Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 517.958

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДВУХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Д. И. Глушкова, В. Г. Романов

Аннотация: Рассмотрена задача об определении двух коэффициентов $\sigma(x)$, $q(x)$ в гиперболическом уравнении. Коэффициент $\sigma(x)$ стоит перед первой производной по t, а коэффициент $q(x)$ — перед младшим членом. Предполагается, что эти коэффициенты малы в некоторой норме и носитель их содержится внутри круга D. Источник, инициирующий колебания, имеет вид импульсной функции $\delta(t)\,\delta(x\cdot\nu)$, локализованной на прямой $t=0$, $x\cdot\nu=0$. Здесь ν — единичный вектор, играющий роль параметра задачи. Акустическое поле, вызванное этим источником, приложенным вне D, измеряется в точках границы области D вместе с производной по нормали на некотором временном интервале фиксированной длины T, отсчитываемом с момента прихода сигнала от источника для двух различных значений параметра ν. Доказано, что при достаточно большом T задаваемая информация однозначно определяет искомые коэффициенты. Получена оценка условной устойчивости решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: обратная задача, гиперболическое уравнение, устойчивость, единственность

§ 1. Постановка задачи и основной результат

Обратные задачи для гиперболических дифференциальных уравнений активно развиваются в последние два десятилетия (см., например, монографии [1–8]). В работах М. И. Белишева [9–11] развит эффективный метод граничного управления (BC-method) для исследования вопросов единственности решения обратных динамических задач, который может быть использован также для создания вычислительных алгоритмов решения этих задач. В работах [12–15] и монографии [8] предложен новый метод получения оценок условной устойчивости решения задач определения коэффициентов гиперболического уравнения, использующий минимальную по размерности информацию о решении некоторой прямой задачи для этого уравнения. Применение этого метода для случая, когда подлежат определению несколько коэффициентов линейного гиперболического уравнения, стоящих перед производными разных порядков, вызывает определенные трудности и требует модификации техники, использовавшейся ранее. В данной работе такая модификация выполнена для задачи об определении двух коэффициентов, один из которых стоит перед первой производной, а второй — перед младшим членом. Уравнения подобного типа довольно часто возникают в приложениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00818).

© 2003 Глушкова Д. И., Романов В. Г.

Пусть функция $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^2$, является решением уравнения

$$\Box\, u + \sigma u_t + qu = 2\delta(t)\,\delta(x\cdot\nu), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3, \tag{1.1}$$

удовлетворяющим условию

$$u|_{t<0} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор, $x \cdot \nu$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2)$ и ν, $\Box$ — оператор Даламбера:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Решение задачи (1.1), (1.2) зависит от параметра ν, т. е. $u = u(x,t,\nu)$.

Предположим, что носитель коэффициентов $\sigma(x)$, $q(x)$ содержится внутри круга $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x^0| < r\}$ радиуса r с центром в точке x^0 и область D содержится в полуплоскости $x \cdot \nu > 0$. Примем также, что $\sigma(x)$, $q(x)$ являются гладкими функциями во всей плоскости $\mathbb{R}^2$, а именно $\sigma(x) \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R}^2)$, $q(x) \in \mathbf{H}^{s-2}(\mathbb{R}^2)$, где $s = 14$.

Пусть $G(\nu)$ — цилиндрическая область: $G(\nu) = \{(x,t) \mid x \in D,\ x\cdot\nu < t < T + x\cdot\nu\}$. Здесь T — некоторое положительное число. Боковую часть границы этой области обозначим через $S(\nu)$, нижнее и верхнее основания — через $\Sigma_0(\nu)$ и $\Sigma_T(\nu)$ соответственно, т. е.

$$S(\nu) := \{(x,t) \mid x \in \partial D,\ x\cdot\nu \le t \le T + x\cdot\nu\},$$
$$\Sigma_0(\nu) := \{(x,t) \mid x \in D,\ t = x\cdot\nu\},$$
$$\Sigma_T(\nu) := \{(x,t) \mid x \in D,\ t = T + x\cdot\nu\}, \quad \partial D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x^0| = r\}.$$

Рассмотрим задачу об определении коэффициентов $\sigma(x)$, $q(x)$ по следующей информации: для двух различных значений параметра $\nu = \nu^{(k)}$, $k = 1,2$, задаются следы решения задачи (1.1), (1.2) и его нормальной производной на $S(\nu^{(k)}) := S_k$, т. е.

$$u(x,t,\nu^{(k)}) = f^{(k)}(x,t), \quad \frac{\partial}{\partial n}u(x,t,\nu^{(k)}) = g^{(k)}(x,t), \quad (x,t) \in S_k,\ k = 1,2. \tag{1.3}$$

Требуется по заданным функциям $f^{(k)}$, $g^{(k)}$, $k = 1,2$, найти $\sigma(x)$ и $q(x)$.

Пусть $\Lambda(q_0)$ — множество функций (σ, q), удовлетворяющих при некотором положительном q_0 условиям

1) $\operatorname{supp}(\sigma, q) \subset D$,

2) $\|\sigma\|_{\mathbf{H}^s} \le q_0$, $\|q\|_{\mathbf{H}^{s-2}} \le q_0$, $s = 14$.

Основным содержанием настоящей работы является следующая теорема устойчивости решения обратной задачи.

Теорема 1.1. *Пусть (σ_j, q_j), $j = 1,2$, — функции, принадлежащие $\Lambda(q_0)$, и $\{f_j^{(k)}, g_j^{(k)}\}$ соответствуют решению задачи* (1.1), (1.2) *при $\sigma = \sigma_j(x)$, $q = q_j(x)$ и $\nu = \nu^{(k)}$, $k,j = 1,2$. Пусть, кроме того, выполнено условие $4r/T < 1$. Тогда найдутся положительные числа q^* и C, зависящие только от T, r и $|\nu^{(1)} - \nu^{(2)}|$, такие, что для $q_0 \le q^*$ имеет место неравенство*

$$\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbf{H}^1(D)} + \|q_1 - q_2\|_{\mathbf{L}^2(D)} \le C \sum_{k=1}^{2} \big(\|f_1^{(k)} - f_2^{(k)}\|_{\mathbf{H}^3(\partial\Sigma_0(\nu^{(k)}))}$$
$$+ \|(f_1^{(k)} - f_2^{(k)})_t\|_{\mathbf{H}^2(S_k)} + \|(g_1^{(k)} - g_2^{(k)})\|_{\mathbf{H}^1(S_k))} + \|(g_1^{(k)} - g_2^{(k)})_t\|_{\mathbf{H}^1(S_k)} \big), \tag{1.4}$$

в котором $\partial\Sigma_0(\nu^{(k)}) := \{(x,t) \mid x \in \partial D, t = x\cdot\nu^{(k)}\}$.

Из теоремы 1.1 достаточно просто вытекает следующая теорема единственности.

Теорема 1.2. *Пусть* (σ_j, q_j) *и* $\{f_j^{(k)}, g_j^{(k)}\}$ *имеют тот же смысл, что и в теореме* 1, *и условие* $4r/T < 1$ *выполнено. Тогда найдется число* q^* *такое, что для любых* $(\sigma_1, q_1) \in \Lambda(q^*)$ *и* $(\sigma_2, q_2) \in \Lambda(q^*)$ *если имеют место равенства*

$$f_1^{(k)}(x,t) = f_2^{(k)}(x,t), \quad (x,t) \in S_k, \quad k = 1, 2, \tag{1.5}$$

или равенства

$$\begin{aligned} f_1^{(k)}(x,t) &= f_2^{(k)}(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Sigma_0(\nu^{(k)}); \\ g_1^{(k)}(x,t) &= g_2^{(k)}(x,t), \quad (x,t) \in S_k;\ k = 1, 2, \end{aligned} \tag{1.6}$$

то $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$, $q_1(x) = q_2(x)$.

Обе теоремы справедливы и для случая $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, если число s в определении множества $\Lambda(q_0)$ задать равенством $s = 3[(n-1)/2]+14$, где квадратные скобки означают целую часть числа.

§ 2. Доказательство теоремы 1.1

Рассмотрим необходимые для дальнейшего свойства решения задачи (1.1), (1.2).

Лемма 2.1. *Если* $(\sigma, q) \in \Lambda(q_0)$, *то решение задачи* (1.1), (1.2) *представимо в виде*

$$u(x,t,\nu) = \sum_{k=0}^{4} \alpha_k(x,\nu)\,\theta_k(t - |x\cdot\nu|) + \hat{u}(x,t,\nu)\,\theta_0(t - |x\cdot\nu|), \tag{2.1}$$

в котором $\theta_0(t)$ — *функция Хевисайда:* $\theta_0(t) = 1$ *для* $t \geq 0$ *и* $\theta_0(t) = 0$ *для* $t < 0$, $\theta_k(t) = t^k\theta_0(t)/(k!)$, *коэффициенты* $\alpha_k(x,\nu)$, $k = 0, 1, \ldots, 4$, *являются гладкими функциями переменной* x, *а именно* $\alpha_k(x,\nu) \in \mathbf{H}^{s-2k}(\Omega)$ *для любой компактной области* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *с гладкой границей, а функция* $\hat{u}(x,t,\nu)$ *при фиксированном* ν *принадлежит пространству* $\mathbf{H}^5(K(x^0,T_0))$, $K(x^0,T_0) := \{(x,t) \mid 0 < t < T_0 - |x - x^0|\}$, *при любом конечном* $T_0 > 0$. *Кроме того, существует положительное число* C, *зависящее только от* T, r *и* q_0 *и не возрастающее с уменьшением* q_0, *такое, что выполняется неравенство*

$$\|u - 1\|_{\mathbf{H}^5(G(\nu))} \leq Cq_0. \tag{2.2}$$

Доказательство. Подставляя представление (2.1) в уравнение (1.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых особенностях, находим дифференциальные уравнения первого порядка для коэффициентов α_k:

$$\begin{gathered} 2(\nabla\alpha_0\cdot\nu)\,\mathrm{sign}(x\cdot\nu) + \sigma\alpha_0 = 0, \\ 2(\nabla\alpha_k\cdot\nu)\,\mathrm{sign}(x\cdot\nu) + \sigma\alpha_k - \Delta\alpha_{k-1} + q\alpha_{k-1} = 0, \quad k = 1, \ldots, 4, \end{gathered} \tag{2.3}$$

которые должны быть выполнены для всех $|x\cdot\nu| > 0$, и дополнительные условия при $x\cdot\nu = 0$:

$$\alpha_0|_{x\cdot\nu=0} = 1, \quad \alpha_k|_{x\cdot\nu=0} = 0,\ k = 1, \ldots, 4. \tag{2.4}$$

Здесь и ниже используется обозначение $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$. Интегрируя соотношения (2.3), используя (2.4) и принятое выше предположение о принадлежности области D полуплоскости $x\cdot\nu > 0$, получаем явные формулы для коэффициентов α_k в виде

$$\begin{gathered}\alpha_0(x,\nu)=\exp(p(x,\nu)),\quad p(x,\nu)=-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0}\sigma(x+\nu s)\,ds,\\ \alpha_k(x,\nu)=\frac{\alpha_0(x,\nu)}{2}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\Delta\alpha_{k-1}-q\alpha_{k-1}}{\alpha_0}(x+\nu s,\nu)\,ds,\quad k=1,\dots,4.\end{gathered}\tag{2.5}$$

Свойства гладкости этих коэффициентов, приведенные в лемме, достаточно очевидны. Функция $\hat u(x,t,\nu)$ является решением задачи

$$\Box\,\hat u+\sigma\hat u_t+q\hat u=F(x,t,\nu),\quad (x,t)\in\mathbb{R}^3;\quad \hat u|_{t<0}=0,\tag{2.6}$$

где

$$F(x,t,\nu)=(\Delta\alpha_4-q\alpha_4)\,\theta_4(t-|x\cdot\nu|).$$

Очевидно, что функция $F(x,t,\nu)$ принадлежит $\mathbf{H}^4(K(x^0,T_0))$, где $K(x^0,T_0):=\{(x,t)\mid 0<t<T_0-|x-x^0|\}$, при любом конечном $T_0>0$. Из определения множества $\Lambda(q_0)$ и формул (2.5) следуют оценки вида

$$\|\alpha_0-1\|_{\mathbf{H}^s(\Omega(x^0,T_0))}\le q_0C,\quad \|\alpha_k\|_{\mathbf{H}^{s-2k}(\Omega(x^0,T_0))}\le q_0C,\quad k=1,\dots,4,$$

с некоторой постоянной C, зависящей от q_0,T_0. Здесь $\Omega(x^0,T_0):=\{x\in\mathbb{R}^2\mid |x-x^0|<T_0\}$. Множитель q_0 в этих оценках выделен, чтобы указать порядок величин, когда параметр q_0 становится малым. Из энергетических оценок следует, что функция $\hat u(x,t,\nu)\in\mathbf{H}^5(K(x^0,T_0))$ равна нулю при $t<|x\cdot\nu|$ и для нее справедлива оценка вида $\|\hat u\|_{\mathbf{H}^5(K(x^0,T_0))}\le q_0C$. При $T_0>T+2r$ область $G(\nu)$ содержится в $K(x^0,T_0)$. Так как при стремлении q_0 к нулю коэффициент α_0 равномерно стремится к единице в области $\Omega(x^0,T_0)$, в то время как α_0-1, α_k, $k=1,\dots,4$, стремятся к нулю в $\mathbf{H}^5(\Omega(x^0,T_0))$, а функция $\hat u(x,t,\nu)$ стремится к нулю в $\mathbf{H}^5(K(x^0,T_0))$, имея порядок малости $O(q_0)$, то $u(x,t,\nu)$ равномерно стремится к единице в области $G(\nu)$ с тем же порядком малости. Отсюда и вытекает оценка (2.2). $\Box$

Следствие. *Если $(\sigma,q)\in\Lambda(q_0)$, то функция $u(x,t,\nu)$ непрерывна в области $t>|x\cdot\nu|$ вместе с производными до третьего порядка вплоть до границы и при достаточно малых значениях q_0 положительна в замыкании области $G(\nu)$.*

Введем в рассмотрение функцию $v(x,t,\nu)=\ln u(x,t,\nu)$, полагая, что число q_0 достаточно мало. В дальнейшем будем рассматривать функцию $v(x,t,\nu)$ только для $(x,t)\in G(\nu)$. Нетрудно проверить, что функция $v(x,t,\nu)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered}\Box\,v+v_t^2-|\nabla v|^2+\sigma v_t+q=0,\quad (x,t)\in G(\nu);\\ v|_{\Sigma_0(\nu)}=p(x,\nu),\quad v_t|_{\Sigma_0(\nu)}=\beta(x,\nu),\end{gathered}\tag{2.7}$$

в которых

$$\beta(x,\nu)=\frac{\alpha_1(x,\nu)}{\alpha_0(x,\nu)}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0}(\Delta p+|\nabla p|^2-q)\,(x+\nu s,\nu)\,ds.\tag{2.8}$$

Рассмотрим $(\sigma_j,q_j)\in\Lambda(q_0)$ для $j=1,2$. Обозначим через u_j, v_j, p_j, β_j соответствующие им функции и введем разности

$$\tilde u=u_1-u_2,\ \tilde v=v_1-v_2,\ \tilde p=p_1-p_2,\ \tilde\beta=\beta_1-\beta_2,\ \tilde q=q_1-q_2,\ \tilde\sigma=\sigma_1-\sigma_2.$$

Тогда получим соотношения

$$\Box\,\tilde{v} + a\tilde{v}_t + b\cdot\nabla\tilde{v} + c\tilde{\sigma} + \tilde{q} = 0, \quad (x,t)\in G(\nu);$$
$$\tilde{v}|_{\Sigma_0(\nu)} = \tilde{p}(x,\nu), \quad \tilde{v}_t|_{\Sigma_0(\nu)} = \tilde{\beta}(x,\nu), \tag{2.9}$$

в которых

$$a = (v_1+v_2)_t + \sigma_1, \quad b = -\nabla(v_1+v_2), \quad c = (v_2)_t,$$
$$\tilde{\beta}(x,\nu) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} (\Delta\tilde{p} + h\cdot\nabla\tilde{p} - \tilde{q})\,(x+\nu s,\nu)\,ds, \quad h = \nabla(p_1+p_2). \tag{2.10}$$

Введем новую функцию $w(x,t,\nu) := \tilde{v}_t(x,t,\nu)$. Эта функция удовлетворяет соотношениям

$$\Box\,w + aw_t + b\cdot\nabla w + a_t w + b_t\cdot\nabla\tilde{v} + c_t\tilde{\sigma} = 0,\ (x,t)\in G(\nu); \quad w|_{\Sigma_0(\nu)} = \tilde{\beta}(x,\nu). \tag{2.11}$$

Заметим, что функция $\nabla\tilde{v}$ может быть представлена в виде

$$\nabla\tilde{v}(x,t,\nu) = \nabla\tilde{v}|_{\Sigma_0(\nu)} + \int\limits_{x\cdot\nu}^{t} \nabla w(x,\tau,\nu)\,d\tau$$
$$= \nabla\tilde{p} - \tilde{\beta}\nu + \int\limits_{x\cdot\nu}^{t} \nabla w(x,\tau,\nu)\,d\tau, \quad (x,t)\in G(\nu). \tag{2.12}$$

Так как для $\tilde{p}$ и $\tilde{\sigma}$ выполняются соотношения

$$\tilde{p}(x,\nu) = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} \tilde{\sigma}(x+\nu s)\,ds, \quad \nabla\tilde{p}\cdot\nu = -\frac{\tilde{\sigma}(x)}{2}, \tag{2.13}$$

очевидно, что $|\tilde{\sigma}(x)| \le 2|\nabla\tilde{p}(x,\nu)|$. С другой стороны, в силу леммы 2.1 и теорем вложения справедливо неравенство

$$\max(\|a\|_{\mathbf{C}^2(G(\nu))}, \|b\|_{\mathbf{C}^2(G(\nu))}, \|c\|_{\mathbf{C}^2(G(\nu))}) \le Cq_0 \tag{2.14}$$

с положительной постоянной C, зависящей от T, r, q_0 и не возрастающей с уменьшением q_0. Поэтому из соотношений (2.11)–(2.14) следует неравенство

$$\|\Box\,w\|^2_{\mathbf{L}^2(G(\nu))} \le Cq_0^2\big(\|w\|^2_{\mathbf{H}^1(G(\nu))} + \|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{H}^1(D)} + \|\tilde{\beta}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Sigma_0(\nu))}\big) \tag{2.15}$$

с некоторой новой постоянной C. Дифференцируя равенство (2.11) по x_1, x_2, t и используя (2.15) и очевидное соотношение $\|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(D)} \le 4\|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{H}^2(D)}$, нетрудно получить неравенство

$$\|\Box\,w\|^2_{\mathbf{H}^1(G(\nu))} \le Cq_0^2\big(\|w\|^2_{\mathbf{H}^2(G(\nu))} + \|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{H}^2(D)} + \|\tilde{v}\|^2_{\mathbf{H}^2(G(\nu))}\big). \tag{2.16}$$

Оценим последний член в правой части этого неравенства. Обозначим через $\nu^\perp$ единичный вектор, ортогональный ν. Применяя равенства (2.9), (2.12), находим, что в области $G(\nu)$ имеют место равенства

$$\tilde{v}(x,t,\nu) = \tilde{p} + \int\limits_{x\cdot\nu}^{t} w(x,\tau,\nu)\,d\tau,$$

$$\nabla\tilde v(x,t,\nu)\cdot\nu = \nabla\tilde p\cdot\nu - \tilde\beta + \int\limits_{x\cdot\nu}^{t}(\nabla w(x,\tau,\nu)\cdot\nu)\,d\tau,$$

$$\nabla\tilde v(x,t,\nu)\cdot\nu^{\perp} = \nabla\tilde p\cdot\nu^{\perp} + \int\limits_{x\cdot\nu}^{t}(\nabla w(x,\tau,\nu)\cdot\nu^{\perp})\,d\tau,$$

$$\nabla(\nabla\tilde v(x,t,\nu)\cdot\nu)\cdot\nu^{\perp} = \nabla(\nabla\tilde p\cdot\nu - \tilde\beta)\cdot\nu^{\perp} + \int\limits_{x\cdot\nu}^{t}\nabla(\nabla w(x,\tau,\nu)\cdot\nu)\cdot\nu^{\perp}\,d\tau, \quad (2.17)$$

$$\nabla(\nabla\tilde v(x,t,\nu)\cdot\nu^{\perp})\cdot\nu^{\perp} = \nabla(\nabla\tilde p\cdot\nu^{\perp})\cdot\nu^{\perp} + \int\limits_{x\cdot\nu}^{t}\nabla(\nabla w(x,\tau,\nu)\cdot\nu^{\perp})\cdot\nu^{\perp}\,d\tau,$$

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla\tilde v(x,t,\nu)\cdot\nu)\cdot\nu &= \Delta\tilde v(x,t,\nu) - \nabla(\nabla\tilde v(x,t,\nu)\cdot\nu^{\perp})\cdot\nu^{\perp}\\ &= w_t + aw + b\cdot\nabla\tilde v + c\,\tilde\sigma + \tilde q - \nabla(\nabla\tilde v(x,t,\nu)\cdot\nu^{\perp})\cdot\nu^{\perp},\end{aligned}$$

из которых следует существование положительной постоянной C такой, что

$$\|\tilde v\|^2_{\mathbf{H}^2(G(\nu))} \le C\big(\|w\|^2_{\mathbf{H}^2(G(\nu))} + \|\tilde p\|^2_{\mathbf{H}^2(D)} + \|\tilde q\|^2_{\mathbf{L}^2(D)} + \|\tilde\beta\|^2_{\mathbf{H}^1(\Sigma_0(\nu))}\big). \quad (2.18)$$

С учетом этого неравенства соотношение (2.16) может быть записано в виде

$$\|\Box\, w\|^2_{\mathbf{H}^1(G(\nu))} \le Cq_0^2\big(\|w\|^2_{\mathbf{H}^2(G(\nu))} + \|\tilde p\|^2_{\mathbf{H}^2(D)} + \|\tilde q\|^2_{\mathbf{L}^2(D)} + \|\tilde\beta\|^2_{\mathbf{H}^1(\Sigma_0(\nu))}\big). \quad (2.19)$$

Воспользуемся следующим следствием леммы 4.1.4 из книги [8] (см. также статью [13]).

Лемма 2.2. *Пусть $\chi := 4r/T < 1$ и $z(x,t) \in \mathbf{H}^2(G(\nu))$. Тогда существует такая положительная постоянная C, зависящая только от r и T, что имеет место неравенство*

$$\begin{aligned}\int\limits_{G(\nu)}\big(z_t^2 + |\nabla z|^2 + z^2\big)\,dxdt + \int\limits_{\Sigma_0(\nu)\cup\Sigma_T(\nu)}\big((z_t + \nabla z\cdot\nu)^2 + |\nabla' z|^2 + z^2\big)\,dx\\ \le C\Big[\int\limits_{G(\nu)}(\Box z)^2\,dxdt + \int\limits_{S(\nu)}\big(z_t^2 + |\nabla z|^2 + z^2\big)\,dSdt\Big], \quad (2.20)\end{aligned}$$

в котором $\nabla' z := \nabla z - (\nabla z\cdot\nu)\nu$, dS — элемент площади.

Применяя эту лемму к функции w, получаем неравенство

$$\|w\|^2_{\mathbf{H}^1(G(\nu))} + \|\tilde\beta\|^2_{\mathbf{H}^1(D)} \le C\big(\|\Box w\|^2_{\mathbf{L}^2(G(\nu))} + \|w\|^2_{\mathbf{H}^1(S(\nu))} + \|\nabla w\cdot n\|^2_{\mathbf{L}^2(S(\nu))}\big), \quad (2.21)$$

в котором n — единичный вектор внешней нормали к $S(\nu)$. Воспользуемся неравенством (2.15), чтобы исключить из правой части $\|\Box w\|$. В результате получим неравенство вида

$$\begin{aligned}\|w\|^2_{\mathbf{H}^1(G(\nu))} + \|\tilde\beta\|^2_{\mathbf{H}^1(D)} &\le Cq_0^2\big(\|w\|^2_{\mathbf{H}^1(G(\nu))} + \|\tilde\beta\|^2_{\mathbf{L}^2(D)} + \|\tilde p\|^2_{\mathbf{H}^1(D)}\big)\\ &\quad + C\big(\|w\|^2_{\mathbf{H}^1(S(\nu))} + \|\nabla w\cdot n\|^2_{\mathbf{L}^2(S(\nu))}\big), \quad (2.22)\end{aligned}$$

из которого при достаточно малых значениях параметра q_0 вытекает оценка

$$\|\tilde\beta\|^2_{\mathbf{H}^1(D)} \le C_1 q_0^2\|\tilde p\|^2_{\mathbf{H}^1(D)} + C_1\big(\|w\|^2_{\mathbf{H}^1(S(\nu))} + \|\nabla w\cdot n\|^2_{\mathbf{L}^2(S(\nu))}\big) \quad (2.23)$$

с некоторой постоянной C_1, зависящей от r, T и q_0.

Применяя лемму 2.2 последовательно к функциям w_{x_1}, w_{x_2}, w_t, w и складывая отвечающие им неравенства (2.20), получим после несложных преобразований неравенство вида

$$\|w\|^2_{\mathbf{H}^2(G(\nu))}+\|\tilde{\beta}\|^2_{\mathbf{H}^2(D)} \le C\big(\|\Box w\|^2_{\mathbf{H}^1(G(\nu))}+\|w\|^2_{\mathbf{H}^2(S(\nu))}+\|\nabla w\cdot n\|^2_{\mathbf{H}^1(S(\nu))}\big). \quad (2.24)$$

Затем, исключая из него $\|\Box w\|^2_{\mathbf{H}^1(G(\nu))}$ с помощью (2.19), найдем, что

$$\|w\|^2_{\mathbf{H}^2(G(\nu))} + \|\tilde{\beta}\|^2_{\mathbf{H}^2(D)} \le Cq_0^2\big(\|w\|^2_{\mathbf{H}^2(G(\nu))} + \|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{H}^2(D)} + \|\tilde{q}\|^2_{\mathbf{L}^2(D)} + \|\tilde{\beta}\|^2_{\mathbf{H}^1(D)}\big)$$
$$+ C\big(\|w\|^2_{\mathbf{H}^2(S(\nu))} + \|\nabla w\cdot n\|^2_{\mathbf{H}^1(S(\nu))}\big). \quad (2.25)$$

Отсюда при достаточно малых значениях параметра q_0 вытекает оценка

$$\|\tilde{\beta}\|^2_{\mathbf{H}^2(D)} \le C_2q_0^2\big(\|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{H}^2(D)}+\|\tilde{q}\|^2_{\mathbf{L}^2(D)}\big)+C_2\big(\|w\|^2_{\mathbf{H}^2(S(\nu))}+\|\nabla w\cdot n\|^2_{\mathbf{H}^1(S(\nu))}\big) \quad (2.26)$$

с постоянной C_2, зависящей от r, T, q_0.

Рассмотрим теперь неравенства (2.26) и соотношения (2.10) для $\nu = \nu^{(k)}$, $k = 1, 2$. Обозначим $\tilde{v}(x,t,\nu^{(k)}) := \tilde{v}_k(x,t)$, $w(x,t,\nu^{(k)}) := w_k(x,t)$, $\tilde{\beta}(x,\nu^{(k)}) := \tilde{\beta}_k(x)$, $\tilde{p}(x,\nu^{(k)}) := \tilde{p}_k(x)$, $h(x,\nu^{(k)}) = h_k(x)$. Неравенство (2.26) приводит к соотношениям

$$\|\tilde{\beta}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(D)} \le C_2q_0^2\big(\|\tilde{p}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(D)} + \|\tilde{q}\|^2_{\mathbf{L}^2(D)}\big) + C_2\big(\|w_k\|^2_{\mathbf{H}^2(S_k)} + \|\nabla w_k\cdot n\|^2_{\mathbf{H}^1(S_k)}\big), \quad (2.27)$$

справедливым для $k = 1, 2$.

Из (2.10) следует, что

$$\Delta\tilde{p}_k(x) + h_k(x)\cdot\nabla\tilde{p}_k(x) - \tilde{q}(x) = 2\nabla\tilde{\beta}_k(x)\cdot\nu^{(k)}, \quad k = 1, 2. \quad (2.28)$$

Отсюда, во-первых, находим, что выполняются неравенства

$$\|\tilde{q}\|^2_{\mathbf{L}^2(D)} \le C\big(\|\tilde{p}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(D)} + \|\tilde{\beta}_k\|^2_{\mathbf{H}^1(D)}\big), \quad k = 1, 2, \quad (2.29)$$

при некоторой постоянной $C = C(r, T, q_0)$. Сопоставляя их с неравенствами (2.27), выводим, что для достаточно малых значений q_0 справедливы оценки

$$\|\tilde{\beta}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(D)}+\|\tilde{q}\|^2_{\mathbf{L}^2(D)} \le C_3\big(q_0^2\|\tilde{p}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(D)}+\|w_k\|^2_{\mathbf{H}^2(S_k)}+\|\nabla w_k\cdot n\|^2_{\mathbf{H}^1(S_k)}\big), \quad k = 1, 2, \quad (2.30)$$

с некоторой постоянной $C_3 = C_3(r, T, q_0)$.

Во-вторых, вычитая из равенства (2.28), отвечающего $k = 1$, аналогичное равенство при $k = 2$, получим новое равенство

$$\Delta\hat{p}(x) = h_2(x)\cdot\nabla\tilde{p}_2(x) - h_1(x)\cdot\nabla\tilde{p}_1(x) + 2(\nabla\tilde{\beta}_1(x)\cdot\nu^{(1)} - \nabla\tilde{\beta}_2(x)\cdot\nu^{(2)}), \quad (2.31)$$

в котором $\hat{p}(x) = \tilde{p}_1(x) - \tilde{p}_2(x)$. Отсюда получаем неравенство

$$\|\Delta\hat{p}\|^2_{\mathbf{H}^1(D)} \le C\sum_{k=1}^{2}\big(q_0^2\|\tilde{p}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(D)} + \|\tilde{\beta}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(D)}\big), \quad (2.32)$$

в котором постоянная C зависит от r, T, q_0.

Оценим теперь $\|\hat{p}\|^2_{\mathbf{H}^3(D)}$ через $\mathbf{H}^1(D)$-норму оператора Лапласа от $\hat{p}$. Воспользуемся для этого приемом из книги [16]. Для функции $\hat{p}(x)$ справедливо равенство

$$(\Delta\hat{p})^2 = \sum_{i,j=1}^{2}\hat{p}_{x_ix_i}\hat{p}_{x_jx_j} = \sum_{i,j=1}^{2}\big[(\hat{p}_{x_i}\hat{p}_{x_jx_j})_{x_i} - (\hat{p}_{x_i}\hat{p}_{x_ix_j})_{x_j} + \hat{p}^2_{x_ix_j}\big], \quad (2.33)$$

из которого интегрированием по области D следует равенство

$$\int_D \sum_{i,j=1}^{2} \hat{p}^2_{x_i x_j}\,dx = \int_D (\Delta\hat{p})^2\,dx - \int_{\partial D} \big[(\Delta\hat{p})(\nabla\hat{p}\cdot n) - (\nabla|\nabla\hat{p}|^2\cdot n)/2\big]\,dS. \tag{2.34}$$

Из полученного равенства вытекает оценка

$$\|\hat{p}\|^2_{\mathbf{H}^2(D)} \le C\big(\|\Delta\hat{p}\|^2_{\mathbf{L}^2(D)} + \|\hat{p}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial D)} + \|\hat{p}_x\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial D)} + \|\hat{p}_{xx}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial D)}\big), \tag{2.35}$$

в которой

$$\|\hat{p}_x\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial D)} := \sum_{i=1}^{2}\|\hat{p}_{x_i}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial D)}, \quad \|\hat{p}_{xx}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial D)} := \sum_{i,j=1}^{2}\|\hat{p}_{x_i x_j}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial D)}.$$

Неравенства, аналогичные предыдущему, справедливы и для первых производных функции $\hat{p}(x)$. Поэтому

$$\|\hat{p}\|^2_{\mathbf{H}^3(D)} \le C\big(\|\Delta\hat{p}\|^2_{\mathbf{H}^1(D)} + \|\hat{p}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial D)} + \|\hat{p}_x\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial D)} + \|\hat{p}_{xx}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial D)} + \|\hat{p}_{xxx}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial D)}\big). \tag{2.36}$$

Оценим значения функции $\hat{p}$ и ее производных на ∂D. Напомним, что $\hat{p} = \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2$ и $\tilde{p}_k|_{\partial D} = \tilde{v}_k(x, x\cdot\nu^{(k)})$, $k = 1,2$. Вне области D функция $\tilde{p}_k(x)$ удовлетворяет равенству $\nabla\tilde{p}_k\cdot\nu^{(k)} = 0$ (так как $\sigma_j(x) = 0$, $j = 1,2$, вне D), тем самым значения ее производных на ∂D выражаются через значения касательных производных на ∂D. Таким образом,

$$\|\hat{p}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial D)} + \|\hat{p}_x\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial D)} + \|\hat{p}_{xx}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial D)} + \|\hat{p}_{xxx}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial D)} \le C\sum_{k=1}^{2}\|\tilde{p}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial D)}. \tag{2.37}$$

Из соотношений (2.32), (2.36), (2.37) следует, что

$$\|\hat{p}\|^2_{\mathbf{H}^3(D)} \le C\sum_{k=1}^{2}\big(q_0^2\|\tilde{p}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(D)} + \|\tilde{\beta}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(D)} + \|\tilde{p}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial D)}\big). \tag{2.38}$$

С учетом (2.30) последнее неравенство можно переписать в виде

$$\|\hat{p}\|^2_{\mathbf{H}^3(D)} \le C\sum_{k=1}^{2}\big(q_0^2\|\tilde{p}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(D)} + \|\tilde{p}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial D)} + \|w_k\|^2_{\mathbf{H}^2(S_k)} + \|\nabla w_k\cdot n\|^2_{\mathbf{H}^1(S_k)}\big). \tag{2.39}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\gamma(x) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\tilde{\sigma}(x + \nu^{(1)}s_1 + \nu^{(2)}s_2)\,ds_1 ds_2. \tag{2.40}$$

Очевидны следующие равенства, связывающие новую функцию с функциями $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$ и $\hat{p}$:

$$\nabla\gamma(x)\cdot\nu^{(1)} = \tilde{p}_2(x), \quad \nabla\gamma(x)\cdot\nu^{(2)} = \tilde{p}_1(x), \quad \nabla\gamma(x)\cdot(\nu^{(2)} - \nu^{(1)}) = \hat{p}(x). \tag{2.41}$$

Из последнего равенства находим соотношение

$$\gamma(x) = \frac{1}{|\nu^{(1)} - \nu^{(2)}|}\int_{-\infty}^{0}\hat{p}(x + \nu^* s)\,ds, \tag{2.42}$$

в котором $\nu^* := (\nu^{(2)} - \nu^{(1)})/|\nu^{(2)} - \nu^{(1)}|$. Отсюда следует оценка

$$\|\gamma\|_{\mathbf{H}^3(D)} \le C\|\hat{p}\,\|_{\mathbf{H}^3(D)}, \tag{2.43}$$

в которой постоянная C зависит от r и $|\nu^{(1)} - \nu^{(2)}|$. Значит,

$$\|\tilde{p}_k\|_{\mathbf{H}^2(D)} \le C\|\hat{p}\,\|_{\mathbf{H}^3(D)}, \quad k = 1, 2. \tag{2.44}$$

Из соотношений (2.39), (2.44) получаем, что при достаточно малых значениях параметра q_0 справедливо неравенство

$$\|\hat{p}\,\|^2_{\mathbf{H}^3(D)} \le C\sum_{k=1}^{2}\big(\|\tilde{p}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial D)} + \|w_k\|^2_{\mathbf{H}^2(S_k)} + \|\nabla w_k \cdot n\|^2_{\mathbf{H}^1(S_k)}\big). \tag{2.45}$$

Из равенства (2.40) имеем

$$\tilde{\sigma}(x) = -2\nabla(\nabla\gamma(x)\cdot\nu^{(1)})\cdot\nu^{(2)}. \tag{2.46}$$

Поэтому из неравенств (2.43), (2.45) вытекает оценка

$$\|\hat{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(D)} \le C\sum_{k=1}^{2}\big(\|\tilde{p}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial D)} + \|\widetilde{w}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(S_k)} + \|\nabla\widetilde{w}_k \cdot n\|^2_{\mathbf{H}^1(S_k)}\big). \tag{2.47}$$

Из соотношений (2.30), (2.44) находим, что

$$\|\hat{q}\|^2_{\mathbf{L}^2(D)} \le C\sum_{k=1}^{2}\big(\|\tilde{p}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial D)} + \|\widetilde{w}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(S_k)} + \|\nabla\widetilde{w}_k \cdot n\|^2_{\mathbf{H}^1(S_k)}\big). \tag{2.48}$$

Для завершения доказательства заметим, что $\tilde{p}(x,\nu) = \tilde{v}(x, x\cdot\nu, \nu)$ и, кроме того, имеют место равенства

$$\tilde{v}(x,t,\nu) = \ln u_1(x,t,\nu) - \ln u_2(x,t,\nu) = \int\limits_{u_2(x,t,\nu)}^{u_1(x,t,\nu)} \frac{ds}{s} = \tilde{u}(x,t,\nu)\,R(x,t,\nu), \tag{2.49}$$

в которых функция $R(x,t,\nu)$ определена формулой

$$R(x,t,\nu) = \int\limits_0^1 \frac{ds'}{u_1(x,t,\nu)s' + (1-s')u_2(x,t,\nu)}.$$

В силу леммы 2.1 функция $R(x,t,\nu)$ является при достаточно малых q_0 непрерывной и ограниченной функцией переменных x, t вместе с производными до третьего порядка, поэтому справедливы оценки

$$\begin{gathered}
\|\widetilde{w}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(S_k)} \le C\big(\|\tilde{f}^{(k)}_t\|^2_{\mathbf{H}^2(S_k)} + \|\tilde{f}^{(k)}\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Sigma_0(\nu^{(k)}))}\big),\\
\|\nabla\widetilde{w}_k \cdot n\|^2_{\mathbf{H}^1(S_k)} \le C\big(\|\tilde{g}^{(k)}\|^2_{\mathbf{H}^1(S_k)} + \|\tilde{g}^{(k)}_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S_k)}\big),\\
\|\tilde{p}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial D)} \le C\|\tilde{f}^{(k)}\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial\Sigma_0(\nu^{(k)}))}, \quad k = 1, 2,
\end{gathered} \tag{2.50}$$

где $\tilde{f}^{(k)} := f_1^{(k)} - f_2^{(k)}$, $\tilde{g}^{(k)} := g_1^{(k)} - g_2^{(k)}$. Из неравенств (2.47), (2.48), (2.50) следует выполнение соотношений (1.4) теоремы 1.1. $\square$

§ 3. Доказательство теоремы 2.1

Докажем вначале следующую лемму.

Лемма 3.1. *Пусть* $(\sigma_j, q_j) \in \Lambda(q_0)$ *и* $u_j(x,t,\nu)$ *— соответствующее решение задачи* (1.1), (1.2) *для* $j = 1, 2$. *Тогда*

1) *если* $u_1(x,t,\nu) = u_2(x,t,\nu)$ *на* $S(\nu)$, *то* $(\nabla u_1 \cdot n)(x,t,\nu) = (\nabla u_2 \cdot n)(x,t,\nu)$ *на* $S(\nu)$,

2) *если* $u_1(x,t,\nu) = u_2(x,t,\nu)$ *на* $\partial\Sigma_0(\nu)$ *и* $(\nabla u_1 \cdot n)(x,t,\nu) = (\nabla u_2 \cdot n)(x,t,\nu)$ *на* $S(\nu)$, *то* $u_1(x,t,\nu) = u_2(x,t,\nu)$ *на* $S(\nu)$.

Доказательство. Обозначим $\tilde u = u_1 - u_2$. Покажем, что при выполнении условий леммы коэффициент $\tilde\alpha_0(x,\nu)$ в разложении (2.1) функции $\tilde u$ равен нулю вне области D. Действительно, имеют место равенства $\tilde\alpha_0|_{x\cdot\nu=0} = 0$ (см. соотношение (2.4) для $\tilde\alpha_0$) и $\tilde\alpha_0(x,\nu) = \tilde u(x, |x\cdot\nu| + 0, \nu)$. Кроме того, вне области D выполнено дифференциальное уравнение первого порядка $\nabla\tilde\alpha_0 \cdot \nu = 0$. При выполнении условий леммы имеем $\tilde\alpha_0(x,\nu) = 0$ для $x \in \partial D$. Отсюда с учетом предыдущих соотношений на $\tilde\alpha_0$ следует, что $\tilde\alpha_0(x,\nu) = 0$ для всех x, не принадлежащих D.

Не ограничивая общности, положим $\nu = (1,0)$ и рассмотрим область $P(l) := P_1(l) \cup P_2(l) \cup P_3(l)$, составленную из прямоугольного куска клиновидной области и двух полуконусов. Здесь области $P_k(l)$, $k = 1,2,3$, определены равенствами

$$P_1(l) = \big\{(x,t) \mid 0 < t < T + l - |x_1 - l|, x_2^0 - r < x_2 < x_2^0 + r\big\},$$
$$P_2(l) = \big\{(x,t) \mid 0 < t < T + l - |x - x^{(1)}|, x_2 < x_2^0 - r\big\},$$
$$P_3(l) = \big\{(x,t) \mid 0 < t < T + l - |x - x^{(2)}|, x_2 > x_2^0 + r\big\},$$

в которых $x^{(1)} = \big(l, x_2^0 - r\big)$, $x^{(2)} = \big(l, x_2^0 + r\big)$. При $l > x_1^0 + r$ область $P(l)$ содержит в себе область $G(\nu)$, причем $\Sigma_T(\nu)$ принадлежит части границы области $P(l)$. Для дальнейшего примем, что условие $l > x_1^0 + r$ выполнено. Граница области $P(l)$ состоит из характеристической поверхности и куска плоскости $t = 0$. Обозначим через $G'(\nu)$ цилиндрическую область $G' := \{(x,t) \mid x \in D,\ 0 < t < T + x\cdot\nu\}$, через $P'(l)$ — множество $P(l) \setminus G'$ и через S' — часть его границы, общую с G', а именно $S' := \{(x,t) \mid x \in \partial D,\ 0 < t < T + x\cdot\nu\}$. Из полученного выше равенства $\tilde\alpha_0(x,\nu) = 0$ для всех x, не принадлежащих D, следует, что $\tilde u(x,t,\nu) = 0$ для точек множества $P'(l)$, принадлежащих характеристическому клину $t = |x\cdot\nu| + 0$. Так как $\tilde u|_{t<|x\cdot\nu|} = 0$, то функция $\tilde u(x,t,\nu)$ непрерывна в $P'(l)$ на множестве $t = |x\cdot\nu|$ и поэтому в силу леммы 2.1 принадлежит $\mathbf{H}^1(P'(l))$. Кроме того, функция $\tilde u(x,t,\nu)$ удовлетворяет условиям

$$\Box\,\tilde u = 0,\ (x,t) \in P'(l); \quad \tilde u|_{t=0} = \tilde u_t|_{t=0} = 0. \tag{3.1}$$

Покажем, что при выполнении условий леммы будет $\tilde u(x,t,\nu) = 0$ для всех $(x,t) \in P'(l)$. Возьмем произвольное $\tau \in (0, T+l)$. Обозначим через $P'_\tau(l)$ часть области $P'(l)$, заключенную в слое $\{(x,t) \mid 0 < t < \tau\}$, и через $C_\tau(l)$ — сечение области $P'(l)$ плоскостью $t = \tau$. Интегрируя по области $P'_\tau(l)$ тождество

$$0 = 2\tilde u_t \Box\,\tilde u \equiv \frac{\partial}{\partial t}(|\tilde u_t|^2 + |\nabla\tilde u|^2) - \operatorname{div}(2\tilde u_t \nabla\tilde u), \quad (x,t) \in P'(l), \tag{3.2}$$

и используя неотрицательность квадратичной формы из первых производных на характеристической поверхности и нулевые данные Коши при $t = 0$, находим, что

$$\int\limits_{C_\tau(l)} (|\tilde u_t|^2 + |\nabla\tilde u|^2)\,dx - \int\limits_{S'_\tau} 2\tilde u_t(\nabla\tilde u \cdot n)\,dS\,dt = 0. \tag{3.3}$$

Здесь S'_τ — часть поверхности S', заключенная внутри слоя $\{(x,t) \mid 0 < t < \tau\}$. Так как в силу условия леммы либо $\tilde{u}$, либо $\nabla\tilde{u} \cdot n$ обращаются в нуль на S', из предыдущего равенства получаем, что $\tilde{u}_t = 0$, $\nabla\tilde{u} = 0$ для $(x,t) \in C_\tau(l)$ и, следовательно, $\tilde{u}_t = 0$, $\nabla\tilde{u} = 0$ для всех $(x,t) \in P'(l)$ в силу произвольности $\tau \in (0, T+l)$. Отсюда следует, что $\tilde{u} = 0$ для $(x,t) \in P'(l)$, и утверждение леммы становится очевидным. $\square$

Из доказанной леммы и теоремы 1.1 вытекает справедливость теоремы 1.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аниконов Ю. Е.* Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1978.

2. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.

3. *Бухгейм А. Л.* Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983.

4. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.

5. *Романов В. Г., Кабанихин С. И.* Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991.

6. *Рамм А. Г.* Многомерные обратные задачи рассеяния. М.: Мир, 1994.

7. *Белишев М. И., Благовещенский А. С.* Динамические обратные задачи теории волн. СПб: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1999.

8. *Romanov V. G.* Investigation methods for inverse problems. Utrecht: VSP, 2002.

9. *Белишев М. И.* Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 524–527.

10. *Белишев М. И.* Уравнения типа Гельфанда — Левитана в многомерной обратной задаче для волнового уравнения // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1987. Т. 165, № 17. С. 15–28.

11. *Белишев М. И.* Волновые базисы в многомерных обратных задачах // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 5. С. 584–682.

12. *Романов В. Г.* Об оценке устойчивости решения обратной задачи для гиперболического уравнения // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 436–449.

13. *Romanov V. G., Yamamoto M.* Multidimensional inverse hyperbolic problem with impulse input and single boundary measurement // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1999. V. 7, N 6. P. 573–588.

14. *Романов В. Г.* Вопросы корректности задачи определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 125–134.

15. *Глушкова Д. И.* Об оценке устойчивости решения обратной задачи определения коэффициента поглощения // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 9. С. 1203–1211.

16. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 23 декабря 2002 г.

Глушкова Дарья Игоревна
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
glushkova_d@ngs.ru

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru