Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 514.13

ГЛОБАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА ВЯЗКОГО ГАЗА

Е. В. Лукина

Аннотация: Рассматриваются упрощенные уравнения Навье — Стокса, описывающие движение вязкого газа, с условием прилипания на границе. Дано определение слабого решения, для которого на основе априорных оценок доказана теорема существования.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, существование «в целом», слабое решение

1. Введение

Уравнения вязкого газа в случае баротропного движения имеют вид [1]

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = \mu\Delta\mathbf{u} + (\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div}\mathbf{u}) - \nabla P, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}\rho) = 0, \quad P = c^2\rho^\gamma. \tag{2}$$

Здесь ρ — плотность газа, $\mathbf{u}$ — вектор скорости, P — давление; μ, λ — постоянные коэффициенты динамической и объемной вязкостей, $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu \geq 0$, $\gamma = \mathrm{const} \geq 1$, $c = \mathrm{const}$. Теория разрешимости уравнений (1), (2) существенно меняется в зависимости от того, рассматривается ли случай одной, двух или трех (и более) пространственных переменных. Одномерный случай исследован достаточно полно в [2]. Для многомерных течений установлены только локальные теоремы существования произвольных по норме решений [3, 4] либо глобальных решений, близких к состоянию покоя [5].

В связи с математической трудностью модели (1), (2) было найдено подходящее определение решения [6], для которого удалось доказать теорему существования. В работе [7] рассмотрен случай $\gamma \geq 9/5$, а в работе [8] — $\gamma > 3/2$. Отказ от постоянства коэффициента λ позволил построить развернутую систему априорных оценок и доказать существование «в целом» по времени слабых, сильных и классических решений двумерной задачи [9].

Среди различных вариантов упрощения уравнений Навье — Стокса (1), (2) наиболее известными являются, во-первых, квазистационарная модель [1, 10] и, во-вторых, приближение Стокса [1]

$$\bar{\rho}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mu\Delta\mathbf{u} + (\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div}\mathbf{u}) - \nabla P, \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке 6-го конкурса-экспертизы молодых ученых РАН (грант № 5).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\mathbf{u}\rho) = 0, \quad P = P(\rho), \tag{4}$$

где $\bar{\rho} = \mathrm{const} > 0$ — средняя плотность.

Модель (3), (4) является хорошим приближением для сильно вязких течений. Математические исследования модели (3), (4) в случае потенциальных течений начаты в работе [11], где установлено существование обобщенных (слабых) решений при любом конечном числе пространственных переменных. В двумерном случае показано, что при достаточно гладких данных обобщенное решение также обладает соответствующей гладкостью. В частности, найдены условия единственности. Для непотенциальных течений модель (3), (4) была изучена в работе [12], но при «нефизичных» краевых условиях:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{u} \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T].$$

Выбор таких условий оправдан только с математической точки зрения.

В данной работе рассматриваются многомерные течения с условием «прилипания» на границе для модели (3), (4). Для такой задачи удалось построить слабое решение и доказать теорему существования «в целом» по времени.

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, — односвязная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2. Требуется найти решение системы (3), (4) в области Ω, удовлетворяющее условиям

$$\mathbf{u} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \ t \in [0, T]. \tag{5}$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x), \quad \rho|_{t=0} = \rho_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

$$P(\rho) = c^2\rho^\gamma, \quad c = \mathrm{const}, \ \gamma \geq 1. \tag{7}$$

В дальнейшем будут использоваться обычные обозначения L^p (W_p^l) для пространств функций, интегрируемых со степенью $p \geq 1$ (вместе с обобщенными производными до порядка $l \geq 0$). Через $L^2(0, T; X)$ $(C^l([0, T]; X))$ обозначим пространство измеримых функций (пространство непрерывных функций, имеющих непрерывные в $[0, T]$ производные до порядка l), отображающих интервал $(0, T)$ $([0, T])$ в пространство X, таких, что

$$\|f\|^2_{L^2(0,T;X)} = \int\limits_0^T \|f\|^2_X \, dt < \infty \quad (\|f\|_{C([0,T];X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|f\|_X < \infty).$$

Через $H^1(\Omega)$ будем обозначать пространство $W_2^1(\Omega)$, а через $H_0^1(\Omega)$ — подпространство функций из $W_2^1(\Omega)$, равных нулю на границе $\partial\Omega$. Через $C^l(\overline{\Omega})$ обозначим банахово пространство l раз непрерывно дифференцируемых и финитных в $\overline{\Omega}$ функций, $l \geq 0$, через $D(\Omega)$ $(D(Q))$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных в Ω (Q) функций, через $D'(Q)$ — пространство обобщенных функций на Q. Скалярное произведение в $L^2(\Omega)$ будем обозначать через $(\cdot, \cdot)$, в $H_0^1(\Omega)$ — через $(\cdot, \cdot)_1$, $W_q^{-1}(\Omega) = \big(\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)\big)'$ — сопряженное к $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ пространство. Значение функционала из D' на элементе из D обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D' \times D}$, норму в пространстве $L^2(\Omega)$ — через $\| \cdot \|$.

Обозначения пространств для векторных функций будем использовать такие же, как и для скалярных функций, а принадлежность $\mathbf{u} \in X$ будем понимать как $u_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$.

Определение 1. *Слабым решением задачи* (3)–(7) называется пара функций $\{\mathbf{u}, \rho\}$ такая, что

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \rho \in L^{p\gamma}(Q), \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^p\big(0,T; W_p^{-1}(\Omega)\big).$$

Уравнение (3) выполняется в смысле равенства

$$\bar\rho \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{f} \right\rangle_{W_p^{-1}(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)} + \mu(\mathbf{u},\mathbf{f})_1 + (\mu+\lambda)(\operatorname{div}\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{f})$$
$$= c^2\langle \rho^\gamma, \operatorname{div}\mathbf{f}\rangle_{L^p(\Omega)\times L^q(\Omega)} \quad \text{в } D'(0,T) \quad \forall \mathbf{f}\in L^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega), \qquad (9)$$

$$\mathbf{u}(x,0)=\mathbf{u}_0(x) \quad \text{в } D'(\Omega),$$

где p и q связаны неравенством $1/p+1/q\le 1$, а p выбирается из условий

$$p=\begin{cases} 1+1/\gamma & \text{при} \quad \gamma\ge 1,\ n=2,\\ \frac{1+2/n}{1+2/n-1/\gamma} & \text{при} \quad \gamma\ge n/2,\ n>2,\\ 1+2/n & \text{при} \quad \gamma=1,\ n>2.\end{cases}$$

Выполнение первого уравнения в (4) понимается в следующем смысле:

$$\int\limits_Q \rho \frac{\partial f}{\partial t}\,dxdt + \int\limits_Q \rho\mathbf{u}\nabla f\,dxdt = \int\limits_\Omega \rho_0 f(x,0)\,dx \ \forall f\in C^1([0,T];D(\Omega)), \quad f(x,T)=0. \qquad (10)$$

Пусть $\mathbf{u}\in C^1([0,T];C^2(\overline{\Omega}))$, $\rho\in C^1(\overline{Q})$ — решение системы (3)–(7). Скалярно умножая уравнение (3) на произвольную гладкую вектор-функцию $\mathbf{f}$, а уравнение (4) — на произвольную гладкую функцию f и пользуясь формулой интегрирования по частям, получаем, что пара $\{\mathbf{u};\rho\}$ удовлетворяет (9), (10). Если для любой пары $\{\mathbf{u};\rho\}$, удовлетворяющей условиям (8), выполняются равенства (9), (10), то при условии гладкости функций $\mathbf{u}$, ρ, имеют место (3)–(7). Действительно, применив формулу Грина в интегральных уравнениях (9), (10), приходим к требуемому.

2. Априорные оценки

Получим априорные оценки, позволяющие доказать существование решений в смысле определения 1 задачи (3)–(7). На протяжении всей работы через C_i, $i=1,2,\dots$, и $C=\max\{C_i\}$ будем обозначать константы, зависящие лишь от постоянных T, $\operatorname{mes}\Omega$, m_0, M_0. Здесь $\operatorname{mes}\Omega>0$ — мера Лебега области Ω.

Отметим, что из первого уравнения (4) и условий (5), (6) нетрудно получить следующие свойства плотности:

$$\int\limits_\Omega \rho(x,t)\,dx = \int\limits_\Omega \rho_0(x)\,dx \quad \text{п. в. на } [0,T], \qquad (11)$$

$$\rho(x,t)\ge 0 \quad \text{п. в. на } Q.$$

Умножим уравнение (3) на $\mathbf{u}$ и проинтегрируем по области Ω, учитывая (5):

$$\frac{\bar\rho}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2 + \mu\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + (\mu+\lambda)\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2 = -c^2\int\limits_\Omega \nabla\rho^\gamma\mathbf{u}\,dx. \qquad (12)$$

Рассмотрим отдельно два случая $\gamma=1$ и $\gamma>1$.

Пусть $\gamma = 1$. В этом случае преобразуем правую часть (12) следующим образом:

$$-c^2 \int_\Omega \nabla\rho\mathbf{u}\,dx = -c^2 \int_\Omega (\rho+1)\mathbf{u}\nabla\ln(\rho+1)\,dx = c^2 \int_\Omega \ln(\rho+1)\,\mathrm{div}((\rho+1)\mathbf{u})\,dx.$$

Из первого уравнения (4) следует, что

$$\mathrm{div}((\rho+1)\mathbf{u}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{u}.$$

Таким образом, возвращаясь в (12), находим

$$\frac{\bar\rho}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2 + \mu\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + (\mu+\lambda)\|\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2 = -c^2 \int_\Omega \ln(\rho+1)\frac{\partial}{\partial t}(\rho+1)\,dx + c^2 \int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{u}\ln(\rho+1)\,dx. \quad (13)$$

Проинтегрировав (13) от 0 до t, получим

$$\frac{\bar\rho}{2}\|\mathbf{u}\|^2 + \mu\int_0^t \|\nabla\mathbf{u}\|^2 ds + (\mu+\lambda)\int_0^t \|\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2 ds - c^2 \int_\Omega (\rho+1)\ln(\rho+1)\,dx = c^2 \int_0^t\int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{u}\ln(\rho+1)\,dxds + c^2\int_\Omega(\rho_0+1)\ln(\rho_0+1)\,dx, \quad (14)$$

поскольку в силу (11)

$$\int_0^t\int_\Omega \ln(\rho+1)\frac{\partial}{\partial s}(\rho+1)ds\,dx = \int_\Omega (\rho+1)\ln(\rho+1)\,dx - \int_\Omega(\rho_0+1)\ln(\rho_0+1)\,dx.$$

Оценивая слагаемые в левой и правой частях равенства (14) с помощью элементарных неравенств

$$\int_\Omega (\rho+1)\ln(\rho+1)\,dx \ge \int_\Omega [\ln(\rho+1)]^2\,dx + \int_\Omega \ln(\rho+1)\,dx,$$

$$\int_\Omega (\rho_0+1)\ln(\rho_0+1)\,dx \le \int_\Omega \rho_0^2\,dx + \int_\Omega \rho_0\,dx,$$

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{u}\ln(\rho+1)\,dx \le \frac{\mu+\lambda}{2}\|\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2(\mu+\lambda)}\|\ln(\rho+1)\|^2,$$

в силу неотрицательности ρ получаем следующую оценку:

$$\frac{\bar\rho}{2}\|\mathbf{u}\|^2 + \mu\int_0^t \|\nabla\mathbf{u}\|^2 ds + \frac{\mu+\lambda}{2}\int_0^t \|\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2 ds + c^2\|\ln(\rho+1)\|^2 + c^2\int_\Omega \ln(\rho+1)\,dx \le \frac{\bar\rho}{2}\|\mathbf{u}_0\|^2 + 2\,\mathrm{mes}\,\Omega\|\rho_0\|^2 + \frac{c^2}{2(\mu+\lambda)}\int_0^t \|\ln(\rho+1)\|^2 ds. \quad (15)$$

Тогда по лемме Гронуолла оценим $\|\ln(\rho+1)\|^2$:

$$\|\ln(\rho+1)\|^2 \le \exp\left\{\frac{Tc^2}{2(\mu+\lambda)}\right\}\left(\frac{c^2\bar{\rho}}{2}\|\mathbf{u}_0\|^2 + 2\,\mathrm{mes}\,\Omega\|\rho_0\|^2\right).$$

Последнее неравенство вместе с (15) дает требуемую оценку

$$\max_{0\le t\le T}\|\mathbf{u}\|^2 + \int\limits_0^T \|\mathbf{u}\|^2_{H^1_0(\Omega)}\,dt + \max_{0\le t\le T}\|\ln(\rho+1)\|^2 \le C(\|\mathbf{u}_0\|^2 + \|\rho_0\|^2). \tag{16}$$

Пусть $\gamma > 1$. Перепишем первое уравнение (4) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^\gamma + \mathrm{div}(\rho^\gamma\mathbf{u}) + (\gamma-1)\rho^\gamma\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0.$$

Проинтегрируем это равенство по Ω, учитывая краевые условия (5):

$$(\gamma-1)\int\limits_\Omega \rho^\gamma\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,dx = -\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \rho^\gamma\,dx.$$

Отсюда и из (12) получаем

$$\frac{\bar{\rho}}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2 + \mu\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + (\mu+\lambda)\|\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2 = c^2\int\limits_\Omega \rho^\gamma\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,dx = -\frac{c^2}{\gamma-1}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \rho^\gamma\,dx.$$

Интегрируя от 0 до t это равенство, находим

$$\frac{\bar{\rho}}{2}\|\mathbf{u}\|^2 + \mu\int\limits_0^t \|\nabla\mathbf{u}\|^2 ds + (\mu+\lambda)\int\limits_0^t \|\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2 ds + \frac{c^2}{\gamma-1}\int\limits_\Omega \rho^\gamma\,dx$$
$$= \frac{\bar{\rho}}{2}\|\mathbf{u}_0\|^2 + \frac{c^2}{\gamma-1}\int\limits_\Omega \rho_0^\gamma\,dx.$$

Следовательно,

$$\max_{0\le t\le T}\|\mathbf{u}\|^2 + \int\limits_0^T \|\mathbf{u}\|^2_{H^1_0(\Omega)}\,dt + \max_{0\le t\le T}\int\limits_\Omega \rho^\gamma\,dx \le C\left(\|\mathbf{u}_0\|^2 + \int\limits_\Omega \rho_0^\gamma\,dx\right). \tag{17}$$

Для получения следующих оценок разложим вектор-функцию $\mathbf{u}$ на соленоидальную и потенциальную части. Будем искать вектор-функцию $\mathbf{v}$ из условий

$$\mathrm{rot}\mathbf{v} = \mathbf{z}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{18}$$

Здесь $\mathbf{z} = \mathrm{rot}\mathbf{u}$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Относительно задачи (18) имеет место следующий факт [13, 14]. *Пусть Ω — односвязная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. Если $\mathbf{z} \in W^{l-1}_p(\Omega)$, $p > 1$, то справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}\|_{W^l_p(\Omega)} \le C\|\mathbf{z}\|_{W^{l-1}_p(\Omega)}. \tag{19}$$

Поэтому в силу оценок (16), (17)

$$\int\limits_0^T \|\mathbf{v}\|^2_{H^1_0(\Omega)}\,dt \le C\left(\|\mathbf{u}_0\|^2 + \|\rho_0\|^2 + \int\limits_\Omega \rho_0^\gamma\,dx\right).$$

Скалярную функцию φ определим как решение задачи

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\mathbf{u}, \quad \int\limits_{\Omega} \varphi\, dx = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{20}$$

В силу (18), (20) векторное поле $\mathbf{u}$ представимо в виде суммы потенциальной и соленоидальной составляющих:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla\varphi. \tag{21}$$

Подставляя (21) в уравнение (3), учитывая (5), (6) и (18), (20), приходим к краевым задачам для $\mathbf{v}$ и φ в области $Q = \Omega \times (0, T)$:

$$\bar{\rho}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \mu\Delta\mathbf{v} + \nabla\chi, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{22}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{v}\times\mathbf{n} = -\nabla\varphi\times\mathbf{n}, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \tag{23}$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{24}$$

$$\bar{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = (2\mu + \lambda)\Delta\varphi - c^2\rho^\gamma - \chi, \tag{25}$$

$$\int\limits_{\Omega} \varphi\, dx = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{26}$$

Здесь функции $\mathbf{v}_0$ и φ_0 получаются из разложения векторного поля $\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0 + \nabla\varphi_0$ аналогично (18), (20).

Корректность задачи (22)–(24) полностью изучена в [15]. Следуя [15], дадим определение слабого решения задачи (22)–(24) и сформулируем теорему о разрешимости этой задачи.

Определение 2. *Слабым решением задачи* (22)–(24) называется пара функций $\{\mathbf{v}, \chi\} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times H^{-1}(0, T; L^2(\Omega))$ такая, что уравнения (22) выполняются в $D'(Q)$.

Теорема 1. *Если $\mathbf{v}_0 \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{h} \in L^2(0, T; L^2(\partial\Omega))$, то существует единственное слабое решение задачи* (22)–(24). *При этом*

$$\max_{0\le t\le T}\|\mathbf{v}\|^2 + \int\limits_0^T \|\mathbf{v}\|^2_{H^1(\Omega)}\, dx \le C(\|\mathbf{v}_0\|^2 + \|\mathbf{h}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}), \tag{27}$$

$$\|\chi\|^2_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} \le C(\|\mathbf{v}_0\|^2 + \|\mathbf{h}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}). \tag{28}$$

Здесь $\mathbf{h}(x, t)$ — функция, заданная на границе $\partial\Omega$, такая, что

$$\mathbf{h}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{h}\times\mathbf{n} = -\nabla\varphi\times\mathbf{n}.$$

В силу (16), (17), (20) из (28) вытекает оценка

$$\|\chi\|^2_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} \le C.$$

Определение 3. *Полусильным решением задачи* (22)–(24) называется пара функций $\{\mathbf{v}, \chi\}$ такая, что

$$\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad \chi \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Уравнения (22) выполняются в смысле равенств

$$\bar\rho\left\langle\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t},\mathbf{w}\right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + \mu(\mathrm{rot}\mathbf{v},\mathrm{rot}\mathbf{w}) + (\chi,\operatorname{div}\mathbf{w}) = 0 \quad \text{в } D'(0,T) \tag{29}$$

для любой $\mathbf{w} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$;

$$(\mathbf{v},\nabla\tau) = 0 \quad \text{в} \quad D'(0,T),$$

для любого $\tau \in L^2(Q)$ такого, что $(\tau,1) = 0$ в $D'(0,T)$, при этом

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{h}(x,t), \quad x \in \partial\Omega,\ t\in[0,T],$$
$$\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x) \quad \text{в } D'(\Omega).$$

Рассмотрим вспомогательную задачу. Требуется определить функции $\mathbf{g}$ и q из условий

$$\Delta\mathbf{g} + \nabla q = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{g} = 0, \quad \mathbf{g}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{g}\times\mathbf{n} = \mathbf{s}(x,t), \quad x\in\partial\Omega. \tag{30}$$

Определение 4. *Слабым решением задачи* (30) называется пара функций $\{\mathbf{g},q\}$ такая, что

$$\mathbf{g} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)), \quad q \in L^2(Q)$$

и уравнения (30) понимаются в смысле равенств

$$(\mathrm{rot}\mathbf{g},\mathrm{rot}\mathbf{g}_1) + (q,\operatorname{div}\mathbf{g}_1) = \langle\mathbf{s},\mathbf{g}_1\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)} \quad \text{в } D'(0,T), \tag{31}$$

$$(\mathbf{g}_1,\nabla q_1) = 0 \quad \text{в } D'(0,T)\ \forall\mathbf{g}_1 \in L^2(0,T;H^1(\Omega)),\ \forall q_1\in L^2(Q), \quad (q_1,1) = 0.$$

Теорема 2. *Если* $\mathbf{s} \in L^2(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega))$, *то существует слабое решение задачи* (30). *При этом справедлива априорная оценка*

$$\int\limits_0^T \big(\|\mathbf{g}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|q\|^2\big)\,dt \le C. \tag{32}$$

Доказательство. Выведем априорную оценку слабого решения. Положим в (31) $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}$. Тогда

$$\int\limits_\Omega |\mathrm{rot}\mathbf{g}|^2\,dx = \int\limits_{\partial\Omega}\mathbf{s}\mathbf{g}d\sigma.$$

Следовательно,

$$\|\mathrm{rot}\mathbf{g}\|^2 \le \|\mathbf{s}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}\|\mathbf{g}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \le \frac{C_1}{2}\|\mathbf{s}\|^2_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} + \frac{1}{2C_1}\|\mathbf{g}\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{33}$$

Последнее неравенство верно в силу неравенства Коши и непрерывности оператора следа. Для функции $\mathbf{g}$ ввиду (19), (30) справедлива оценка

$$\|\mathbf{g}\|^2_{H^1(\Omega)} \le C_1\|\mathrm{rot}\mathbf{g}\|^2,$$

которая вместе с (33) приводит к соотношению

$$\|\mathbf{g}\|^2_{H^1(\Omega)} \le C_1\|\mathbf{s}\|^2_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}. \tag{34}$$

Оценка для q следует из первого уравнения (30)

$$\|\nabla q\|^2_{H^{-1}(\Omega)} = \|\Delta\mathbf{g}\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \le C_2\|\mathbf{g}\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{35}$$

Оценка (32) вытекает из (34), (35). Существование слабого решения доказывается методом Галеркина на основе оценки типа (32) для галеркинских приближений. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если* $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)$, $\rho_0 \in L^{\gamma_0}(\Omega)$, *где* $\gamma_0 = \max\{2, \gamma\}$, *то существует полусильное решение задачи* (22)–(24), *для которого имеют место оценки* (27) *и неравенство*

$$\int\limits_0^T \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} dt + \int\limits_0^T \|\chi\|^2 \, dt \le C. \tag{36}$$

Доказательство теоремы 3 проводится методом Галеркина на основе априорных оценок (27), (36). Перейдем к доказательству априорной оценки (36).

Применим операцию div к первому уравнению (30). Получим

$$\Delta q = 0. \tag{37}$$

Из условия $(\mathrm{rot}\mathbf{g} - \mu \mathrm{rot}\mathbf{v}) \times \mathbf{n} = 0$ следует [2, с. 44], что $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{g} - \mu\mathrm{rot}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = 0$. Из первого уравнения (30) найдем

$$\nabla q \cdot \mathbf{n} = -\Delta \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = \mathrm{rotrot}\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = \mu \mathrm{rotrot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -\mu \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad x \in \partial\Omega. \tag{38}$$

Хорошо известно, что функция q определяется из задачи Неймана (37), (38) с точностью до константы, которую будем фиксировать условием

$$\int\limits_\Omega q \, dx = 0. \tag{39}$$

Применим операцию div к уравнению (22):

$$\Delta \chi = 0. \tag{40}$$

Ввиду первого условия (23) и уравнения (22) находим

$$\nabla \chi \cdot \mathbf{n} = -\mu \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad x \in \partial\Omega.$$

Из (25) в силу условия (26) получим

$$\int\limits_\Omega \chi \, dx = -c^2 \int\limits_\Omega \rho^\gamma \, dx. \tag{41}$$

Сравнив задачи Неймана (37)–(39) и (40), (41) [16], заключаем, что функция χ определяется равенством

$$\chi = q + P_0(t),$$

где $P_0(t)$ — неизвестная пока функция времени. Определим ее из условий (39), (41):

$$P_0(t) = -\frac{c^2}{\mathrm{mes}\,\Omega} \int\limits_\Omega \rho^\gamma \, dx.$$

Таким образом,

$$\chi = q - \frac{c^2}{\mathrm{mes}\,\Omega} \int\limits_\Omega \rho^\gamma \, dx. \tag{42}$$

Из определения 3 следует, что

$$\mathrm{rot}\mathbf{v}|_{\partial\Omega} \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\partial\Omega)). \tag{43}$$

Действительно, для любой вектор-функции $\mathbf{w}$ такой, что

$$\mathbf{w} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \in L^2(Q), \quad \mathbf{w}(x, T) = 0,$$

справедливо равенство

$$
\begin{aligned}
&\mu \int_0^T \langle \mathrm{rot}\mathbf{v} \times \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle \, dt \\
&\qquad = -\bar{\rho} \int_0^T \left(\mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) dt + \mu \int_0^T (\mathrm{rot}\mathbf{v}, \mathrm{rot}\mathbf{w}) \, dt + \int_0^T (\chi, \operatorname{div} \mathbf{w}) \, dt - (\mathbf{v}_0, \mathbf{w}(x,0)),
\end{aligned}
$$

На основании (43) в задаче (30) можно выбрать $\mathbf{s} = \mu \mathrm{rot}\mathbf{v} \times \mathbf{n}$, $x \in \partial\Omega$. Из (42) с помощью (32), (16) получаем оценку

$$
\int_0^T \|\chi\|^2 \, dt \leq C \left(\|\mathbf{u}_0\|^2 + \|\rho_0\|^2 + \int_\Omega \rho_0^\gamma \, dx \right). \tag{44}
$$

В силу компактности вложения пространств $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ и $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ из (22) благодаря (27), (44) следует неравенство

$$
\int_0^T \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} dt \leq C \left(\|\mathbf{u}_0\|^2 + \|\rho_0\|^2 + \int_\Omega \rho_0^\gamma \, dx \right).
$$

Оценка (36) доказана.

Получим априорную оценку для плотности. Умножим (25) на $\rho^{\gamma - r}$, где $r > 0$, $r < \gamma$, $\gamma \neq 1$, и проинтегрируем по области Ω:

$$
c^2 \int_\Omega \rho^{2\gamma - r} \, dx = (2\mu + \lambda) \int_\Omega \Delta\varphi \rho^{\gamma - r} \, dx - \int_\Omega \chi \rho^{\gamma - r} \, dx - \bar{\rho} \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho^{\gamma - r} \, dx. \tag{45}
$$

Перепишем первое уравнение (4) в виде

$$
\frac{\partial}{\partial t} \rho^{\gamma - r} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \rho^{\gamma - r}) + (\gamma - r - 1) \rho^{\gamma - r} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.
$$

Умножим это уравнение на φ и проинтегрируем по области Ω, применяя формулу Грина и учитывая краевые условия. Тогда

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi \frac{\partial}{\partial t} \rho^{\gamma - r} \, dx &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_\Omega \rho^{\gamma - r} \varphi \, dx \right) - \int_\Omega \rho^{\gamma - r} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dx \\
&= \int_\Omega \mathbf{u} \rho^{\gamma - r} \nabla \varphi \, dx - (\gamma - r - 1) \int_\Omega \rho^{\gamma - r} \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi \, dx.
\end{aligned}
$$

С учетом (45) получаем равенство

$$
\begin{aligned}
c^2 \int_\Omega \rho^{2\gamma - r} \, dx &= (2\mu + \lambda) \int_\Omega \Delta\varphi \rho^{\gamma - r} \, dx - \int_\Omega \chi \rho^{\gamma - r} \, dx \\
&- \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_\Omega \rho^{\gamma - r} \varphi \, dx \right) + \bar{\rho} \int_\Omega \mathbf{u} \rho^{\gamma - r} \nabla \varphi \, dx - \bar{\rho} (\gamma - r - 1) \int_\Omega \rho^{\gamma - r} \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi \, dx.
\end{aligned} \tag{46}
$$

Проинтегрируем (46) от 0 до t и оценим последние два слагаемых правой части (46) отдельно, используя неравенство Гёльдера с сопряженными показателями $(2\gamma - r)/(\gamma - r)$, $2 - r/\gamma$:

$$I_1(t) \equiv \int\limits_\Omega \mathbf{u}\rho^{\gamma-r}\nabla\varphi\,dx \le \varepsilon\int\limits_\Omega \rho^{2\gamma-r}\,dx + C_\varepsilon\int\limits_\Omega (\mathbf{u}\nabla\varphi)^{2-\frac{r}{\gamma}}\,dx$$
$$\le \varepsilon\int \rho^{2\gamma-r}\,dx + \frac{C_\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega \mathbf{u}^{2(2-\frac{r}{\gamma})}\,dx + \frac{C_\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega \nabla\varphi^{2(2-\frac{r}{\gamma})}\,dx.$$

По неравенству вложения [2] имеем

$$\int\limits_\Omega \mathbf{u}^{2(2-\frac{r}{\gamma})}\,dx = \|\mathbf{u}\|^{2(2-\frac{r}{\gamma})}_{L^{2(2-\frac{r}{\gamma})}(\Omega)} \le C_4(\|\nabla\mathbf{u}\|^\alpha\|\mathbf{u}\|^{1-\alpha})^{2(2-\frac{r}{\gamma})} \le C\|\nabla\mathbf{u}\|^{(\frac{\gamma-r}{\gamma})n},$$

где $\alpha = (\gamma - r)n/2(2\gamma - r)$. Выберем r из условия $(\gamma - r)n/\gamma \le 2$, тогда

$$r \ge \gamma(1 - 2/n). \tag{47}$$

Аналогично оценивается интеграл

$$\int\limits_\Omega \nabla\varphi^{2(2-\frac{r}{\gamma})}\,dx.$$

Следовательно, при выполнении условия (47) справедлива оценка

$$I_1(t) \le \varepsilon\int \rho^{2\gamma-r}\,dx + C_\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + C_\varepsilon\|\Delta\varphi\|^2. \tag{48}$$

Отметим, что в силу (47) оценка (48) возможна и при $r = 0$ в случае $n = 2$. Далее,

$$I_2(t) \equiv \int\limits_\Omega \rho^{\gamma-r}\varphi\Delta\varphi\,dx \le \varepsilon\int\limits_\Omega \rho^{2\gamma-r}\,dx + C_\varepsilon\int\limits_\Omega (\varphi\Delta\varphi)^{2-\frac{r}{\gamma}}\,dx$$
$$\le \varepsilon\int\limits_\Omega \rho^{2\gamma-r}\,dx + C_\varepsilon\bigg(\int\limits_\Omega |\Delta\varphi|^2\,dx\bigg)^{\frac{2\gamma-r}{2\gamma}}\bigg(\int\limits_\Omega |\varphi|^{2\frac{2\gamma-r}{r}}\,dx\bigg)^{\frac{r}{2\gamma}}$$
$$= \varepsilon\int\limits_\Omega \rho^{2\gamma-r}\,dx + C_{\varepsilon_1}\|\Delta\varphi\|^2 + C_\varepsilon\|\Delta\varphi\|^{\frac{2\gamma-r}{\gamma}}\|\varphi\|^{\frac{2\gamma-r}{\gamma}}_{L^{\frac{2}{r}(2\gamma-r)}(\Omega)},$$

или

$$I_2(t) \le \varepsilon\int\limits_\Omega \rho^{2\gamma-r}\,dx + C_\varepsilon\|\Delta\varphi\|^m\|\nabla\varphi\|^{2(2-\frac{r}{\gamma})-m}$$
$$\le \varepsilon\int\limits_\Omega \rho^{2\gamma-r}\,dx + C_\varepsilon\|\Delta\varphi\|^2 + C_\varepsilon\|\nabla\varphi\|^2. \tag{49}$$

Здесь

$$r < \gamma, \quad m = \frac{(1 - r/\gamma)(2n-1) + n - 1}{n} \le 2,$$

если имеет место (47) и $r > 0$. Возвращаясь к (46) и оценивая оставшиеся слагаемые правой части по неравенству Коши, с учетом (48), (49) находим

$$\int_0^t \int_\Omega \rho^{2\gamma-r}\,dxds \le C_5 \left(\int_0^t \|\Delta\varphi\|^2\,ds + \int_\Omega |\varphi|\rho^{\gamma-r}\,dx \right). \tag{50}$$

Последнее слагаемое правой части (50) оценим так:

$$\int_\Omega |\varphi|\rho^{\gamma-r}\,dx \le \varepsilon \int_\Omega \rho^{2\gamma-r}\,dx + C_6\|\varphi\|^2.$$

Таким образом, получена оценка

$$\int_0^T \int_\Omega \rho^{2\gamma-r}\,dxds \le C \int_0^T \|\nabla\mathbf{u}\|^2 ds + C \max_{0\le t\le T} \|\nabla\varphi\|^2.$$

Случай $\gamma = 1$ рассмотрен в работе [11]. Отсюда в силу (16), (17), (47) следует [11], что

$$\|\rho^\gamma\|^b_{L^b(Q)} \le C\biggl(\|\mathbf{u}_0\|^2 + \|\rho_0\|^2 + \int_\Omega \rho_0^\gamma\,dx \biggr), \tag{51}$$

где b определяется следующими выражениями:

$$b = \begin{cases} [1, 1 + 2/n] & \text{при } n > 2,\ \gamma \ge 1, \\ [1, 2 - r] & \text{при } n = 2,\ \gamma > 1,\ 0 < r \le 1, \\ 2 & \text{при } n = 2,\ \gamma = 1. \end{cases}$$

Отметим, что в силу (16), (17), (44), (51) из (25) вытекает оценка для $\partial\varphi/\partial t$ в $L^b(\Omega)$:

$$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\|^b_{L^b(Q)} \le C\biggl(\|\mathbf{u}_0\|^2 + \|\rho_0\|^2 + \int_\Omega \rho_0^\gamma\,dx \biggr), \tag{52}$$

из которой ввиду разложения (21), оценки (36) и вложения пространств $W_2^{-1} \subset W_b^{-1}$ при $b \le 2$ получаем

$$\left\| \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^b(0,T;W_b^{-1}(\Omega))} \le C. \tag{53}$$

Теорема 4. *Если* $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)$, $\rho_0 \in L^{\gamma_0}(\Omega)$, *где* $\gamma_0 = \max\{2, \gamma\}$, *то существует слабое решение задачи* (3)–(7).

Доказательство теоремы 4 проводится на основе априорных оценок (16), (17), (51), (53) для галеркинских приближений слабого решения задачи (3)–(7), причем приближения $\mathbf{u}_k$ поля скоростей ищутся в виде конечной линейной комбинации базисных элементов, а приближения ρ_k определяются из уравнения переноса (4).

В виду (51) из последовательности ρ_k можно выбрать подпоследовательность ρ_n такую, что

$$\rho_n \to \rho \text{ слабо в } L^{b_0}(Q), \quad c^2\rho_n^\gamma \to P \text{ слабо в } L^b(Q), \tag{54}$$

где $b_0 = b\gamma$. Подставляя $\mathbf{u}_k = \nabla\varphi_k + \mathbf{v}_k$, где φ_k, $\mathbf{v}_k$ — галеркинские приближения функций φ, $\mathbf{v}$ соответственно, в равенство (9), записанное для галеркинских приближений $\mathbf{u}_k$, ρ_k, и учитывая соотношение (29), записанное для $\mathbf{v}_k$, χ_k, получим следующее выражение:

$$\int\limits_0^T \langle B_k - c^2\rho_k^\gamma, \operatorname{div}\mathbf{f}\rangle_{L^b(\Omega)\times L^{b'}(\Omega)}\,dt = 0, \tag{55}$$

где $1/b + 1/b' \leq 1$, $B_k = \bar{\rho}(\partial\varphi_k/\partial t) - (2\mu+\lambda)\Delta\varphi_k + \chi_k$. В силу соответствующих оценок для галеркинских приближений (17), (44), (52) заключаем, что существует подпоследовательность B_n такая, что

$$B_n \to B \quad \text{слабо в } L^b(Q), \tag{56}$$

где $B = \bar{\rho}(\partial\varphi/\partial t) - (2\mu+\lambda)\Delta\varphi + \chi$. Переходя в (55) к пределу по n и учитывая второе соотношение (54) и (56), получим

$$\int\limits_0^T \langle B - P, \operatorname{div}\mathbf{f}\rangle_{L^b(\Omega)\times L^{b'}(\Omega)}\,dt = 0.$$

Стандартными рассуждениями [17] из монотонности функции ρ^γ следует, что

$$P = \rho^\gamma \quad \text{и} \quad \rho^\gamma \in L^p(\Omega), \tag{57}$$

где

$$\frac{1}{b_0} + \frac{1}{p} = 1, \quad b_0 = b\gamma, \quad p \leq b_0.$$

Соотношение (57) и компактность последовательности $\{\mathbf{u}_k\}$ в $L^2(Q)$ позволяют перейти к пределу при $k \to \infty$ в равенстве (9), записанном для функций $\mathbf{u}_k$, ρ_k.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 1.
2. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
3. *Солонников В. А.* О разрешимости начально-краевой задачи для уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости // Исследования по линейным операторам и теории функций. Л.: Наука, 1976. Т. 6. С. 128–142.
4. *Tani A.* On the first initial boundary value problem of compressible viscous fluid motion // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1977. V. 13, N 1. P. 193–253.
5. *Matsumura A., Nishida T.* The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases // J. Math. Kyoto Univ. 1980. V. 20, N 1. P. 67–104.
6. *DiPerna R. J., Lions P.-L.* Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Invent. Math. 1989. V. 98. P. 511–547.
7. *Lions P.-L.* Mathematical topics in fluid dynamics. Compressible models. Oxford: Oxford Univ. Press, 1998. (Science publication; V. 2).
8. *Feireisl E., Novotny A., Petzeltova H.* On the existence of globally defined weak solutions to the Navier — Stokes equations // J. Math. Fluid Mech. 2001. V. 3. P. 358–392.
9. *Вайгант В. А., Кажихов А. В.* О существовании глобальных решений двумерных уравнений Навье — Стокса сжимаемой вязкой жидкости // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 6. С. 1283–1316.
10. *Кажихов А. В.* Уравнение потенциальных течений сжимаемой вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса: существование, единственность и стабилизация решений // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 3. С. 70–80.

11. *Вайгант В. А., Кажихов А. В.* Глобальные решения уравнений потенциальных течений сжимаемой вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 6. С. 1010–1022.

12. *Лукина Е. В.* Разрешимость нестационарной краевой задачи для модельной системы динамики баротропного газа // Дальневосточный мат. журн. 2001. Т. 2, № 1. С. 17–37.

13. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

14. *Солонников В. А.* Переопределенные эллиптические краевые задачи // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Л.: Наука, 1971. С. 73–92.

15. *Темам Р.* Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.

16. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

17. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

Статья поступила 4 марта 2002 г.

Лукина Елена Владимировна
Институт прикладной математики ДВО РАН, ул. Радио, 7, Владивосток 690041
`leb@iam.dvo.ru`