = (z_1 - z_0) f'(\xi). \tag{3}$$

Теперь, следуя работе [4], возьмем $f(z) = e^{iz}$ и $z_1 = z_0 + 2\pi$. Тогда левая часть в (3) равна нулю, а правая отлична от нуля, каково бы ни было ξ из $\mathbb{C}$. Кроме того, в [7, гл. 3, пример 9] показано, что для $f(z) = e^{iz}$ и произвольных вещественных z_0, z_1 с $z_0 \ne z_1$ не существует вещественного ξ, для которого выполняется равенство (3). Тем не менее в [4] доказана теорема (дополняющая теорему 10 из [3]), гарантирующая существование хотя бы одного ξ из круга $U(z_0; |z_1 - z_0|)$, для которого справедлива формула (3), если только z_1 достаточно близко расположено к z_0 и $z_1 \ne z_0$, причем в случае $f''(z_0) \ne 0$ это ξ можно выбрать уже из круга $U((z_1 + z_0)/2; |z_1 - z_0|/2)$ (см. случай 1 в доказательстве теоремы из [4]). Этот результат был уточнен в [5], где снято условие $f''(z_0) \ne 0$ для локализации ξ в круге $U((z_1 + z_0)/2; |z_1 - z_0|/2)$ для формулы (3). В настоящей работе установлена значительно более сильная локализация ξ, нежели в [4] и [5], причем для остаточного члена в формуле Тейлора, записанного в форме Лагранжа (2). А именно, справедлива

Теорема 1. *Пусть f — голоморфная в области D функция. Тогда для любого $z_0 \in D$ и каждого $\theta \in (0; \pi/2]$ найдется такое положительное $r := r(f, n, z_0, \theta)$, что круг $U(z_0; r)$ лежит в D и если $|z_1 - z_0| < r$, $z_1 \ne z_0$, то в секторе*

$$U\left(\frac{z_1 + z_0}{2}; \frac{|z_1 - z_0|}{2}\right) \cap \left\{ z \in \mathbb{C} : z \ne z_0, \left| \arg \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| < \theta \right\} \tag{4}$$

найдется по крайней мере одно ξ, для которого справедлива формула (2). Если, кроме того, f не является полиномом степени, меньшей или равной n, то найдется такое положительное $\theta_0 := \theta_0(f, n, z_0) \le \pi/2$, что при $\theta \in (0; \theta_0]$ справедливо предыдущее утверждение, но указанное в нем ξ из (4) уже единственно.

Очевидно, что при $n = 1$ и $\theta = \pi/2$ из теоремы 1 вытекают результаты работ [4, 5]. Следует отметить, что во втором утверждении теоремы 1 имеется дополнительное требование по сравнению с ее первым утверждением и с теоремами из [4, 5]. А именно, предполагается, что f не является полиномом степени, меньшей или равной n. Но это требование необходимо для справедливости второго утверждения теоремы 1 (как и аналогичные требования в последующих результатах работы, где утверждается единственность ξ или устанавливается их количество), поскольку в противном случае формула (2) (а значит, в случае $n = 1$ и формула (3)) справедлива при произвольном $\xi \in \mathbb{C}$, т. е. нет единственности ξ, которую гарантирует второе утверждение теоремы 1. Такое же замечание можно сделать и об ограничении $\theta \le \theta_0$, присутствующем во втором утверждении теоремы 1 (см. теорему 3, следствием которой является теорема 1). Заметим, что $\theta_0 := \theta_0(f, n, z_0)$ явно выписано при выводе теоремы 1 из теоремы 3, причем указанное там θ_0 увеличить нельзя. Отметим еще одно ограничение $z_1 \ne z_0$, имеющееся в теореме 1 и пропущенное в [4] и [5] и ряде других работ (формально без него формулировки соответствующих утверждений неверны, так как запись открытых кругов, где локализовано ξ, теряет смысл). Но случай $z_1 = z_0$ тривиален, поскольку при $z_1 = z_0$ формулы (2) и (3) справедливы при любом $\xi \in D$.

Дадим теперь «вещественную» версию второго утверждения теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть a и b вещественны, $a < b$, а f — голоморфная в окрестности отрезка $[a; b]$ функция, не являющаяся полиномом степени, меньшей или равной n, причем $f(x)$ вещественны, когда $x \in [a; b]$. Тогда для любого $z_0 \in [a; b]$ найдется такое положительное $r := r(f, n, z_0)$, что отрезок $[z_0 - r; z_0 + r]$ лежит в области голоморфности (т. е. области определения) функции f и для любого вещественного $z_1 \in [z_0 - r; z_0 + r]$ и $z_1 \ne z_0$ найдется лишь одно вещественное ξ, принадлежащее интервалу вещественной оси, расположенному между точками z_0 и z_1, для которого справедлива формула* (2).

Доказательство. Пусть D — область голоморфности f. Покажем, что на интервале $(a_1; b_1) := D \cap \mathbb{R}$ (содержащем отрезок $[a; b]$) функция f принимает вещественные значения. Для этого равенством $f_1(z) := (f(z) + \overline{f(\bar z)})/2$ зададим голоморфную в области $D_1 := \{z \in D : \bar z \in D\}$ функцию f_1, принимающую в интервале $(a_1; b_1)$ вещественные значения. Поскольку $(a_1; b_1) = D_1 \cap \mathbb{R}$ и $f(z) = f_1(z)$ при $z \in [a; b]$, то на основании теоремы единственности для голоморфных функций $f(z) = f_1(z)$ при $z \in D_1$ $(\subseteq D)$ и, в частности, при $z \in (a_1; b_1)$. Применяя теперь при достаточно малом положительном θ второе утверждение теоремы 1, находим такое положительное $r := r(f, n, z_0)$, что если $|z_1 - z_0| < r$ и $z_1 \ne z_0$, то в секторе (4) существует единственное ξ, для которого справедлива формула (2). Но так как f принимает вещественные значения на интервале $(a_1; b_1)$, а по условию $z_1 \in (a_1; b_1)$, то согласно классической теореме Лагранжа о записи остаточного члена в формуле Тейлора это единственное ξ будет вещественным.

Следствие 1 в случае голоморфной функции дополняет классическую теорему Лагранжа, поскольку гарантирует единственность ξ в формуле (2) для достаточно близких к z_0 вещественных z_1. Отметим, что такой единственности в теореме Лагранжа нет, даже если потребовать бесконечную дифференцируемость функции. Покажем это на примере.

Пример 1. Равенствами $f(x) := (\sin 1/x) \exp(-1/x^2)$, $x \ne 0$, и $f(0) := 0$ зададим бесконечно дифференцируемую на $\mathbb{R}$ функцию f. Тогда $f(1/\pi k_0) - f(0) = 0$ для каждого $k_0 \in \mathbb{N}$, а согласно теореме Ролля внутри каждого интервала $(1/\pi(k+1); 1/\pi k)$, $k \in \mathbb{N}$, найдется такая точка ξ_k, что $f'(\xi_k) = 0$. Значит, если в формуле (3) считать f построенной здесь функцией и взять $z_0 = 0$, а $z_1 = 1/\pi k_0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, то в интервале $(z_0; z_1)$ существует бесконечно много чисел ξ, для которых справедлива формула (3). Тем самым никакая близость z_1 к z_0 не гарантирует единственности ξ в (3).

В теореме 1 точка z_0 фиксирована и ей соответствует фиксированный круг $U(z_0; r)$, для точек z_1 из которого справедлива формула (2). Понятно, что радиус r такого круга при изменении z_0 может быть сколь угодно малым. Тем не менее при дополнительном условии на функцию f можно утверждать существование одного r, для которого формула (2) справедлива, если только $|z_1 - z_0| < r$ и $z_1 \neq z_0$, а z_0 пробегает некоторый компакт, принадлежащий области D. Сформулируем соответствующий результат.

Теорема 2. *Пусть f — голоморфная в области D функция, компакт K целиком лежит в D, $n \in \mathbb{N}$ и $f^{(n+1)}(z) \neq 0$ при $z \in K$. Тогда для любого положительного $\delta \le n/(n+1)$ найдется такое положительное $r := r(f, n, K, \delta)$, что все круги $U(z_0; r)$ при $z_0 \in K$ лежат в D и если $z_0 \in K$, $|z_1 - z_0| < r$ и $z_1 \neq z_0$, то в круге $U(z_0; |z_1 - z_0|)$ существует единственное ξ, для которого справедлива формула* (2), *причем это ξ локализовано в круге $U(z_0 + (z_1 - z_0)/(n+1); \delta|z_1 - z_0|)$.*

По-видимому, теорема 2 — первое утверждение, дающее «глобальную» формулировку теоремы о среднем (т. е. в случае $n = 1$, а значит, в случае формулы (3)) для комплекснозначных функций. Кроме того, если сформулировать теорему 2 в ее «вещественнозначной» версии (как это сделано в следствии 1 из теоремы 1), то для вещественных z_1, достаточно близко расположенных к z_0, она даст значительно более сильную локализацию ξ в формулах (2) и (3), нежели известные утверждения классического анализа.

Теперь коротко о дальнейшей структуре работы, состоящей еще из двух параграфов. В § 2 доказана теорема 3, из которой затем выводятся теоремы 1 и 2. В теореме 3 фактически показано, как в терминах функции f вычислить число r, чтобы при $|z_1 - z_0| < r$ выполнялась формула (2). При этом указана система кругов сколь угодно малого радиуса, находящихся в $U(z_0; |z_0 - z_0|)$, где расположены ξ из (2). Используя метод, развитый в § 2, в § 3 мы существенно обобщаем теоремы о среднем из работ [1, 2, 6]. Следует отметить, что утверждения этих работ и § 3 данной статьи отличаются от утверждений работ [4, 5] и § 1, 2, поскольку точкой, в окрестности которой гарантируется справедливость теоремы о среднем, является уже не z_0, а середина отрезка $[z_0; z_1]$. Кроме того, запись теоремы о среднем в [2, 6] и в § 3 совершенно иная, нежели в формулах (1), (2) или (3). (Она в работах [2, 6] соответствует формуле Тейлора для нечетной относительно середины отрезка $[z_0; z_1]$ функции.) В конце § 3, следуя работе [4], рассмотрим пример об области применимости формулы о среднем (3) к функции $z \mapsto e^z$, $z \in \mathbb{C}$, и покажем, что из общей теоремы, установленной в § 3, эту область можно взять значительно более широкой, чем указанная в [4].

§ 2. Основная теорема и вывод из нее теорем 1 и 2

Сформулируем и докажем теперь один из главных результатов работы.

Теорема 3. *Пусть голоморфная в области D функция f не является полиномом степени, меньшей или равной n, точки z_0 и z_1 принадлежат D и $z_1 \neq z_0$, а s — наименьшее из натуральных чисел, для которого $f^{(n+s)}(z_0) \neq 0$. Предположим, что замыкание круга $U(z_0; |z_1 - z_0|)$ целиком лежит в D и для некоторого* *положительного δ, удовлетворяющего неравенству*

$$\delta \le 1 - \binom{n+s}{n}^{-1/s}, \tag{5}$$

а в случаях $s = 2, 3, \dots$, то и неравенству

$$\delta \le \binom{n+s}{n}^{-1/s} \sin\frac{\pi}{s}, \tag{6}$$

выполнено условие

$$\left(1 + \binom{n+s+1}{n}^{-1}\right)\frac{|z_1 - z_0|}{s+1}\Big(\sup_{\zeta\in U(z_0;|z_1-z_0|)} |f^{(n+s+1)}(\zeta)|\Big) < \delta^s |f^{(n+s)}(z_0)|. \tag{7}$$

Тогда в круге $U(z_0; |z_1 - z_0|)$ найдется ровно s различных ξ, для которых справедлива формула (2), *причем по одному в каждом из кругов*

$$B_l := U\left(z_0 + (z_1 - z_0)\binom{n+s}{n}^{-1/s} e^{i\frac{2\pi l}{s}}; \delta|z_1 - z_0|\right), \quad l = 1, \dots, s. \tag{8}$$

Поясним вначале условия (5) и (6) относительно параметра δ, так как вытекающие из этих условий свойства кругов B_l используются в доказательствах теорем 3 и 1.

Замечание 1. Условие (5) необходимо для того, чтобы каждый из кругов B_l находился в круге $U(z_0; |z_1 - z_0|)$, а условие (6) — чтобы эти круги не пересекались. При этом из условия (6) следует, что круг B_l находится в угле

$$\left\{z \in \mathbb{C} : z \ne z_0, \left|\arg\left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} e^{-i\frac{2\pi l}{s}}\right)\right| < \arcsin\left(\binom{n+s}{n}^{1/s}\delta\right)\right\}. \tag{9}$$

Доказательство теоремы 3. Поскольку формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме справедлива для функций со значениями в банаховом пространстве (см., например, [8, п. 12.54]), то в случае, когда отрезок $[z_0; z_1]$, соединяющий точки z_0 и z_1, целиком лежит в области голоморфности D функции f, выражение для $Q_n(z_0; z_1; f)$ из (1) всегда можно записать в виде

$$Q_n(z_0; z_1; f) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{[z_0;z_1]} f^{(n)}(\tau)(z_1 - \tau)^{n-1}\, d\tau, \tag{10}$$

где под $\int\limits_{[z_0;z_1]}$ понимается интеграл по отрезку $[z_0; z_1]$ с началом в точке z_0 и с концом в точке z_1. Сравнивая выражения (2) и (10), заключаем, что утверждение теоремы 3 равносильно тому, что функция F, заданная равенством

$$F(z) := f^{(n)}(z) - \frac{n}{(z_1 - z_0)^n}\int\limits_{[z_0;z_1]} f^{(n)}(\tau)(z_1 - \tau)^{n-1}\, d\tau,$$

имеет по одному нулю в каждом из кругов B_l, $l = 1, \dots, s$, а других нулей в круге $U(z_0; |z_1 - z_0|)$ у нее нет.

Введем полином P и функцию G, заданные равенствами

$$P(z) := \frac{(z_1 - z_0)^s}{s!} f^{(n+s)}(z_0)\left(\left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^s - \binom{n+s}{n}^{-1}\right), \tag{11}$$

$$G(z) := f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0) - \frac{(z-z_0)^s}{s!} f^{(n+s)}(z_0), \tag{12}$$

и число

$$c := -\frac{n}{(z_1-z_0)^n} \int\limits_{[z_0;z_1]} G(\tau)(z_1-\tau)^{n-1}\,d\tau. \tag{13}$$

Одним из основных моментов доказательства является представление

$$F = P + G + c,$$

которое устанавливается непосредственной проверкой.

Поскольку для z, находящихся вне каждого из кругов B_l, справедлива оценка

$$\left| \frac{z-z_0}{z_1-z_0} e^{-i\frac{2\pi l}{s}} - \binom{n+s}{n}^{-1/s} \right| \geq \delta, \quad l = 1, \ldots, s,$$

то из вида (11) полинома P заключаем, что

$$|P(z)| \geq \delta^s \frac{|z_1-z_0|^s}{s!} |f^{(n+s)}(z_0)|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{s} B_l \right). \tag{14}$$

По условию теоремы если $s > 1$, то $f^{(n+1)}(z_0) = \cdots = f^{(n+s-1)}(z_0) = 0$, поэтому функция G, заданная формулой (12), совпадает с остаточным членом $Q_{s+1}(z_0; z; f^{(n)})$ в формуле Тейлора для функции $f^{(n)}$. Записав этот остаточный член в интегральной форме и предположив, что $z \in \overline{U(z_0; |z_1-z_0|)}$, оценим его. Тогда

$$|G(z)| = \frac{1}{s!} \left| \int\limits_{[z_0;z]} f^{(n+s+1)}(\tau)(z-\tau)^s\,d\tau \right| \leq \frac{|z-z_0|^{s+1}}{(s+1)!} \Big(\sup_{\zeta \in U(z_0;|z_1-z_0|)} |f^{(n+s+1)}(\zeta)| \Big) \tag{15}$$

и, в частности,

$$|G(z)| \leq \frac{|z_1-z_0|^{s+1}}{(s+1)!} \Big(\sup_{\zeta \in U(z_0;|z_1-z_0|)} |f^{(n+s+1)}(\zeta)| \Big), \quad z \in \overline{U(z_0; |z_1-z_0|)}. \tag{16}$$

Подставляя соотношения (15) в определение (13) числа c, имеем

$$|c| \leq \frac{n}{(s+1)!|z_1-z_0|^n} \Big(\sup_{\zeta \in U(z_0;|z_1-z_0|)} |f^{(n+s+1)}(\zeta)| \Big) |I|, \tag{17}$$

где

$$I := \int\limits_{[z_0;z_1]} |\tau - z_0|^{s+1} |z_1-\tau|^{n-1}\,d\tau.$$

Делая замену $\tau = z_0 + (z_1-z_0)t$ и пользуясь формулами 8.380.1 и 8.384.6 из [9], получаем

$$|I| = |z_1-z_0|^{n+s+1} \int\limits_0^1 t^{s+1}(1-t)^{n-1}\,dt = \frac{(s+1)!(n-1)!}{(n+s+1)!}. \tag{18}$$

Из (17) и (18) заключаем, что

$$|c| \leq \frac{n!}{(n+s+1)!} |z_1-z_0|^{s+1} \Big(\sup_{\zeta \in U(z_0;|z_1-z_0|)} |f^{(n+s+1)}(\zeta)| \Big). \tag{19}$$

Учитывая теперь условие (7) и оценки (14), (16) и (19) полинома P, функции G и числа c, выводим неравенство

$$|P(z)| > |G(z) + c|, \quad z \in \overline{U(z_0; |z_1 - z_0|)} \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{s} B_l \right). \tag{20}$$

Тем самым вне кругов B_l у функции $F = P + G + c$ нет нулей, принадлежащих $U(z_0; |z_1 - z_0|)$. С другой стороны, из неравенства (20) следует, что $|P(z)| > |G(z)+c|$ при $z \in \partial B_l$, а в B_l у полинома P имеется ровно один нуль. Отсюда на основании теоремы Руше (см., например, [10, ч. 1, п. 33]) у функции $F = P+G+c$ в B_l имеется ровно один нуль. Эти свойства нулей функции F, как отмечено в начале доказательства, совпадают с утверждением теоремы 3.

Замечание 2. Простые подсчеты показывают, что при определенных значениях n и s правая часть в (5) может быть больше или меньше правой части в (6). Поэтому при одних значениях $n \in \mathbb{N}$ и $s = 2, 3, \dots$ достаточно требовать выполнение лишь условия (5), а при других — лишь условия (6), смотря по тому, какая из правых частей в (5) или (6) меньше. Однако от условия (6) можно отказаться, но тогда справедливо более слабое утверждение, чем в теореме 3. А именно, верна следующая

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3, *за исключением требования* (6). *Тогда в круге* $U(z_0; |z_1 - z_0|)$ *найдется по крайней мере одно, но не более* s *различных* ξ, *для которых справедлива формула* (2), *причем все они лежат в объединении кругов* B_l, $l = 1, \dots, s$, *заданных равенствами* (8).

Доказательство теоремы 4 полностью повторяет доказательство теоремы 3.

Запись теорем 3 и 4 в их «вещественной» версии, как это было в следствии 1, также дает новые утверждения о более сильной локализации точки ξ в формуле (2), нежели ее можно гарантировать, отказавшись от требования голоморфности функции f.

Замечание 3. Оценка (14) полинома P вне кругов B_l сильно огрублена и при значениях $s = 2, 3, \dots$ допускает существенные уточнения, что, в свою очередь, дает возможность ослабить требование (7) в теоремах 3 и 4. Однако такое ослабление требования (7) хотя и просто получается, но записывается достаточно громоздко и поэтому здесь не приводится, тем более, что оно никак не влияет на качественную сторону теорем 3 и 4.

Выведем теперь из теоремы 3 утверждение теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Вначале покажем справедливость второго утверждения, в котором гарантируется единственность ξ в формуле (2), находящегося в секторе (4) при $0 < \theta \le \theta_0$. Поскольку в этом утверждении f не является полиномом степени, меньшей или равной n, найдется такое натуральное s, что $f^{(n+s)}(z_0) \ne 0$, а при $s > 1$ справедливы еще и равенства $f^{(n+1)}(z_0) = \dots = f^{(n+s-1)}(z_0) = 0$. Положим $\theta_0 = \pi/2$, если $s = 1$, и $\theta_0 = \pi/s$, если $s = 2, 3, \dots$. Для каждого $\theta \in (0; \theta_0]$ введем число

$$\delta := \delta(\theta) := \min\left\{ 1 - \binom{n+s}{n}^{-1/s}; \binom{n+s}{n}^{-1/s} \sin\theta \right\} \tag{21}$$

и, наконец, выберем положительное r, для которого замыкание круга $U(z_0; r)$ целиком лежит в D и

$$\frac{2r}{s+1} \big(\sup_{\zeta \in U(z_0; r)} |f^{(n+s+1)}(\zeta)| \big) < \delta^s |f^{(n+s)}(z_0)|. \tag{22}$$

Определение (21) числа δ гарантирует выполнение условий (5) и (6), а неравенство (22) показывает, что если $|z_1 - z_0| < r$ (т. е. $z_1 \in U(z_0; r)$), то выполнено требование (7). Тем самым если еще $z_1 \neq z_0$, то на основании теоремы 3 и замечания 1 в пересечении круга $U(z_0; |z_1 - z_0|)$ с углом $\{z \in \mathbb{C} : z \neq z_0, |\arg((z - z_0)/(z_1 - z_0))| < \theta_0\}$ имеется единственное ξ, для которого справедлива формула (2), и оно находится в круге B_s, заданном равенством (8) при $l = s$. Но круг B_s находится в угле (9) с номером $l = s$, а сам этот угол в силу определения (21) числа δ лежит в угле из определения сектора (4). Кроме того, один из диаметров круга B_s целиком лежит на отрезке $[z_0; z_1]$, а значит, B_s находится в круге $U((z_1 + z_0)/2; |z_1 - z_0|/2)$. Тем самым показано, что круг B_s, а следовательно, и точка ξ находятся в секторе (4).

Выведем теперь из второго утверждения теоремы 1 первое утверждение. Если в первом утверждении f — полином степени, меньшей или равной n, то, как уже отмечалось, ξ в формуле (2) можно взять любым из $\mathbb{C}$ и, в частности, из сектора (4). Поэтому далее, не уменьшая общности, считаем $\theta_0 \leq \theta \leq \pi/2$, а относительно функции f предполагаем выполненным условие второго утверждения теоремы 1. Но тогда согласно второму утверждению этой теоремы в секторе (4) с $\theta = \theta_0$ находится ξ, для которого справедлива формула (2), а значит, ξ находится и в более широком секторе (4).

Доказательство теоремы 2. В случае, если область D совпадает с комплексной плоскостью, положим r_0 произвольным конечным положительным числом, а в противном случае

$$r_0 := \min\{|z - \zeta| : z \in \partial D,\ \zeta \in K\}.$$

Из замкнутости границы области (см., например, [10, ч. 1, п. 4]) и компактности K следует, что этот минимум существует и больше нуля. Для так выбранного r_0 замыкание каждого круга $U(z; r_0/2)$ с центром $z \in K$ целиком лежит в D. Поскольку K — компакт, то из условия $f^{(n+1)}(z) \neq 0$ при $z \in K$ вытекает существование такого положительного c, что $|f^{(n+1)}(z)| \geq c$ при $z \in K$. Кроме того, модуль функции $f^{(n+2)}$ равномерно ограничен в $r_0/2$-окрестности компакта K. Тем самым корректно определено положительное число

$$r := \sup\{\mu \leq r_0/2 : \mu \cdot (\sup_{\zeta \in U(z; r_0/2)} |f^{(n+2)}(\zeta)|) \leq c\delta,\ z \in K\},$$

причем здесь δ то же, что и в условии теоремы 2. Из определений чисел c и r следует, что если $z_0 \in K$ и $|z_1 - z_0| < r$, то выполнено требование (7) теоремы 3 при значении $s = 1$. Если теперь заметить, что условие $\delta \leq n/(n+1)$ в теореме 2 совпадает с условием (5) при $s = 1$ в теореме 3, а при $s = 1$ в этой теореме не требуется выполнения условия (6), то утверждение теоремы 2 получается из утверждения теоремы 3 в случае $s = 1$ и $z_0 \in K$.

§ 3. Теорема о среднем и следствия из нее

Сформулируем и докажем теперь теорему, содержащую результаты работ [1, 2, 6], а затем прокомментируем ее.

Теорема 5. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$ — натуральные числа, $p = 0, \dots, m - 1$, а $mn + p \geq m + 1$. Считаем, что голоморфная в области D функция f не является полиномом степени, меньшей или равной $mn - m + p$, точка α принадлежит D, а w — отличное от нуля комплексное число, для которого замыкание круга*

$U(\alpha;|w|)$ целиком лежит в D. Предположим, что s — наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющее условию $f^{(mn-m+p+s)}(\alpha)\neq 0$, и выполнено неравенство

$$\left(1+\binom{mn-m+p+s+1}{mn-m+p}^{-1}\right)|w|\Big(\sup_{\zeta\in U(\alpha;|w|)}|f^{(mn-m+p+s+1)}(\zeta)|\Big)$$
$$<(s+1)\left(1-\binom{mn-m+p+s}{mn-m+p}^{-1}\nu_{m,s}\right)|f^{(mn-m+p+s)}(\alpha)|, \quad (23)$$

где $\nu_{m,s}=1$, если s/m — целое число, и $\nu_{m,s}=0$ в противном случае. Тогда в круге $U(\alpha;|w|)$ найдется по крайней мере одно, но не более s различных ξ, для которых справедлива формула

$$\frac{1}{m}\sum_{q=0}^{m-1}e^{-i\frac{2\pi pq}{m}}f(\alpha+e^{i\frac{2\pi q}{m}}w)$$
$$=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{w^{mk+p}}{(mk+p)!}f^{(mk+p)}(\alpha)+\frac{w^{mn-m+p}}{(mn-m+p)!}f^{(mn-m+p)}(\xi). \quad (24)$$

(При $n=1$ сумма $\sum\limits_{k=0}^{n-2}$ в правой части этого равенства отсутствует.)

Доказательство. Поскольку далее часто фигурируют одни и те же громоздкие выражения, введем для них такие сокращения:

$$\varepsilon_m:=e^{i\frac{2\pi}{m}},\quad l:=mn-m+p\ (\geq 1), \quad (25)$$

$$S(w;g):=\frac{l}{mw^l}\sum_{q=0}^{m-1}\varepsilon_m^{-pq}I_q(w;g), \quad (26)$$

где через $I_q(w;g)$ обозначены интегралы

$$I_q(w;g):=\int\limits_{[\alpha;\alpha+\varepsilon_m^q w]}g(\tau)(\alpha+\varepsilon_m^q w-\tau)^{l-1}\,d\tau, \quad (27)$$

определенные для голоморфной в замкнутом круге $U(\alpha;|w|)$ функции g.

Очевидно, что

$$\varepsilon_m^{lq}=\varepsilon_m^{pq},\quad \sum_{q=0}^{m-1}\varepsilon_m^{hq}=m\nu_{m,h},\quad h\in\mathbb{Z}. \quad (28)$$

Записав теперь для функции f формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, имеем

$$f(\alpha+\varepsilon_m^q w)=\sum_{h=0}^{l-1}\varepsilon_m^{hq}\frac{w^h}{h!}f^{(h)}(\alpha)+\frac{1}{(l-1)!}I_q(w;f^{(l)}),\quad q=0,\dots,m-1.$$

Домножая эти равенства на ε_m^{-pq}, а затем складывая их, с учетом второго равенства из (28), определений (25) и (26) числа l и выражения $S(w;g)$ выводим

$$\frac{1}{m}\sum_{q=0}^{m-1}\varepsilon_m^{-pq}f(\alpha+\varepsilon_m^q w)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{w^{mk+p}}{(mk+p)!}f^{(mk+p)}(\alpha)+\frac{w^l}{l!}S(w;f^{(l)}).$$

Сравнивая это равенство с формулой (24), заключаем, что утверждение теоремы равносильно наличию у функции

$$F(z) := f^{(l)}(z) - S(w; f^{(l)}) \tag{29}$$

в круге $U(\alpha; w)$ по крайней мере одного, но не более s различных нулей.

Для того чтобы установить этот факт, введем две функции: F_1 и F_2, заданные равенствами

$$F_1(z) := f^{(l)}(z) - f^{(l)}(\alpha), \tag{30}$$

$$F_2(z) := f^{(l)}(z) - f^{(l)}(\alpha) - \frac{(z-\alpha)^s}{s!} f^{(l+s)}(\alpha). \tag{31}$$

Одним из основных моментов доказательства является представление

$$F = F_1 - S(w; F_2) - \frac{l!}{(l+s)!}\nu_{m,s} w^s f^{(l+s)}(\alpha). \tag{32}$$

Установим его. Рассмотрим функцию $\mathbf{1} : z \mapsto 1$, $z \in \mathbb{C}$. Из определения (27) интеграла $I_q(w; g)$ и первого равенства в (28) имеем $I_q(w; \mathbf{1}) = l^{-1}\varepsilon_m^{pq} w^l$. Подставляя это выражение в определение (26) величины $S(w; g)$, заключаем, что

$$S(w; \mathbf{1}) = 1. \tag{33}$$

Вычислим теперь $S(w; g)$ для функции $g : z \mapsto \frac{1}{s!}(z-\alpha)^s$, $z \in \mathbb{C}$. Делая замену $\tau = \alpha + \varepsilon_m^q wt$ в интеграле (27), а затем пользуясь первым равенством в (28), формулами 8.380.1 и 8.384.6 из [9], выводим

$$I_q\left(w; \frac{1}{s!}((\,\cdot\,)-\alpha)^s\right) = \frac{1}{s!}\varepsilon_m^{q(l+s)} w^{l+s}\int\limits_0^1 t^s(1-t)^{l-1}dt = \varepsilon_m^{q(p+s)}\frac{(l-1)!}{(l+s)!}w^{l+s}. \tag{34}$$

Отсюда, принимая во внимание определение (26) $S(w; g)$ и второе равенство в (28), получаем, что

$$S\left(w; \frac{1}{s!}((\,\cdot\,)-\alpha)^s\right) = \frac{l!}{(l+s)!}\nu_{m,s} w^s. \tag{35}$$

Для доказательства представления (32) заметим, что выражение $S(w; g)$ линейно по функции g. Поэтому из вида (29)–(31) функций F, F_1 и F_2 и равенств (33) и (35) имеем

$$\begin{aligned} F(z) &= F_1(z) - S(w; f^{(l)}(\,\cdot\,) - f^{(l)}(\alpha)) \\ &= F_1(z) - S(w; F_2) - S\left(w; \frac{1}{s!}((\,\cdot\,)-\alpha)^s f^{(l+s)}(\alpha)\right) \\ &= F_1(z) - S(w; F_2) - \frac{l!}{(l+s)!}\nu_{m,s} w^s f^{(l+s)}(\alpha). \end{aligned}$$

Для того чтобы применить теорему Руше к функциям F и F_1, оценим сверху $|F_2(z)|$ при $z \in U(\alpha; |w|)$, так как необходимые оценки $|F_1(z)|$ снизу и числа $|S(w; F_2)|$ сверху выражаются через $|F_2(z)|$. По условию теоремы если $s > 1$, то $f^{(l+1)}(\alpha) = \cdots = f^{(l+s-1)}(\alpha) = 0$. Значит, функция F_2, заданная формулой

(31), совпадает с остаточным членом $Q_{s+1}(\alpha; z; f^{(l)})$ в формуле Тейлора, записанном для функции $f^{(l)}$. Используя интегральную форму остаточного члена и предполагая принадлежность z замыканию круга $U(\alpha; |w|)$, получим

$$|F_2(z)| = \frac{1}{s!}\Bigl|\int\limits_{[\alpha;z]} f^{(l+s+1)}(\tau)(z-\tau)^s\,d\tau\Bigr| \\ \le \frac{|z-\alpha|^{s+1}}{(s+1)!}\bigl(\sup_{\zeta\in U(\alpha;|w|)} |f^{(l+s+1)}(\zeta)|\bigr), \quad z \in \overline{U(\alpha; |w|)}. \tag{36}$$

Из этих соотношений и определений (30) и (31) функций F_1 и F_2 вытекают оценки

$$|F_1(z)| \ge \frac{|z-\alpha|^s}{s!}|f^{(l+s)}(\alpha)| - |F_2(z)| \ge \frac{|z-\alpha|^s}{s!}|f^{(l+s)}(\alpha)| \\ - \frac{|z-\alpha|^{s+1}}{(s+1)!}\bigl(\sup_{\zeta\in U(\alpha;|w|)} |f^{(l+s+1)}(\zeta)|\bigr), \quad z \in \overline{U(\alpha; |w|)}. \tag{37}$$

Отсюда следует, в частности, что у функции F_1 в круге $U(\alpha; |w|)$ имеется лишь один s-кратный нуль в точке α. Действительно, так как первым отличным от нуля членом в разложении функции F_1 в ряд Тейлора в точке α является $\frac{(z-\alpha)^s}{s!} f^{(l+s)}(\alpha)$, то α будет s-кратным нулем F_1. Покажем, что в круге $U(\alpha; |w|)$ других нулей у F_1 нет. Но при $z \in U(\alpha; |w|)$ и $z \ne \alpha$ из (37) имеем

$$\frac{(s+1)!|F_1(z)|}{|z-\alpha|^s} \ge (s+1)|f^{(l+s)}(\alpha)| - |w|\bigl(\sup_{\zeta\in U(\alpha;|w|)} |f^{(l+s+1)}(\zeta)|\bigr).$$

Согласно условию (23) теоремы правая часть этого неравенства строго больше нуля, т. е. $F_1(z) \ne 0$, коль скоро $z \in U(\alpha; |w|)$ и $z \ne \alpha$.

Наконец, оценим сверху число $|S(w; F_2)|$. Принимая во внимание выражения (26), (27) и соотношения (36), заключаем, что

$$|S(w; F_2)| \le \frac{l}{m|w|^l(s+1)!}\bigl(\sup_{\zeta\in U(\alpha;|w|)} |f^{(l+s+1)}(\zeta)|\bigr) \\ \times \sum_{q=0}^{m-1}\Bigl|\int\limits_{[\alpha;\alpha+\varepsilon_m^q w]} |\tau-\alpha|^{s+1}|\alpha+\varepsilon_m^q w-\tau|^{l-1}\,d\tau\Bigr|.$$

Вычисляя каждый из интегралов, находящихся в правой части этого неравенства, точно так же, как вычисляли интеграл $I_q(w; (1/s)((\cdot)-\alpha)^s)$ (см. равенства (34) и пояснения перед ними), получаем, что

$$\Bigl|\int\limits_{[\alpha;\alpha+\varepsilon_m^q w]} |\tau-\alpha|^{s+1}|\alpha+\varepsilon_m^q w-\tau|^{l-1}\,d\tau\Bigr| = \frac{(l-1)!(s+1)!}{(l+s+1)!}|w|^{l+s+1}$$

и поэтому

$$|S(w; F_2)| \le \frac{l!}{(l+s+1)!}|w|^{s+1}\bigl(\sup_{\zeta\in U(\alpha;|w|)} |f^{(l+s+1)}(\zeta)|\bigr). \tag{38}$$

Из неравенств (37) при $z \in \partial U(\alpha; |w|)$, (38) и условия (23) теоремы с учетом обозначения $l = mn - m + p$ следует оценка

$$|F_1(z)| > |S(w; F_2)| + \frac{l!}{(l+s)!}\nu_{m,s}|w|^s|f^{(l+s)}(\alpha)|, \quad z \in \partial U(\alpha; |w|).$$

Отсюда согласно представлению (32) и теореме Руше у функций F и F_1 в круге $U(\alpha;|w|)$ будет равное число нулей с учетом их кратностей. Но, как показано ранее, у функции F_1 в этом круге имеется лишь один s-кратный нуль α. Это и доказывает утверждение теоремы 5.

Следствие 2. *Пусть f — голоморфная в области D функция, m, $n \in \mathbb{N}$, $p = 0, \dots, m-1$ и $mn + p \geq m + 1$. Тогда для любой точки α, принадлежащей D, найдется такое положительное $r := r(f, m, n, p, \alpha)$, что круг $U(\alpha; r)$ целиком лежит в D и для любого отличного от нуля комплексного числа w с $|w| < r$ справедлива формула (24) с ξ из $U(\alpha; |w|)$.*

Доказательство. Если f — полином степени, меньшей или равной $mn - m + p$, то формула (24) справедлива при всех $\xi \in \mathbb{C}$, что устанавливается непосредственной проверкой с использованием второго равенства в (28). Поэтому, не уменьшая общности, далее считаем, что функция f удовлетворяет условиям теоремы 5. Но тогда найдется натуральное s, совпадающее с номером первого отличного от нуля числа $f^{(mn-m+p+h)}(\alpha)$, $h = 1, 2, \dots$. Для так выбранного s найдем $r := r(f, m, n, p, \alpha)$ из условий: круг $U(\alpha; r)$ целиком лежит в D и справедливо условие (23) с заменой в нем $|w|$ на r. Теперь для всех w с $|w| < r$ выполняется условие (23), откуда на основании теоремы 5 получаем утверждение следствия 2.

Полностью повторяя рассуждения, приведенные при выводе теоремы 2 из теоремы 3, из теоремы 5 выводим

Следствие 3. *Пусть f — голоморфная в области D функция, компакт K целиком лежит в D, а m, $n \in \mathbb{N}$, $p = 0, \dots, m-1$ и $mn + p \geq m + 1$, причем $f^{(mn-m+p+1)}(\alpha) \neq 0$ при $\alpha \in K$. Тогда найдется такое положительное $r := r(f, m, n, p, K)$, что все круги $U(\alpha; r)$ при $\alpha \in K$ лежат в D и если $\alpha \in K$, а w — отличное от нуля комплексное число с $|w| < r$, то в круге $U(\alpha; |w|)$ найдется единственное ξ, для которого справедлива формула (24).*

Если в следствии 2 положить $m = 2$, $p = 1$, то получим теорему 1 работы [6], содержащую результаты работ [1, 2]. Отметим, что доказательство теоремы 5, из которой вытекает следствие 2, проще доказательств работ [1, 2, 4, 6], которые основаны на громоздких оценках бесконечного множества слагаемых в ряде Тейлора, записанном для остаточного члена. Трудности, возникающие при доказательстве теоремы 5, обусловлены исключительно существенно более общей постановкой задачи и желанием по возможности точнее указать область применения формулы (24). Поясним сказанное на следующем примере.

Пример 2. Если положить в теореме 5 $f(z) = e^z$ (тогда $s = 1$), а $m = 2$, $n = 1$ и $p = 1$, то условие (23) запишется в виде

$$|w|(\sup_{\zeta \in U(\alpha;|w|)} e^{\operatorname{Re}\zeta}) < \frac{3}{2} e^{\operatorname{Re}\alpha}, \tag{39}$$

а утверждение (24) — в виде

$$e^{\alpha+w} - e^{\alpha-w} = 2we^{\xi}. \tag{40}$$

Делая замены $z_0 = \alpha - w$ и $z_1 = \alpha + w$, заключаем, что условие (39) равносильно требованию $|z_1 - z_0| < d$, где d — единственный положительный корень уравнения $de^{d/2} = 3$, и, как показывают вычисления, $d > 1,451$. Отсюда после замены $z_0 = \alpha - w$ и $z_1 = \alpha + w$ в (40) на основании теоремы 5 получаем такой результат: *если* $|z_1 - z_0| < 1,451$ *и* $z_1 \neq z_0$, *то существует единственное* ξ *из круга* $U((z_1 + z_0)/2; |z_1 - z_0|/2)$, *для которого справедлива формула* $e^{z_1} - e^{z_0} = (z_1 - z_0)e^{\xi}$. Этот же результат, но при значительно более жестком требовании $|z_1 - z_0| < 0,3$ установлен в [4]. Для получения его в [4], кроме ссылки на вычисления из доказательства установленной там теоремы, пришлось провести дополнительные и не столь тривиальные, как здесь, рассуждения. Отметим еще, что применение в этой же ситуации теоремы 3 или 4 обеспечивает требование $|z_1 - z_0| < 0,469$, которое слабее соответствующего условия из [4], но жестче условия $|z_1 - z_0| < 1,451$, гарантирующего применение теоремы 5. Однако теоремы 3 и 4 по сравнению с работой [4] и теоремой 5 дают и дополнительную информацию о ξ. А именно, указанное ξ единственно в круге $U(z_0; |z_1 - z_0|)$, содержащем круг $U((z_1 + z_0)/2; |z_1 - z_0|/2)$, причем область локализации ξ из $U(z_0; |z_1 - z_0|)$ можно существенно уменьшить за счет уменьшения $|z_1 - z_0|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cinquini S.* Sopra un'estensione di una formula di curtiss // Rend. Ist. Lombardo. 1937. V. 70, N 3. P. 236–248.
2. *Sharma A.* Remark on a theorem of Cinquini // Acta. Math. Acad. Sci. Hung. 1960. V. 11, N 1–2. P. 93–96.
3. *McLeod R. M.* Mean value theorems for vector valued functions // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1965. V. 14, N 3. P. 197–209.
4. *Robertson J. M.* A local mean value theorem for the complex plane // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1969. V. 16, N 4. P. 329–331.
5. *Samuelsson A.* A local mean value theorem for analytic functions // Amer. Math. Monthly. 1973. V. 80, N 1. P. 45–46.
6. *Савчук В. В.* До теореми про середнх для аналчтичних функцчй // Укр. мат. журн. 1997. Т. 49, № 8. С. 1143–1147.
7. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
8. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Ч. 3. Функции одного переменного. М.: Наука, 1973.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
10. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969.

Статья поступила 28 апреля 2002 г.

Радзиевская Елена Ивановна
Национальный университет пищевых технологий Министерства образования и науки Украины, ул. Владимирская, 68, Киев 01601, Украина

Радзиевский Григорий Вадимович
Институт математики Национальной Академии наук Украины, ул. Терещенковская, 3, Киев 01601, Украина
radz@imath.kiev.ua