Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 517.55

ОБ АНАЛОГЕ ФОРМЫ ФУБИНИ — ШТУДИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ТОРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

А. А. Кытманов

Аннотация: Построены аналог формы Фубини — Штуди ω_0 для двумерных торических многообразий $\mathbb{X}$ и эталонная форма ω, являющаяся ядром интегрального представления для голоморфных функций в d-круговых областях из $\mathbb{C}^d$, связанных с двумерными торическими многообразиями $\mathbb{X}$. Показано, что это ядро является замкнутой дифференциальной формой в $\mathbb{C}^d$, с которой ассоциируется положительная форма ω_0 на $\mathbb{X}$.

Ключевые слова: торические многообразия, форма Фубини-Штуди, интегральное представление

Введение

Как известно, ядро интегрального представления Бохнера — Мартинелли в $\mathbb{C}^{n+1}$ тесно связано с формой Фубини — Штуди для проективного пространства $\mathbb{P}^n = \mathbb{CP}^n$ следующим образом:

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d\lambda}{\lambda} \wedge \omega_0([\xi]) \tag{1}$$

(см., например, [1, с. 400; 2, с. 162]). Здесь ω — форма Бохнера — Мартинелли,

$$\omega(z) = \frac{n!}{(2\pi i)^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{\bar{z}_k}{|z|^{2n+2}}d\bar{z}[k] \wedge dz,$$

$dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{n+1}$, $d\bar{z}[k]$ получается из $d\bar{z}$ вычеркиванием дифференциала $d\bar{z}_k$. Форма $\omega_0([\xi])$ есть форма объема для метрики Фубини — Штуди в $\mathbb{P}^n$ (см. [3, с. 21]):

$$\omega_0([\xi]) = \frac{n!}{(2\pi i)^n}\frac{E(\xi) \wedge \overline{E(\xi)}}{|\xi|^{2(n+1)}}, \tag{2}$$

где

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\xi_k d\xi[k]$$

— форма Эйлера, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ — однородные координаты точки $[\xi] \in \mathbb{P}^n$. При этом $\xi, z \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ связаны соотношением $z = \lambda\xi$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта № 00–15–96140).

Форма Бохнера — Мартинелли представляет собой «эталонную» форму степени $2n+1$ в множестве $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$. А это множество есть расслоение над $\mathbb{P}^n$, слой которого является одномерным тором $\mathbb{C}_*$. Другими словами, $\mathbb{P}^n=[\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}]/G$, где $G=\{(\lambda,\dots,\lambda)\in\mathbb{C}^{n+1}:\lambda\in\mathbb{C}_*\}$ — группа преобразований, образованная диагональными матрицами. Проективное пространство — частный случай торического многообразия. В общем случае n-мерное торическое многообразие является фактор-пространством (см. [4–6])

$$\mathbb{X}=[\mathbb{C}^d\setminus Z(\Sigma)]/G.$$

Здесь $Z(\Sigma)$ представляет собой объединение некоторых координатных подпространств в $\mathbb{C}^d$, построенных по вееру $\Sigma\subset\mathbb{R}^n$ с d образующими, а G — группа, изоморфная тору $(\mathbb{C}_*)^r$, $r=d-n$, также построенная по вееру Σ.

В своем докладе на конференции «Nordan» по комплексному анализу (Стокгольм, апрель 1999 г.) А. К. Цих поставил задачу вычисления форм объема $\omega_0([\xi])$ на торических многообразиях $\mathbb{X}$ (форм Фубини — Штуди) и эталонных форм $\omega(z)$ на $\mathbb{C}^d\setminus Z(\Sigma)$ со свойством

$$\omega(z)\sim\frac{1}{(2\pi i)^r}\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\wedge\dots\wedge\frac{d\lambda_r}{\lambda_r}\wedge\omega_0([\xi]),$$

обобщающим (1), где знак $\sim$ означает, что формы имеют одинаковые вычеты относительно $\lambda_1=\dots=\lambda_r=0$. При этом он отметил, что формы ω могут служить ядрами интегральных представлений в $\mathbb{C}^d$.

Произвольное компактное комплексно-двумерное торическое многообразие $\mathbb{X}=\mathbb{X}^2$ определяется по полному вееру $\Sigma\subset\mathbb{R}^2$, который задается набором векторов $v_1,\dots,v_d\in\mathbb{Z}^2$ таких, что определитель из любых двух соседних векторов v_k,v_{k+1} равняется 1 (мы считаем, что $v_{d+1}=v_1$, т. е. v_k пронумерованы по модулю d).

В конструкции $\mathbb{X}$ важную роль играет решетка соотношений между векторами v_k. Пусть

$$\begin{cases} a_{11}v_1+\dots+a_{1d}v_d=0\\ \vdots\\ a_{r1}v_1+\dots+a_{rd}v_d=0,\end{cases}\tag{3}$$

где $r=d-2$, — все независимые линейные соотношения над $\mathbb{Z}^2$ между v_k (в § 1 доказано, что базисные соотношения (3) можно выбрать с неотрицательными коэффициентами a_{ij}). Каждому вектору v_k сопоставляется комплексная переменная ζ_k так, что $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_d)$ играет роль однородных координат соответствующего торического многообразия $\mathbb{X}$.

Наша цель состоит в построении аналога формы Фубини — Штуди ω_0 для двумерных торических многообразий $\mathbb{X}$ и эталонной формы ω, являющейся ядром интегрального представления для голоморфных функций в d-круговом полиэдре $W=W_\rho$, определенном системой неравенств

$$\begin{cases} a_{11}|\zeta_1|^2+\dots+a_{1d}|\zeta_d|^2<\rho_1\\ \vdots\\ a_{r1}|\zeta_1|^2+\dots+a_{rd}|\zeta_d|^2<\rho_r\end{cases}\tag{4}$$

с интегрированием по остову этого полиэдра и с ядром $\omega(\zeta)$. Указанный остов получается из (4) заменой всех неравенств равенствами и представляет собой прообраз $\mu^{-1}(\rho)$ моментного отображения $\mu : \mathbb{C}^d \to A_1(\mathbb{X}) \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^r$, где $A_1(\mathbb{X})$ — группа Чжоу многообразия $\mathbb{X}$. Наше интегральное представление справедливо в случае, когда радиус-вектор $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_r)$ взят из конуса Кэллера для $\mathbb{X}$ (см. [5]), а веер удовлетворяет определенному условию выпуклости.

Эталонная форма $\omega(\zeta)$ обобщает упомянутую выше дифференциальную форму Бохнера — Мартинелли; она имеет вид G-инвариантной дифференциальной $(d, 2)$-формы

$$\omega(\zeta) = \frac{h(\bar{\zeta}) \wedge d\zeta}{g(\zeta, \bar{\zeta})}, \tag{5}$$

где $h(\zeta)$ — обобщение формы Эйлера, а $g(\zeta, \bar{\zeta})$ — полином с множеством нулей, совпадающим с $Z(\Sigma)$.

Построенная форма ω_0 является положительной G-инвариантной $(2, 2)$-формой на $\mathbb{X}$.

1. Моментное отображение и конус Кэллера

Напомним основные определения, используемые в работе.

Конусом, порожденным системой векторов $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, называется множество

$$\sigma = \left\{ \sum_{j=1}^{k} b_j v_j : b_j \geq 0 \right\}$$

в $\mathbb{R}^n$. *Гранью конуса* σ называется подмножество σ, для которого какие-то b_j равны 0. *Размерностью конуса* называется размерность минимального подпространства, содержащего данный конус.

Веером Σ называется всякая совокупность конусов такая, что

1) пересечение любых двух конусов из этой совокупности есть конус из этой совокупности, являющийся гранью каждого из этих конусов;

2) если конус принадлежит данной совокупности, то все его грани также принадлежат данной совокупности (размерностью веера называется максимальная размерность конусов, принадлежащих вееру).

Двумерный веер полностью определяется набором своих одномерных образующих $v_1, \ldots, v_d$.

Определение 1. Двумерный веер $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$, порожденный набором векторов $v_1, \ldots, v_d$, называется *примитивным*, если матрица из вектор-столбцов всякой пары соседних векторов v_k, v_{k+1} унимодулярна.

Как отмечалось выше, важную роль в конструкции торического многообразия $\mathbb{X}$ играют соотношения (3). Относительно их докажем следующее утверждение.

Предложение 1. *Для всякого примитивного двумерного веера систему* (3) *независимых линейных соотношений между* v_k *можно записать с неотрицательными коэффициентами* a_{ij}.

Доказательство. 1. Пусть векторы $v_1, \ldots, v_d$ таковы, что каждые два из них линейно независимы. Тогда найдется тройка v_i, v_j, v_k такая, что $av_i + bv_j + cv_k = 0$, где a, b, c положительны. Действительно, иначе все векторы лежат в одной полуплоскости, что противоречит примитивности веера. Остальные $d-3$ линейно независимых соотношений получим следующим образом. Лучи, натянутые на векторы $-v_i, -v_j, -v_k$, делят плоскость $\mathbb{R}^2$ на три сектора. Обозначим их через S_{ij}, S_{ik} и S_{jk}. Любой вектор v_l из веера попадает в один из этих секторов. Если он попадает в сектор S_{ij}, то найдутся положительные b_{li} и b_{lj} такие, что $b_{li}v_i + b_{lj}v_j + v_l = 0$. Если v_l попадает в один из двух других секторов, то существует соотношение с положительными коэффициентами, связывающее v_l с соответствующими двумя векторами. Аналогично получаем соотношения со всеми остальными векторами веера. Очевидно, что они все являются независимыми.

2. Если в веере найдется пара v_i, v_j линейно зависимых векторов, то в силу определения веера они не могут быть направлены в одну сторону. Следовательно, существуют положительные a и b такие, что $av_i + bv_j = 0$ является независимым соотношением с положительными коэффициентами. Выпишем таким способом соотношения на все пары линейно зависимых векторов. Если таких соотношений $d-2$, то они и являются искомой системой. Если соотношений меньше чем $d-2$, то ясно, что в оставшиеся соотношения войдет по одному вектору из каждой пары линейно зависимых векторов. Исключим из каждой пары по одному вектору таким образом, чтобы среди оставшихся векторов нашлась тройка v_i, v_j, v_k такая, что $av_i+bv_j+cv_k = 0$, где a, b, c положительны. Это можно сделать в силу примитивности веера. Поскольку среди оставшихся векторов каждые два линейно независимы, то далее, применяя рассуждения п. 1, выписываем все оставшиеся независимые линейные соотношения на векторы веера. Предложение доказано.

В силу предложения 1 везде далее без ограничения общности считаем, что в системе (3) все коэффициенты a_{ij} неотрицательные.

Каждому вектору v_k сопоставляется переменная ζ_k. Всякая пара векторов v_i, v_j, не находящихся рядом (т. е. не определяющих двумерного конуса), определяет координатную плоскость из $Z(\Sigma)$ (см. [7]), так что

$$Z(\Sigma) = \bigcup_{|i-j|>1} \{\zeta_i = \zeta_j = 0\}.$$

(Нумерация переменных ζ_k производится по модулю d, так же, как и нумерация векторов v_k.)

Группа G определяется соотношениями (3); таким образом, базис решетки соотношений составляют векторы $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{id})$, $i = 1, \dots, r$. Группа G есть r-параметрическая поверхность $\left\{\left(\lambda_1^{a_{11}} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{a_{r1}}, \dots, \lambda_1^{a_{1d}} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{a_{rd}}\right) : \lambda_j \in \mathbb{C}_*\right\} \subset (\mathbb{C}_*)^d$, так что

$$\zeta \sim \eta \Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_r) : \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d) = \left(\lambda_1^{a_{11}} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{a_{r1}}\eta_1, \dots, \lambda_1^{a_{1d}} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{a_{rd}}\eta_d\right).$$

Моментное отображение (см., например, [5, 8]) $\mu : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}^d/\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^r$ будет выглядеть следующим образом:

$$\mu(\zeta_1, \dots, \zeta_d) = (\rho_1, \dots, \rho_r),$$

где

$$\begin{cases} a_{11}|\zeta_1|^2 + \dots + a_{1d}|\zeta_d|^2 = \rho_1 \\ \vdots \\ a_{r1}|\zeta_1|^2 + \dots + a_{rd}|\zeta_d|^2 = \rho_r. \end{cases} \tag{6}$$

При фиксированном $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_r) \in \mathbb{R}^r$ соотношения (6) определяют множество $\Gamma_0(\rho) = \mu^{-1}(\rho)$.

Конус Кэллера (см., например, [5]) для торического многообразия $\mathbb{X}$ определяется следующим образом. Припишем каждому вектору v_i из Σ число $b_i \in \mathbb{R}$, т. е. рассмотрим функцию $\psi : \{v_1, \dots, v_d\} \to \mathbb{R}$ на конечном множестве векторов v_i. Эту функцию можно продолжить до кусочно-линейной функции на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, полагая ее линейной на каждом конусе $\langle v_k, v_{k+1}\rangle$. Нас интересуют те векторы $(b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$, для которых указанные кусочно-линейные функции строго выпуклые. Совокупность таких векторов образует многогранный конус $\widetilde{K}$ в $\mathbb{R}^d$ (т. е. конус, ограниченный конечным числом гиперплоскостей).

Обозначим через $\tilde{\mu} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^r$ линейное отображение с матрицей (a_{ij}) из (6).

Определение 2. Внутренность K образа $\tilde{\mu}(\widetilde{K})$ в пространстве $\mathbb{R}^r$ называется *конусом Кэллера.*

Фактически конус $\widetilde{K}$ описывается следующим образом (см. [7]). Для каждой пары v_i, v_j не соседних векторов представляем их сумму в виде

$$v_i + v_j = c_k v_k + c_{k+1} v_{k+1}, \quad c_k, c_{k+1} \in \mathbb{Q}_+, \tag{7}$$

где v_k и v_{k+1} образуют конус, в который попадает эта сумма. Тогда каждая указанная пара v_i, v_j определяет неравенство на векторы $b = (b_1, \dots, b_d) \in \widetilde{K}$:

$$b_i + b_j \geq c_k b_k + c_{k+1} b_{k+1}. \tag{8}$$

Тем самым $\widetilde{K}$ задается системой неравенств (8), пробегающих по всем парам v_i, v_j, $|i - j| > 1$, где k, c_k, c_{k+1} зависят от выбранной пары v_i, v_j.

Отождествляя b_j с $|\zeta_j|^2$ и рассматривая образы $\mu(\zeta_1, \dots, \zeta_d) = (\rho_1, \dots, \rho_r)$, получим, что конус Кэллера K задается $\binom{d}{2} - d$ неравенствами на ρ_j:

$$|\zeta_i(\rho)|^2 + |\zeta_j(\rho)|^2 > c_k |\zeta_k(\rho)|^2 + c_{k+1} |\zeta_{k+1}(\rho)|^2 \quad \forall i, j : \ |i - j| > 1. \tag{9}$$

Неравенства (9) будем называть *условиями кэллеровости.*

Предложение 2. *Для $\rho \in K$ цикл $\Gamma_0(\rho) = \mu^{-1}(\rho)$ не пересекает $Z(\Sigma)$.*

Доказательство. Покажем, что для любой плоскости $\{z_i = z_j = 0, \ |i - j| > 1\}$ из $Z(\Sigma)$ множество $\Gamma_0(\rho)$ не пересекается с ней. Действительно, подставляя в (9) $z_i = z_j = 0$, получаем $c_k|z_k|^2 + c_{k+1}|z_{k+1}|^2 < 0$, т. е. $\Gamma_0(\rho) \cap \{z_i = z_j = 0\} = \varnothing$. Предложение доказано.

2. Эталонная форма и аналог формы Фубини — Штуди

Запишем форму ω в $\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$, являющуюся аналогом формы Бохнера — Мартинелли, и докажем ее основные свойства.

Искомая форма имеет бистепень $(d, 2)$ и представляется в виде (5). Числитель — форма типа $(d, 2)$, где $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_d$, а

$$h(\zeta) = \sum_{1 \leq j < k \leq d} (-1)^{j+k-1} A_{jk} \zeta[j, k] d\zeta_j \wedge d\zeta_k \tag{10}$$

— аналог формы Эйлера. Здесь $\zeta[j, k]$ — произведение ζ_l, $l = 1, \dots, d$, $l \neq j, k$; A_{jk} — минор матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rd} \end{pmatrix},$$

где j-й и k-й столбцы вычеркнуты.

Интересно отметить, что определители A_{jk} тесно связаны с рассматриваемыми в [6] определителями $v_{jk} := \det(v_j, v_k)$, а именно можно доказать, что

$$(-1)^{j+k-1}A_{jk} = Kv_{jk} \quad \forall j,k:\ 1 \leq j < k \leq d,$$

где константа K не зависит от j и k.

Для построения знаменателя g формы (5) далее везде будем требовать выполнения следующего свойства выпуклости веера Σ:

$$\det(v_j, v_{k+1}) \leq \det(v_j, v_k) + \det(v_k, v_{k+1}), \qquad 1 \leq j,k \leq d.$$

Нетрудно показать, что условие выпуклости таких троек векторов эквивалентно выпуклости многогранника с вершинами в концах векторов $v_1, \ldots, v_d$.

Заметим, что такие традиционные двумерные торические многообразия, как проективная плоскость $\mathbb{P}_2$ или произведение $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ проективных прямых, задаются выпуклыми веерами. В работе [9] рассматривается пример выпуклого веера, отличного от вышеупомянутых. Примером невыпуклого может служить веер, заданный векторами $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (-2,1)$, $v_3 = (-1,0)$, $v_4 = (-2,-1)$.

Введем обозначение

$$\nu_j^k := \det(v_j, v_k) - \det(v_j, v_{k+1}), \quad 1 \leq j,k \leq d. \tag{11}$$

Условие выпуклости веера в силу того, что $\det(v_j, v_{j+1}) = 1$, эквивалентно следующему:

$$\nu_j^k \geq -1 \quad \forall 1 \leq j,k \leq d. \tag{12}$$

Теперь мы можем определить знаменатель g в виде полиномиальной по ζ и $\bar{\zeta}$ функции:

$$g(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{m=1}^{d} (\zeta\bar{\zeta})^{\nu^m + \bar{1}}[m, m+1],$$

где

$$(\zeta\bar{\zeta})^{\nu^m + \bar{1}}[m, m+1] = \prod_{\substack{1 \leq i \leq d \\ i \neq m, m+1}} (\zeta_i \bar{\zeta}_i)^{\nu_i^m + 1}.$$

Заметим, что в силу выполнения равенств $\nu_i^i + 1 = \nu_{i+1}^i + 1 = 0$ функцию $g(\zeta, \bar{\zeta})$ можно переписать в виде

$$g(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{m=1}^{d} (\zeta\bar{\zeta})^{\nu^m + \bar{1}}.$$

Каждый фиксированный элемент $\delta = \left(\lambda_1^{a_{11}} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{a_{r1}}, \ldots, \lambda_1^{a_{1d}} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{a_{rd}}\right) \in G$ определяет отображение $\delta : \mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma) \to \mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$ по формуле $\zeta \to \delta \cdot \zeta$, т. е.

$$\begin{cases} \zeta_1 \to \lambda_1^{a_{11}} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{a_{r1}} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_d \to \lambda_1^{a_{1d}} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{a_{rd}} \zeta_d. \end{cases} \tag{13}$$

Предложение 3. *Дифференциальная форма ω инвариантна относительно действия δ.*

Доказательство. Выполняя прямую подстановку, получаем законы преобразования $h(\bar\zeta)$, $d\zeta$ и $g(\zeta,\bar\zeta)$:

$$h(\bar\zeta)\to\prod_{i=1}^r\bar\lambda_i^{a_{i1}+\dots+a_{id}}h(\bar\zeta),\quad d\zeta\to\prod_{i=1}^r\lambda_i^{a_{i1}+\dots+a_{id}}d\zeta,$$

$$g(\zeta,\bar\zeta)\to\prod_{i=1}^r(\lambda_i\bar\lambda_i)^{a_{i1}+\dots+a_{id}}g(\zeta,\bar\zeta).$$

Подставляя в ω, приходим к утверждению предложения. □

Теперь опишем поведение формы ω при действии группы $G:\big(\mathbb{C}^d\setminus Z(\Sigma)\big)\times\mathbb{C}_*^r\to\mathbb{C}^d\setminus Z(\Sigma)$, определенном формулой (13).

Лемма 1. *При действии* (13) *форма $d\zeta$ преобразуется по правилу*

$$d\zeta\to\prod_{i=1}^r\lambda_i^{a_{i1}+\dots+a_{id}-1}d\lambda_1\wedge\dots\wedge d\lambda_r\wedge h(\zeta)+\psi(\lambda,\zeta),$$

где h определяется формулой (10), *а форма ψ является по ζ формой более высокой степени, чем $h(\zeta)$.*

Доказательство. Перепишем замену (13) в виде

$$\zeta_k\to\varphi_k(\lambda)\zeta_k,\quad k=1,\dots,d.$$

Будем иметь

$$\begin{aligned}d\zeta&\to(\zeta_1d\varphi_1+\varphi_1d\zeta_1)\wedge\dots\wedge(\zeta_dd\varphi_d+\varphi_dd\zeta_d)\\&=\sum_{1\le j<k\le d}(-1)^{j+k-1}\varphi_j\varphi_kd\varphi[j,k]\zeta[j,k]d\zeta_j\wedge d\zeta_k+\psi(\lambda,\zeta).\end{aligned}$$

Здесь

$$d\varphi[j,k]=\det\left(\frac{\partial\varphi_l(\lambda)}{\partial\lambda_m}\right)d\lambda_1\wedge\dots\wedge d\lambda_r,\quad l\ne j,k.$$

Вычислим $d\varphi[j,k]\varphi_j\varphi_k$:

$$d\varphi[j,k]=\begin{vmatrix}a_{11}\lambda_1^{a_{11}-1}\lambda_2^{a_{21}}\dots\lambda_r^{a_{r1}}d\lambda_1&\dots&a_{r1}\lambda_1^{a_{11}}\dots\lambda_r^{a_{r1}-1}d\lambda_r\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1d}\lambda_1^{a_{1d}-1}\lambda_2^{a_{2d}}\dots\lambda_r^{a_{rd}}d\lambda_1&\dots&a_{rd}\lambda_1^{a_{1d}}\dots\lambda_r^{a_{rd}-1}d\lambda_r\end{vmatrix},$$

где в последней матрице пропущены j-я и k-я строки. Тогда

$$\begin{aligned}d\varphi[j,k]\varphi_j\varphi_k&=\lambda_1^{a_{11}+\dots+a_{1d}-r}\dots\lambda_r^{a_{11}+\dots+a_{1d}-r}d\lambda_1\wedge\dots\wedge d\lambda_rB_{jk}\\&=\lambda_1^{a_{11}+\dots+a_{1d}-1}\dots\lambda_r^{a_{11}+\dots+a_{1d}-1}A_{jk}d\lambda_1\wedge\dots\wedge d\lambda_r,\end{aligned}$$

где B_{jk} — определитель матрицы

$$\begin{vmatrix}a_{11}\lambda_2\dots\lambda_r&\dots&a_{r1}\lambda_1\dots\lambda_{r-1}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1d}\lambda_2\dots\lambda_r&\dots&a_{rd}\lambda_1\dots\lambda_{r-1}\end{vmatrix}$$

с пропущенными j-й и k-й строками.

Таким образом,

$$\begin{aligned}d\zeta\to\prod_{i=1}^r\lambda_i^{a_{i1}+\dots+a_{id}-1}&d\lambda_1\wedge\dots\wedge d\lambda_r\\&\wedge\sum_{1\le j<k\le d}(-1)^{j+k-1}A_{jk}\zeta[j,k]d\zeta_j\wedge d\zeta_k+\psi(\lambda,\zeta).\end{aligned}$$

Лемма 2. *Форма $h(\bar\zeta)$ при действии* (13) *преобразуется к виду*

$$h(\bar\zeta) \to \prod_{i=1}^{r} \bar\lambda_i^{a_{i1}+\dots+a_{id}} h(\bar\zeta).$$

Доказательство. Введем обозначения

$$\bar\lambda^{a_k} := \bar\lambda_1^{a_{1k}} \dots \bar\lambda_r^{a_{rk}}, \quad \bar\lambda^{a} := \bar\lambda^{a_1} \dots \bar\lambda^{a_d}, \quad \bar\zeta := \bar\zeta_1 \dots \bar\zeta_d.$$

Тогда в форме $h(\bar\zeta)$ будет

$$d\bar\zeta_j \wedge d\bar\zeta_k \to \left[\bar\lambda^{a_j} d\bar\zeta_j + \sum_{l=1}^{r} a_{lj} \bar\lambda^{a_j} \frac{1}{\bar\lambda_l} \bar\zeta_j d\bar\lambda_l\right] \wedge \left[\bar\lambda^{a_k} d\bar\zeta_k + \sum_{i=1}^{r} a_{ik} \bar\lambda^{a_k} \frac{1}{\bar\lambda_i} \bar\zeta_k d\bar\lambda_i\right].$$

1. Покажем, что в форме $h(\bar z)$ после замены (13) коэффициенты при $d\bar\lambda_l \wedge d\bar\lambda_i$, $1 \le l < i \le d$, равны нулю. Имеем

$$\sum_{l,i} d\bar\lambda_l \wedge d\bar\lambda_i \Big[\sum_{j<k} (-1)^{j+k-1} A_{jk} \bar\zeta_j \bar\zeta_k a_{lj} a_{ik} \bar\lambda^{a_j} \bar\lambda^{a_k} \frac{1}{\bar\lambda_l \bar\lambda_i} \bar z[j,k]\Big]$$
$$= \sum_{l<i} \frac{d\bar\lambda_l \wedge d\bar\lambda_i}{\bar\lambda_l \bar\lambda_i} \Big[\sum_{j<k} (-1)^{j+k-1} A_{jk} \bar\zeta_j \bar\zeta_k \bar\lambda^{a_j} \bar\lambda^{a_k} (a_{lj} a_{ik} - a_{lk} a_{ij}) \frac{\bar\lambda^{a} \bar\zeta}{\bar\lambda^{a_j} \bar\lambda^{a_k} \bar\zeta_j \bar\zeta_k}\Big]$$
$$= \bar\lambda^{a} \bar\zeta \sum_{l<i} \frac{d\bar\lambda_l \wedge d\bar\lambda_i}{\bar\lambda_l \bar\lambda_i} \Big[\sum_{j<k} (-1)^{j+k-1} \begin{vmatrix} a_{lj} & a_{ij} \\ a_{lk} & a_{ik} \end{vmatrix} A_{jk}\Big].$$

По формуле Лапласа (формула разложения по последним двум строкам)

$$\sum_{j<k} (-1)^{j+k-1} \begin{vmatrix} a_{lj} & a_{ij} \\ a_{lk} & a_{ik} \end{vmatrix} A_{jk} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rd} \\ a_{l1} & \dots & a_{ld} \\ a_{i1} & \dots & a_{id} \end{pmatrix} = 0,$$

поскольку в последней матрице размера $d \times d$ есть линейно зависимые строки (а именно l-я строка совпадает с $(d-1)$-й, а i-я — с d-й).

2. Покажем, что в форме $h(\bar\zeta)$ после замены (13) коэффициенты при $d\bar\zeta_j \wedge d\bar\lambda_i$ равны нулю. Имеем

$$d\bar\zeta_j \wedge d\bar\lambda_i \left[\sum_{k=j+1}^{d} \bar\lambda^{a_j} a_{ik} \frac{\bar\lambda^{a_k}}{\bar\lambda_i} \bar\zeta_k (-1)^{j+k-1} A_{jk} \bar z[j,k]\right]$$
$$= d\bar\zeta_j \wedge d\bar\lambda_i \frac{\bar\zeta \bar\lambda^{a}}{\bar\zeta_j \bar\lambda_i} \left[\sum_{k=j+1}^{d} (-1)^{j+k-1} a_{ik} A_{jk}\right],$$

$$- d\bar\zeta_k \wedge d\bar\lambda_i \left[\sum_{j=1}^{k-1} \bar\lambda^{a_k} a_{ij} \frac{\bar\lambda^{a_j}}{\bar\lambda_i} \bar\zeta_j (-1)^{j+k-1} A_{jk} \bar z[j,k]\right]$$
$$= -d\bar\zeta_k \wedge d\bar\lambda_i \frac{\bar\zeta \bar\lambda^{a}}{\bar\zeta_k \bar\lambda_i} \left[\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+k-1} a_{ij} A_{jk}\right].$$

Получаем, что коэффициент при $d\bar{\zeta}_j \wedge d\bar{\lambda}_i$ равен

$$\frac{\bar{\zeta}\bar{\lambda}}{\bar{\zeta}_j\bar{\lambda}_i}\left[\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{j+k}a_{ik}A_{jk} + \sum_{k=j+1}^{d}(-1)^{j+k-1}a_{ik}A_{jk}\right] = 0,$$

так как в последней формуле в квадратных скобках стоит формула разложения по последней строке матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rd} \\ a_{i1} & \dots & a_{id} \end{pmatrix}$$

размера $(d-1)\times(d-1)$, где j-й столбец отсутствует. Определитель последней матрицы равен нулю, поскольку в ней i-я и $(d-1)$-я строки совпадают (т. е. линейно зависимы).

3. Таким образом, в форме $h(\bar{\zeta})$ останутся только коэффициенты типа $d\bar{\zeta}_j \wedge d\bar{\zeta}_k$:

$$h(\bar{\zeta}) \to \sum_{j<k}(-1)^{j+k-1}A_{jk}\bar{\zeta}[j,k]\frac{\bar{\lambda}^a}{\bar{\lambda}^{a_j}\bar{\lambda}^{a_k}}\bar{\lambda}^{a_j}\bar{\lambda}^{a_k}d\bar{\zeta}_j \wedge d\bar{\zeta}_j$$
$$= \bar{\lambda}^a h(\bar{\zeta}) = \prod_{i=1}^{r}\bar{\lambda}_i^{a_{i1}+\dots+a_{id}}h(\bar{\zeta}).$$

Лемма доказана.

В силу лемм 1 и 2 числитель формы ω при действии (13) преобразуется к виду

$$h(\bar{\zeta}) \wedge d\zeta \to \prod_{i=1}^{r}\lambda_i^{a_{i1}+\dots+a_{id}-1}\prod_{i=1}^{r}\bar{\lambda}_i^{a_{i1}+\dots+a_{id}}d\lambda_1 \wedge \dots \wedge d\lambda_r \wedge h(\zeta) \wedge h(\bar{\zeta}) + \psi_1,$$

где $\psi_1 = \prod\limits_{i=1}^{r}\bar{\lambda}_i^{a_{i1}+\dots+a_{id}}h(\bar{\zeta}) \wedge \psi$.

Как отмечено в предложении 3, знаменатель g при действии (13) преобразуется к виду

$$g(\zeta,\bar{\zeta}) \to \prod_{i=1}^{r}(\lambda_i\bar{\lambda}_i)^{a_{i1}+\dots+a_{id}}g(\zeta,\bar{\zeta}).$$

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *При действии* (13) *форма* ω *преобразуется к виду*

$$\omega \to \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} \wedge \dots \wedge \frac{d\lambda_r}{\lambda_r} \wedge \omega_0 + \omega_1 \tag{14}$$

с положительной $(2,2)$*-формой*

$$\omega_0 = \frac{h(\bar{\zeta}) \wedge h(\zeta)}{g(\zeta,\bar{\zeta})}$$

нулевой степени однородности по действию группы G *и формой* ω_1*, которая не содержит сопряженных дифференциалов* $d\bar{\lambda}_i$ *и в каждом из своих слагаемых имеет не более чем* $r-1$ *дифференциалов* $d\lambda_j$.

Форма ω_0 является аналогом формы Фубини — Штуди (2) для проективного пространства.

Напомним, что $\Gamma_0 = \Gamma_0(\rho)$ — множество (6), которое мы будем трактовать как цикл интегрирования. Цикл Γ_0 расслаивается над $\mathbb{X}$ со слоями, изоморфными действительным торам $\mathbb{T}^r$ ($\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$), т. е.

$$\Gamma_0(\rho)/G_{\mathbb{R}} = \mathbb{X}, \tag{15}$$

где $G_{\mathbb{R}} := \left\{(\lambda_1^{a_{11}} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{a_{r1}}, \ldots, \lambda_1^{a_{1d}} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{a_{rd}}) : |\lambda_j| = 1,\ j = 1, \ldots, r\right\}$ (см. [5, теорема 4.1]). Отсюда и из теоремы 1 следует, что форма ω_0 зависит лишь от орбит группы G и, следовательно, корректно определена на $\mathbb{X}$. Кроме того, получаем, что Γ_0 не гомологичен нулю в $\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$.

Следствие 1. *Имеет место равенство* $\int\limits_{\Gamma_0} \omega = C$, *где* C — *некоторая константа, отличная от нуля.*

Доказательство. В силу (14) и (15)

$$\int\limits_{\Gamma_0} \omega = \int\limits_{|\lambda_1|=1} \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} \cdots \int\limits_{|\lambda_r|=1} \frac{d\lambda_r}{\lambda_r} \int\limits_{\mathbb{X}} \omega_0 = (2\pi i)^r \int\limits_{\mathbb{X}} \omega_0.$$

Последний интеграл — положительное число в силу положительности формы ω_0, что и требовалось доказать.

Докажем теперь следующее утверждение.

Теорема 2. *Форма* ω *замкнута.*

Доказательство. Фактически нужно показать, что $g\bar{\partial}h - \bar{\partial}g \wedge h = 0$. Отсюда будет следовать, что

$$gd(h \wedge d\zeta) - dg \wedge (h \wedge d\zeta) = gdh \wedge d\zeta - dg \wedge h \wedge d\zeta = (g\bar{\partial}h - \bar{\partial}g \wedge h) \wedge d\zeta = 0,$$

т. е. замкнутость формы ω. Имеем

$$\begin{aligned}\bar{\partial}h(\bar{\zeta}) &= \sum_{l<j<k} (-1)^{j+k-1} A_{jk}\bar{\zeta}[l,j,k] d\bar{\zeta}_l d\bar{\zeta}_j d\bar{\zeta}_k \\ &+ \sum_{j<l<k} (-1)^{j+k} A_{jk}\bar{\zeta}[l,j,k] d\bar{\zeta}_j d\bar{\zeta}_l d\bar{\zeta}_k + \sum_{j<k<l} (-1)^{j+k-1} A_{jk}\bar{\zeta}[l,j,k] d\bar{\zeta}_j d\bar{\zeta}_k d\bar{\zeta}_l \\ &= \sum_{l<j<k} ((-1)^{j+k-1} A_{jk} + (-1)^{l+k} A_{lk} + (-1)^{l+j-1} A_{lj})\bar{\zeta}[l,j,k] d\bar{\zeta}_l d\bar{\zeta}_j d\bar{\zeta}_k,\end{aligned}$$

$$\bar{\partial}g(\zeta,\bar{\zeta}) = \sum_{m=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} (\nu_l^m + 1)\frac{1}{\bar{\zeta}_l}(\zeta\bar{\zeta})^{\nu^m+1} d\bar{\zeta}_l.$$

Вычислим $g\bar{\partial}h$ и $\bar{\partial}g \wedge h$:

$$\begin{aligned}g\bar{\partial}h = \sum_{l<j<k} \sum_{m=1}^{d} [(-1)^{j+k-1} A_{jk} \\ + (-1)^{l+k} A_{lk} + (-1)^{l+j-1} A_{lj}](\zeta\bar{\zeta})^{\nu^m+1}\bar{\zeta}[l,j,k] d\bar{\zeta}_l d\bar{\zeta}_j d\bar{\zeta}_k,\end{aligned}$$

$$\bar{\partial}g \wedge h = \left[\sum_{m=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} (\nu_l^m + 1)\frac{1}{\bar{\zeta}_l}(\zeta\bar{\zeta})^{\nu^m+1} d\bar{\zeta}_l\right] \wedge \sum_{j<k} (-1)^{j+k-1} A_{jk}\bar{\zeta}[j,k] d\bar{\zeta}_j \wedge d\bar{\zeta}_k$$

$$= \sum_{l<j<k}\sum_{m=1}^{d}\big(\nu_l^m+1\big)(\zeta\bar\zeta)^{\nu^m+1}(-1)^{j+k-1}A_{jk}\bar\zeta[l,j,k]d\bar\zeta_l d\bar\zeta_j d\bar\zeta_k$$

$$+\sum_{j<l<k}\sum_{m=1}^{d}\big(\nu_l^m+1\big)(\zeta\bar\zeta)^{\nu^m+1}(-1)^{j+k}A_{jk}\bar\zeta[l,j,k]d\bar\zeta_j d\bar\zeta_l d\bar\zeta_k$$

$$+\sum_{j<k<l}\sum_{m=1}^{d}\big(\nu_l^m+1\big)(\zeta\bar\zeta)^{\nu^m+1}(-1)^{j+k-1}A_{jk}\bar\zeta[l,j,k]d\bar\zeta_j d\bar\zeta_k d\bar\zeta_l$$

$$= \sum_{j<k<l}\sum_{m=1}^{d}\big[\big(\nu_l^m+1\big)(-1)^{j+k-1}A_{jk}+(\nu_j^m+1)(-1)^{l+k}A_{lk}$$

$$+(\nu_k^m+1)(-1)^{l+j-1}A_{lj}\big](\zeta\bar\zeta)^{\nu^m+1}\bar\zeta[l,j,k]d\bar\zeta_l d\bar\zeta_j d\bar\zeta_k.$$

Покажем, что у $g\bar\partial h-\bar\partial g\wedge h$ коэффициент при $\bar\zeta[l,j,k]d\bar\zeta_l d\bar\zeta_j d\bar\zeta_k$ равен нулю для любых $1\le l,j,k\le d$. Коэффициент равен

$$\sum_{m=1}^{d}[(-1)^{j+k-1}A_{jk}+(-1)^{l+k}A_{lk}+(-1)^{l+j-1}A_{lj}](\zeta\bar\zeta)^{\nu^m+1}$$

$$-\sum_{m=1}^{d}\big[\big(\nu_l^m+1\big)(-1)^{j+k-1}A_{jk}+\big(\nu_j^m+1\big)(-1)^{l+k}A_{lk}+\big(\nu_k^m+1\big)(-1)^{l+j-1}A_{lj}\big](\zeta\bar\zeta)^{\nu^m+1}$$

$$=-\sum_{m=1}^{d}\big[\nu_l^m(-1)^{j+k-1}A_{jk}+\nu_j^m(-1)^{l+k}A_{lk}+\nu_k^m(-1)^{l+j-1}A_{lj}\big](\zeta\bar\zeta)^{\nu^m+1}=0,$$

поскольку

$$\sum_{m=1}^{d}\nu_l^m(-1)^{j+k-1}A_{jk}=(-1)^{j+k-1}A_{jk}\sum_{m=1}^{d}[\det(v_l,v_m)-\det(v_l,v_{m+1})]$$

$$=(-1)^{j+k-1}A_{jk}\left[\sum_{m=1}^{d}\det(v_l,v_m)-\sum_{m=1}^{d}\det(v_l,v_{m+1})\right]=0$$

ввиду того, что

$$\sum_{m=1}^{d}\det(v_l,v_m)\equiv\sum_{m=1}^{d}\det(v_l,v_{m+1}).$$

Аналогично доказывается равенство нулю остальных двух сумм. Получаем, что $g\bar\partial h-\bar\partial g\wedge h=0$.

Предложение 4. *Пусть функция $f(\zeta)$ голоморфна в окрестности нуля U и $\rho_1,\dots,\rho_r$ настолько малы, что $\Gamma_0\subset U$. Тогда справедливо интегральное представление*

$$f(0)=\frac{1}{C}\int_{\Gamma_0}f(\zeta)\omega(\zeta), \tag{16}$$

где C — константа нормировки: $\int_{\Gamma_0}\omega=C\neq0$.

Доказательство. Так как форма $f\omega$ является $\bar\partial$-замкнутой, то интеграл (16) не зависит от $\rho_1,\dots,\rho_r$. Представим этот интеграл в виде

$$\int_{\Gamma_0}f(\zeta)\omega(\zeta)=\int_{\Gamma_0}f(0)\omega(\zeta)+\int_{\Gamma_0}(f(\zeta)-f(0))\omega(\zeta)=Cf(0)+\int_{\Gamma_0}(f(\zeta)-f(0))\omega(\zeta).$$

Покажем, что последний интеграл равен нулю. Сделаем замену $\zeta \to \tau^s \zeta$:

$$\zeta_1 \to \tau^{s_1}\zeta_1, \dots, \zeta_d \to \tau^{s_d}\zeta_d,$$

где

$$s_1 = a_{11} + \dots + a_{r1} > 0, \dots, s_d = a_{1d} + \dots + a_{rd} > 0.$$

При такой замене цикл Γ_0 перейдет в цикл Γ_τ:

$$\begin{cases} a_{11}|\tau^{s_1}\zeta_1|^2 + \dots + a_{1d}|\tau^{s_d}\zeta_d|^2 = \rho_1 \\ \vdots \\ a_{r1}|\tau^{s_1}\zeta_1|^2 + \dots + a_{rd}|\tau^{s_d}\zeta_d|^2 = \rho_r. \end{cases}$$

Интеграл преобразуется к виду

$$\int\limits_{\Gamma_0} (f(\zeta) - f(0))\omega(\zeta) = \lim_{\tau\to 0} \int\limits_{\Gamma_\tau} (f(\zeta) - f(0))\omega(\zeta) = \lim_{\tau\to 0} \int\limits_{\Gamma_0} (f(\zeta\tau^s) - f(0))\omega(\zeta\tau^s).$$

В силу предложения 3 форма ω инвариантна относительно данной замены: $\omega(\zeta\tau^s) = \omega(\zeta)$. Поскольку все s_k положительны, имеем $\lim\limits_{\tau\to 0} f(\zeta\tau^s) = f(0)$. Получаем, что

$$\lim_{\tau\to 0} \int\limits_{\Gamma_0} (f(\zeta\tau^s) - f(0))\omega(\zeta\tau^s) = \lim_{\tau\to 0} \int\limits_{\Gamma_0} (f(\zeta\tau^s) - f(0))\omega(\zeta) = 0.$$

Предложение доказано.

3. Интегральное представление

Поставим теперь вопрос о нахождении области D такой, что для любой точки $z \in D$ будет справедливо интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{C} \int\limits_{\Gamma_0} f(\zeta)\omega(\zeta - z), \tag{17}$$

где C — коэффициент нормировки, не зависящий от f.

Рассмотрим область $D = D_\rho$:

$$D := \{z_i, z_j \in \mathbb{C}^d : |z_i|^2 + |z_j|^2 < |\zeta_i(\rho)|^2 + |\zeta_j(\rho)|^2 - c_k|\zeta_k(\rho)|^2 - c_{k+1}|\zeta_{k+1}(\rho)|^2\}, \tag{18}$$

где i и j пробегают всевозможные значения от 1 до d такие, что $|i-j| > 1$. Заметим, что область D непуста, если выполнены условия кэллеровости (9).

Обозначим через $Z_z(\Sigma)$ сдвиг $z + Z(\Sigma)$:

$$Z_z(\Sigma) = \bigcup_{|i-j|>1} \{\zeta_i - z_i = \zeta_j - z_j = 0\}$$

соответственно. Пусть Γ_z — сдвиг $z + \Gamma_0$:

$$\Gamma_z : \begin{cases} a_{11}|\zeta_1 - z_1|^2 + \dots + a_{1d}|\zeta_d - z_d|^2 = \rho_1 \\ \vdots \\ a_{r1}|\zeta_1 - z_1|^2 + \dots + a_{rd}|\zeta_d - z_d|^2 = \rho_r. \end{cases}$$

Обозначим через область $W_{2\rho}$ область вида (4), где в правых частях неравенств стоят соответственно $2\rho_1, \dots, 2\rho_r$.

Лемма 3. *Для всякого $z \in D$ цикл Γ_z лежит в $W_{2\rho}$, причем если выполнены условия кэллеровости* (9), *то в области $W_{2\rho} \setminus Z_z(\Sigma)$ имеет место гомология $\Gamma_z \sim \Gamma_0$.*

Доказательство. Рассмотрим следующую гомотопию циклов Γ_0 и Γ_z:

$$\begin{cases} a_{11}|\zeta_1 - tz_1|^2 + \dots + a_{1d}|\zeta_d - tz_d|^2 = \rho_1 \\ \vdots \\ a_{r1}|\zeta_1 - tz_1|^2 + \dots + a_{rd}|\zeta_d - tz_d|^2 = \rho_r, \end{cases} \tag{19}$$

где $0 \le t \le 1$. Покажем, что при любом t из отрезка $[0,1]$ цикл (19) не пересекает $Z_z(\Sigma)$.

Учитывая (6), перепишем (19) в виде

$$\begin{cases} a_{11}(|\zeta_1 - tz_1|^2 - |\zeta_1|^2) + \dots + a_{1d}(|\zeta_d - tz_d|^2 - |\zeta_d|^2) = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}(|\zeta_1 - tz_1|^2 - |\zeta_1|^2) + \dots + a_{rd}(|\zeta_d - tz_d|^2 - |\zeta_d|^2) = 0. \end{cases}$$

Поскольку данная система аналогична (3), из равенства (7) получаем

$$|\zeta_i - tz_i|^2 - |\zeta_i|^2 + |\zeta_j - tz_j|^2 - |\zeta_j|^2 = c_k(|\zeta_k - tz_k|^2 - |\zeta_k|^2) + c_{k+1}(|\zeta_{k+1} - tz_{k+1}|^2 - |\zeta_{k+1}|^2). \tag{20}$$

Покажем, что цикл (19) не пересекается с плоскостью $\{\zeta_i - z_i = \zeta_j - z_j = 0\}$ из $Z_z(\Sigma)$. Подставляя ее в (20), выводим равенство

$$c_k|\zeta_k - tz_k|^2 + c_{k+1}|\zeta_{k+1} - tz_{k+1}|^2 = -(|\zeta_i|^2 + |\zeta_j|^2 - c_k|\zeta_k|^2 - c_{k+1}|\zeta_{k+1}|^2) + (1-t)^2(|z_i|^2 + |z_j|^2).$$

В силу того, что $\zeta \in D$, имеем

$$|z_i|^2 + |z_j|^2 < |\zeta_i|^2 + |\zeta_j|^2 - c_k|\zeta_k|^2 - c_{k+1}|\zeta_{k+1}|^2.$$

Подставляя в последнее равенство, находим

$$c_k|\zeta_k - tz_k|^2 + c_{k+1}|\zeta_{k+1} - tz_{k+1}|^2 < [(1-t)^2 - 1](|\zeta_i|^2 + |\zeta_j|^2 - c_k|\zeta_k|^2 - c_{k+1}|\zeta_{k+1}|^2).$$

Поскольку

$$[(1-t)^2 - 1](|\zeta_i|^2 + |\zeta_j|^2 - c_k|\zeta_k|^2 - c_{k+1}|\zeta_{k+1}|^2) \le 0$$

в силу (9) и того, что $t \in [0,1]$, получаем, что цикл (19) не пересекается с плоскостью $\{\zeta_i - z_i = \zeta_j - z_j = 0\}$ $\forall i, j : \ |i-j| > 1$. Лемма доказана.

Таким образом, доказано интегральное представление (17) для функций, голоморфных в $W_{2\rho}$. Заметим, что в качестве области, где должна быть голоморфна функция $f(z)$ из (17), достаточно взять область $W = W_\rho$, поскольку она является выпуклой областью, на границе которой лежит цикл Γ_0. Из выпуклости области W следует, что функцию, голоморфную в W и непрерывную в замыкании W, можно приблизить полиномами в замыкании W, для которых интегральное представление (17) доказано. Итак, доказано

Следствие 2. *Пусть функция $f(\zeta)$ голоморфна в области W, определяющейся неравенствами* (4), *и непрерывна в замыкании W. Тогда в пересечении $D \cap W$, где область D определяется неравенствами* (18), *справедливо интегральное представление* (17), *где цикл Γ_0 определяется равенствами* (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.

2. *Кытманов А. М.* Интеграл Бохнера — Мартинелли и его применения. Новосибирск: Наука, 1992.

3. *Шабат Б. В.* Распределение значений голоморфных отображений. М.: Наука, 1982.

4. *Audin M.* The topology of torus actions on symplectic manifolds. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1991. (Progr. Math.; 93).

5. *Cox D.* Recent developments in toric geometry. Department of Mathematics and Computer Science, Amherst College, Amherst, Massachusetts, 1998. 50 p. (Preprint).

6. *Cox D.* Toric residues. Department of Mathematics and Computer Science, Amherst College, Amherst, Massachusetts, 1997. 27 p. (Preprint).

7. *Batyrev V.* Quantum cohomology rings of toric manifold // Journées de Géométrie Algébrique d'Orsay (Juillet 1992). Paris: Soc. Math. France, 1993. P. 9–34. (Astérisque; 218).

8. *Guillemin V.* Moment maps and combinatorial invariants of hamiltonian T^n-spaces. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1994. (Progr. Math.; 122).

9. *Кытманов А. А.* Форма объема для некоторых торических многообразий // Тр. междунар. конф. «Математические модели и методы их исследования». Красноярск: ИВМ СО РАН, 2001. Т. 2. С. 52–55.

Статья поступила 19 марта 2002 г.

Кытманов Алексей Александрович
Красноярский гос. университет, кафедра математики и информатики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
aakytm@lan.krasu.ru