Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 512.542

КВАЗИРАСПОЗНАВАЕМОСТЬ ОДНОГО КЛАССА КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ПО МНОЖЕСТВУ ПОРЯДКОВ ЭЛЕМЕНТОВ

О. А. Алексеева, А. С. Кондратьев

Аннотация: Доказано, что конечная группа с множеством порядков элементов, как у конечной группы L, граф простых чисел которой имеет по крайней мере три компоненты связности, обладает (единственным) неабелевым композиционным фактором, изоморфным L, за исключением случая, когда L изоморфна знакопеременной группе степени 6.

Ключевые слова: конечная группа, множество порядков элементов, квазираспознаваемость, граф простых чисел

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ множество всех порядков элементов группы G. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $GK(G)$ группы G, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq. Обозначим число компонент связности графа $GK(G)$ через $t(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq t(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. Множество $\omega(G)$ частично упорядочено относительно делимости и однозначно определяется подмножеством $\mu(G)$ своих максимальных элементов. Обозначим через $\mu_i(G)$ множество всех тех чисел $n \in \mu(G)$, все простые делители которых принадлежат $\pi_i(G)$.

Грюнберг и Кегель доказали следующую структурную теорему для конечных групп с несвязным графом простых чисел.

Теорема Грюнберга — Кегеля [1, теорема A]. *Если G — конечная группа с несвязным графом $GK(G)$, то верно одно из следующих утверждений:*

(а) *G — группа Фробениуса;*

(б) *$G = ABC$, где A и AB — нормальные подгруппы группы G, AB и BC — группы Фробениуса с ядрами A и B и дополнениями B и C соответственно;*

(в) *G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$-группы посредством группы A, где $\mathrm{Inn}(P) \leq A \leq \mathrm{Aut}(P)$, P — простая неабелева группа с $t(G) \leq t(P)$ и A/P — $\pi_1(G)$-группа.*

Простые неабелевы группы с несвязным графом простых чисел описаны в [1, 2].

Результаты о конечных группах с несвязным графом Грюнберга — Кегеля нашли большое применение в исследованиях распознаваемости конечных групп по множеству порядков элементов (см., например, обзор [3]). Конечная группа G называется *распознаваемой* (по множеству порядков элементов), если для любой конечной группы H с $\omega(H) = \omega(G)$ имеем $H \cong G$.

В. Д. Мазуров выдвинул следующую гипотезу.

© 2003 Алексеева О. А., Кондратьев А. С.

Гипотеза В. Д. Мазурова. *Конечные простые группы с несвязным графом Грюнберга — Кегеля, как правило, распознаваемы.*

Первым этапом доказательства этой гипотезы, по-видимому, будет доказательство условия квазираспознаваемости, более слабого, чем распознаваемость. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой*, если любая конечная группа G с $\omega(G) = \omega(P)$ имеет композиционный фактор, изоморфный P.

В данной работе доказывается следующая

Теорема. *Конечные простые группы, граф Грюнберга — Кегеля которых имеет по крайней мере три компоненты связности, квазираспознаваемы, за исключением группы A_6.*

Группа A_6 не квазираспознаваема, так как она имеет то же множество порядков элементов, что и расщепляемое расширение элементарной абелевой группы E порядка 16 посредством группы A_5, действующей транзитивно на $E \setminus \{1\}$. Существование такого расширения хорошо известно, в качестве него можно взять полупрямое произведение группы E на группу A_5, где A_5 индуцирует на E естественный 2-мерный $GF(4)SL_2(4)$-модуль.

Квазираспознаваемость конечных простых групп, граф Грюнберга — Кегеля которых имеет по крайней мере четыре компоненты связности, доказана авторами в [4] и анонсирована в [5].

В качестве следствия теоремы получается положительный ответ на вопрос 12.39 из «Коуровской тетради» [6] для конечных простых групп, граф Грюнберга — Кегеля которых имеет по крайней мере три компоненты связности.

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [7–9]. Если n — натуральное число и p — простое число, то $\pi(n)$ обозначает множество всех простых делителей числа n. Для конечной группы G положим $\pi(G) = \pi(|G|)$.

В доказательстве теоремы используются четыре предварительных леммы.

Лемма 1 [4, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Тогда в случаях* (а) *и* (б) *теоремы Грюнберга — Кегеля граф $GK(G)$ имеет точно две компоненты связности.*

Лемма 2 [10, лемма 4]. *Пусть P — конечная простая группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Тогда*

(а) *$|\mu_i(P)| = 1$ для $i > 1$, пусть $n_i = n_i(P)$ обозначает единственный элемент из $\mu_i(P)$ для $i > 1$;*

(б) *для каждого $i > 1$ группа P содержит изолированную абелеву холлову $\pi(n_i)$-подгруппу X_i, причем эта подгруппа циклическая порядка n_i, за исключением следующих случаев:*

(1) *$P \cong L_3(4)$, $n_i(P) = 3$, и подгруппа X_i элементарная абелева порядка 9;*

(2) *$P \cong L_2(q)$, где q — непростая степень нечетного простого числа p, $n_i(P) = p$, и подгруппа X_i элементарная абелева порядка q;*

(в) *если $t(P) > 2$, то P, $\pi_1(P)$, n_i для $2 \leq i \leq t(P)$ такие, как в приведенных ниже табл. 1, 2.*

Лемма 3. *Пусть G — конечная группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля, для которой выполняется случай* (в) *теоремы Грюнберга — Кегеля, и*

Таблица 1. Конечные простые группы G с $t(G) = 3$

G	Ограничения на G	$\pi_1(G)$	n_2	n_3
A_n	$n > 6$, $n = p, p-2$ просты	$\pi((n-3)!)$	p	$p-2$
$A_1(q)$	$3 \leq q \equiv \epsilon(4)$, $\epsilon = \pm 1$	$\pi(q-\epsilon)$	$\pi(q)$	$(q+\epsilon)/2$
$A_1(q)$	$q > 2$, q четно	$\{2\}$	$q-1$	$q+1$
${}^2A_5(2)$		$\{2,3,5\}$	7	11
${}^2D_p(3)$	$p = 2^m + 1 \geq 5$ просто	$\pi(3(3^{p-1}-1)\times \prod_{i=1}^{p-2}(3^{2i}-1))$	$(3^{p-1}+1)/2$	$(3^p+1)/4$
$G_2(q)$	$q \equiv 0(3)$	$\pi(q(q^2-1))$	q^2-q+1	q^2+q+1
${}^2G_2(q)$	$q = 3^{2m+1} > 3$	$\pi(q(q^2-1))$	$q-\sqrt{3q}+1$	$q+\sqrt{3q}+1$
$F_4(q)$	q четно	$\pi(q(q^4-1)(q^6-1))$	q^4-q^2+1	q^4+1
${}^2F_4(q)$	$q = 2^{2m+1} > 2$	$\pi(q(q^3+1)(q^4-1))$	$q^2-\sqrt{2q^3}+q-\sqrt{2q}+1$	$q^2+\sqrt{2q^3}+q+\sqrt{2q}+1$
$E_7(2)$		$\{2,3,5,7,11,13,17,19,31,43\}$	73	127
$E_7(3)$		$\{2,3,5,7,11,13,19,37,41,61,73,547\}$	757	1093
M_{11}		$\{2,3\}$	5	11
M_{23}		$\{2,3,5,7\}$	11	23
M_{24}		$\{2,3,5,7\}$	11	23
J_3		$\{2,3,5\}$	17	19
HiS		$\{2,3,5\}$	7	11
Suz		$\{2,3,5,7\}$	11	13
Co_2		$\{2,3,5,7\}$	11	23
Fi_{23}		$\{2,3,5,7,11,13\}$	17	23
F_3		$\{2,3,5,7,13\}$	19	31
F_2		$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}$	31	47

Таблица 2. Конечные простые группы G с $t(G) > 3$

$t(G)$	G	Ограничения на G	$\pi_1(G)$	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
4	$A_2(4)$		$\{2\}$	3	5	7		
	${}^2B_2(q)$	$q{=}2^{2m+1} > 2$	$\{2\}$	$q{-}1$	$q{-}\sqrt{2q}+1$	$q{+}\sqrt{2q}+1$		
	${}^2E_6(2)$		$\{2,3,5,7,11\}$	13	17	19		
	$E_8(q)$	$q{\equiv}2,3(5)$	$\pi(q(q^8{-}1)(q^{12}{-}1)(q^{14}{-}1)(q^{18}{-}1)(q^{20}{-}1))$	$\frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1}$	$q^8{-}q^4{+}1$	$\frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}$		
	M_{22}		$\{2,3\}$	5	7	11		
	J_1		$\{2,3,5\}$	7	11	19		
	$O'N$		$\{2,3,5,7\}$	11	19	31		
	LyS		$\{2,3,5,7,11\}$	31	37	67		
	Fi'_{24}		$\{2,3,5,7,11,13\}$	17	23	29		
	F_1		$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,47\}$	41	59	71		
5	$E_8(q)$	$q{\equiv}0,1,4(5)$	$\pi(q(q^8{-}1)(q^{10}{-}1)(q^{12}{-}1)(q^{14}{-}1)(q^{18}{-}1))$	$\frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1}$	$\frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}$	$q^8{-}q^4{+}1$	$\frac{q^{10}+1}{q^2+1}$	
6	J_4		$\{2,3,5,7,11\}$	23	29	31	37	43

P — неабелев композиционный фактор в G. Тогда для каждого $i \in \{2, \dots, t(G)\}$ существует $j \in \{2, \dots, t(P)\}$ такое, что $\mu_i(G) = \{n_j(P)\}$.

Доказательство очевидно.

Лемма 4 [11, лемма 2.2]. *Пусть p, q — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел a, b. Тогда $(p^a, q^b) = (3^2, 2^2), (p, 2^b), (2^a, q)$.*

Доказательство теоремы. Пусть G — конечная группа с $\omega(G) = \omega(L)$, где L — конечная простая группа с $t(L) \geq 3$. Ввиду леммы 1 для G выполняется случай (в) теоремы Грюнберга — Кегеля. Пусть P — неабелев композиционный фактор в G. Тогда $t(P) \geq 3$ и, следовательно, по лемме 2 группа P изоморфна одной из групп, приведенных в табл. 1, 2.

Ввиду [4] можно считать, что $t(L) = 3$. Теперь, учитывая известные результаты о распознаваемости конечных простых групп (см. [12, табл. 3]), можно считать, что группа L изоморфна одной из следующих групп: $F_4(q)$ для четного q, ${}^2D_p(3)$ для простого $p = 2^m + 1 \geq 5$, $E_7(2)$, $E_7(3)$. Ввиду лемм 2 и 3 получаем, что $\{n_2(L), n_3(L)\} \subseteq \{n_i(P) \mid 1 < i \leq t(P)\}$. Рассмотрим все возможности для L.

Лемма 5. *Пусть $L = F_4(q)$, $q = 2^a$. Тогда группа L квазираспознаваема.*

Доказательство. Имеем $\{n_2(L), n_3(L)\} = \{q^4+1, q^4-q^2+1\}$. Рассмотрим все возможности для P.

1. Пусть $P \cong A_n$, $n > 6$, $n = p$, $p-2$ — простые числа. Тогда $\{q^4+1, q^4-q^2+1\} = \{p, p-2\}$ и, следовательно,

$$q^4 + 1 = p, \quad q^4 - q^2 + 1 = p - 2.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $q^2 = 2$; противоречие.

2. Пусть $P \cong A_1(r)$, $3 \leq r \equiv \varepsilon(4)$, $\varepsilon = \pm 1$, $r = s^b$, s — простое число. Тогда

$$\{q^4+1, q^4-q^2+1\} = \{s, (r+\varepsilon)/2\}.$$

Предположим, что

$$q^4 + 1 = s, \quad q^4 - q^2 + 1 = \frac{r+\varepsilon}{2}.$$

Вычтем из первого равенства второе:

$$q^2 = s - \frac{r+\varepsilon}{2} = s - \frac{s^b+\varepsilon}{2} = \frac{s(2-s^{b-1})-\varepsilon}{2}.$$

Отсюда $b = 1$, $q^2 = \frac{s-\varepsilon}{2}$, $s = 2q^2+\varepsilon$, $q^4+1 = 2q^2+\varepsilon$, $q^4-2q^2+1 = \varepsilon$, $(q^2-1)^2 = \varepsilon$, $(q^2-1)^2 = 1$, $q^2 = 2$; противоречие.

Итак,

$$q^4 + 1 = \frac{r+\varepsilon}{2}, \quad q^4 - q^2 + 1 = s.$$

Отсюда получаем, что $q^2(q^2-1) = s-1$, $q^4 = \frac{r+\varepsilon}{2} - 1 = \frac{r-1}{2} + \frac{\varepsilon-1}{2}$. Ясно, что $4 \mid q^2 \mid (s-1) \mid (r-1)$. Поэтому $2 \mid \frac{r-1}{2}$, а значит, $2 \mid \frac{\varepsilon-1}{2}$, откуда $\varepsilon = 1$. Таким образом, $r = 2q^4+1 = 2^{4a+1}+1$. Теперь лемма 4 влечет $r = s$, и поэтому $q^2 = \frac{s+1}{2} - s = \frac{1-s}{2} < 0$; противоречие.

3. Пусть $P \cong A_1(r)$, $r = 2^b > 2$. Тогда $\{q^4+1,\ q^4-q^2+1\} = \{r-1,\ r+1\}$ и, следовательно,

$$q^4 - q^2 + 1 = r - 1, \quad q^4 + 1 = r + 1.$$

Вычитая из второго равенства первое, приходим к равенству $q^2 = 2$; противоречие.

4. Пусть $P \cong {}^2D_p(3)$, $p = 2^m+1$, $m \geq 2$. Тогда

$$\{q^4+1, q^4-q^2+1\} = \left\{\frac{3^{p-1}+1}{2}, \frac{3^p+1}{4}\right\}.$$

Поскольку $\frac{3^p+1}{4} - \frac{3^{p-1}+1}{2} = \frac{3^{p-1}-1}{4} > 0$, имеем

$$q^4 + 1 = \frac{3^{p-1}+1}{2}, \quad q^4 - q^2 + 1 = \frac{3^p+1}{4}.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $q^4 = \frac{3^{p-1}-1}{4}$, откуда $2^{4a+1}+1 = 3^{p-1}$. Теперь лемма 4 влечет $p-1=1$, $p=2$; противоречие.

5. Пусть $P \cong G_2(r)$, $r = 3^b$. Тогда

$$q^4+1 = r^2+r+1, \quad q^4-q^2+1 = r^2-r+1.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $q^2 = 2r$; противоречие.

6. Пусть $P \cong {}^2G_2(r)$, $r = 3^{2m+1} > 3$. Тогда

$$\{q^4+1, q^4-q^2+1\} = \{r-\sqrt{3r}+1, r+\sqrt{3r}+1\},$$

т. е.

$$q^4+1 = r+\sqrt{3r}+1, \quad q^4-q^2+1 = r-\sqrt{3r}+1.$$

Вычитая из первого равенства второе, имеем $q^2 = 2\sqrt{3r}$; противоречие.

7. Пусть $P \cong F_4(r)$, $r = 2^b$. Тогда

$$\{q^4+1, q^4-q^2+1\} = \{r^4+1, r^4-r^2+1\}.$$

Таким образом, $q^4+1 = r^4+1$, а значит, $q = r$.

8. Пусть $P \cong {}^2F_4(r)$, $r = 2^{2m+1} > 2$. Тогда

$$\{q^4+1, q^4-q^2+1\} = \{r^2-\sqrt{2r^3}+r-\sqrt{2r}+1, r^2+\sqrt{2r^3}+r+\sqrt{2r}+1\}.$$

Отсюда

$$q^4+1 = r^2+\sqrt{2r^3}+r+\sqrt{2r}+1, \quad q^4-q^2+1 = r^2-\sqrt{2r^3}+r-\sqrt{2r}+1.$$

Вычтем из первого равенства второе: $q^2 = 2(\sqrt{2r^3}+\sqrt{2r}) = 2^{m+2}(2^{2m+1}+1)$; противоречие.

9. Пусть $P \cong {}^2B_2(r)$, $r = 2^{2m+1} > 2$. Тогда

$$\{q^4+1, q^4-q^2+1\} = \{r-\sqrt{2r}+1, r+\sqrt{2r}+1\}$$

и, следовательно, $q^4+1 = r+\sqrt{2r}+1$. Значит, $q^4 = 2^{2m+1}+2^{m+1} = 2^{m+1}(2^m+1)$; противоречие.

10. Пусть $P \cong E_8(r)$, $r = s^b$, s — простое число. Тогда

$$\{q^4+1\ ,\ q^4-q^2+1\} \subseteq \left\{\frac{r^{10}+r^5+1}{r^2+r+1}, \frac{r^{10}+1}{r^2+1}, r^8-r^4+1, \frac{r^{10}-r^5+1}{r^2-r+1}\right\}.$$

Легко проверить, что

$$\frac{r^{10}+r^5+1}{r^2+r+1} < \frac{r^{10}+1}{r^2+1} < r^8-r^4+1 < \frac{r^{10}-r^5+1}{r^2-r+1}.$$

Пусть $q^4+1 = \frac{r^{10}+1}{r^2+1}$. Тогда $(q^4+1)(r^2+1) = r^{10}+1$, т. е. $(q^4+1)r^2+q^4 = r^{10}$. Отсюда $r^2 \mid q^4$, следовательно, $s=2$ и $q^4+1 = r^8-\frac{q^4}{r^2}$. Если $r^2 < q^4$, то $2 \mid (r^8-\frac{q^4}{r^2})$; противоречие с нечетностью числа q^4+1. Поэтому $r^2 = q^4$, откуда $q^4+1 = q^{16}-1$, $q^{16}-q^4 = 2$, $q^4(q^{12}-1) = 2$; противоречие.

Если $q^4+1 = r^8-r^4+1$, то $q^4 = r^4(r^4-1)$; противоречие.

Пусть $q^4+1 = \frac{r^{10}-r^5+1}{r^2-r+1} = r^8+r^7-r^5-r^4-r^3+r+1$. Тогда

$$q^4 = r^8+r^7-r^5-r^4-r^3+r = r(r^7+r^6-r^4-r^3-r^2+1).$$

Отсюда $r \mid q^4$, $s = 2$ и $q^4/r = r^7 + r^6 - r^4 - r^3 - r^2 + 1$. Если $r < q^4$, то в предыдущем равенстве слева четное число, а справа нечетное; противоречие. Поэтому $r = q^4$, откуда $r^7 + r^6 - r^4 - r^3 - r^2 = 0$, а значит, $r^5 + r^4 - r^2 - r - 1 = 0$; противоречие.

Итак, $q^4 + 1 = \frac{r^{10}+r^5+1}{r^2+r+1}$, что противоречит неравенству $q^4 - q^2 + 1 < q^4 + 1$.

11. Пусть $P \cong {}^2E_6(2)$. Тогда

$$\{q^4 + 1\ ,\ q^4 - q^2 + 1\} \subseteq \{13, 17, 19\}.$$

Поскольку $q^4 - q^2 + 1 < q^4 + 1$, то $q^4 + 1 \in \{17, 19\}$. Если $q^4 + 1 = 19$, то $q^4 = 18$; противоречие. Поэтому $q^4 + 1 = 17$ и, следовательно, $q = 2$. Но тогда $\pi_1(P) = \{2, 3, 5, 7, 11\} \subseteq \pi_1(L) = \pi(2(2^4 - 1)(2^6 - 1)) = \{2, 3, 5, 7\}$; противоречие.

12. Пусть P изоморфна ${}^2A_5(2)$, $E_7(2)$, $E_7(3)$, $A_2(4)$ или одной из спорадических групп. Рассуждая, как в случае 11, приходим к противоречию.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $L = {}^2D_p(3)$, где p — простое число, $p = 2^m + 1$, $m \geq 2$. Тогда группа L квазираспознаваема.*

Доказательство. Имеем $\{n_2(L),\ n_3(L)\} = \{\frac{3^{p-1}+1}{2}, \frac{3^p+1}{4}\}$. Легко проверить, что $\frac{3^{p-1}+1}{2} < \frac{3^p+1}{4}$.

Рассмотрим все возможности для P.

1. Пусть $P \cong A_n$, $n > 6$, $n = p$, $p - 2$ — простые числа. Тогда

$$\left\{\frac{3^{p-1}+1}{2}, \frac{3^p+1}{4}\right\} = \{p, p-2\}.$$

Отсюда

$$\frac{3^{p-1}+1}{2} = p - 2, \quad \frac{3^p+1}{4} = p.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим, что $\frac{3^{p-1}-1}{4} = 2$, откуда $3^{p-1} = 9$, $p - 1 = 2$, $p = 3$; противоречие.

2. Пусть $P \cong A_1(r)$, $r = s^b$, s — простое число, $r \equiv \varepsilon (\mathrm{mod}\ 4)$, $\varepsilon = \pm 1$. Тогда

$$\left\{\frac{3^{p-1}+1}{2}, \frac{3^p+1}{4}\right\} = \left\{s, \frac{r+\varepsilon}{2}\right\}.$$

Предположим, что

$$\frac{3^{p-1}+1}{2} = s, \quad \frac{3^p+1}{4} = \frac{r+\varepsilon}{2}.$$

Вычитая из второго равенства первое, находим, что $\frac{3^{p-1}-1}{4} = \frac{r-2s+\varepsilon}{2}$, тем самым $3^{p-1} = 2r - 4s + 2\varepsilon + 1$. Если $\varepsilon = 1$, то $\frac{3^p+1}{4} = \frac{r+1}{2}$, откуда $3^p = 2(r-1)$; противоречие. Поэтому $\varepsilon = -1$ и, следовательно, $\frac{3^p+1}{4} = \frac{r-1}{2}$. Отсюда $3^p = 2(r-3)$; противоречие.

Итак,

$$\frac{3^{p-1}+1}{2} = \frac{r+\varepsilon}{2}, \quad \frac{3^p+1}{4} = s.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим, что

$$\frac{3^{p-1}-1}{4} = s - \frac{r+\varepsilon}{2} = \frac{2s-r-\varepsilon}{2}.$$

Если $b > 1$, то $\frac{2s-r-\varepsilon}{2} < 0$; противоречие.

Итак, $b = 1$ и, следовательно, $\frac{3^{p-1}-1}{4} = \frac{r-\varepsilon}{2}$. Складывая последнее равенство с равенством $\frac{3^p+1}{4} = \frac{r+\varepsilon}{2}$, имеем $\frac{3^{p-1}+3^p}{4} = r$, $3^{p-1} = r$; противоречие.

3. Пусть $P \cong A_1(r)$, $r = 2^b > 2$. Тогда

$$\left\{\frac{3^{p-1}+1}{2}, \frac{3^p+1}{4}\right\} = \{r-1, r+1\}.$$

Отсюда

$$\frac{3^{p-1}+1}{2} = r-1, \quad \frac{3^p+1}{4} = r+1.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим $\frac{3^{p-1}-1}{4} = 2$, откуда $3^{p-1} = 9$, $p-1 = 2$, $p = 3$; противоречие.

4. Пусть $P \cong {}^2D_{p_1}(3)$, p_1 — простое число, $p_1 = 2^{m_1}+1 \geq 5$. Тогда $\frac{3^{p-1}+1}{2} = \frac{3^{p_1}+1}{2}$, $3^{p-1} = 3^{p_1-1}$, $p = p_1$.

5. Пусть $P \cong G_2(r)$, где $r = 3^b$. Тогда

$$\frac{3^{p-1}+1}{2} = r^2 - r + 1, \quad \frac{3^p+1}{4} = r^2 + r + 1.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим, что $\frac{3^{p-1}-1}{4} = 2r$, откуда $3^{p-1} = 8r+1$; противоречие.

6. Пусть $P \cong {}^2G_2(r)$, $r = 3^{2m+1} > 3$. Тогда

$$\left\{\frac{3^{p-1}+1}{2}, \frac{3^p+1}{4}\right\} = \{r - \sqrt{3r} + 1, r + \sqrt{3r} + 1\},$$

значит,

$$\frac{3^{p-1}+1}{2} = r - \sqrt{3r} + 1, \quad \frac{3^p+1}{4} = r + \sqrt{3r} + 1.$$

Вычитая из второго равенства первое, имеем $\frac{3^{p-1}-1}{4} = 2\sqrt{3r}$. Отсюда $3^{p-1}-1 = 8\sqrt{3r} = 8 \cdot 3^{m+1}$; противоречие.

7. Пусть $P \cong F_4(r)$, $r = 2^b$. Тогда

$$\left\{\frac{3^{p-1}+1}{2}, \frac{3^p+1}{4}\right\} = \{r^4+1, r^4-r^2+1\}.$$

Отсюда

$$\frac{3^{p-1}+1}{2} = r^4 - r^2 + 1, \quad \frac{3^p+1}{4} = r^4 + 1.$$

Вычитая из второго равенства первое, приходим к тому, что $\frac{3^{p-1}-1}{4} = r^2$, $3^{p-1} - 1 = 2^{2b+2}$; противоречие с леммой 4.

8. Пусть $P \cong {}^2F_4(r)$, $r = 2^{2m+1} > 2$. Тогда

$$\left\{\frac{3^{p-1}+1}{2}, \frac{3^p+1}{4}\right\} = \{r^2 - \sqrt{2r^3} + r - \sqrt{2r} + 1, r^2 + \sqrt{2r^3} + r + \sqrt{2r} + 1\}.$$

Отсюда

$$\frac{3^{p-1}+1}{2} = r^2 - \sqrt{2r^3} + r - \sqrt{2r} + 1, \quad \frac{3^p+1}{4} = r^2 + \sqrt{2r^3} + r + \sqrt{2r} + 1.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим, что $\frac{3^{p-1}-1}{4} = 2(\sqrt{2r^3} + \sqrt{2r})$, откуда $3^{p-1}-1 = 8(2^{3m+2}+2^{m+1}) = 2^{m+4}(2^{2m+1}+1)$, $3^{p-1} = 2^{m+4}(2^{2m+1}+1)+1$. Подставляя 3^{p-1} и $r = 2^{2m+1}$ в первое равенство, получим

$$2^{m+4}(2^{2m+1}+1)+1 = 2(2^{4m+2} - 2^{3m+2} + 2^{2m+1} - 2^{m+1} + 1);$$

противоречие.

9. Пусть $P \cong {}^2B_2(r)$, где $r = 2^{2m+1} > 2$. Тогда

$$\frac{3^{p-1}+1}{2} = r - \sqrt{2r} + 1, \quad \frac{3^p+1}{4} = r + \sqrt{2r} + 1.$$

Вычитая из второго равенства первое, будем иметь $\frac{3^{p-1}-1}{4} = 2\sqrt{2r}$, откуда $3^{p-1}-1 = 2^{m+4}$; противоречие с леммой 4.

10. Пусть $P \cong E_8(r)$, где $r = s^b$, s — простое число. Тогда

$$\left\{\frac{3^{p-1}+1}{2}, \frac{3^p+1}{4}\right\} \subseteq \left\{\frac{r^{10}-r^5+1}{r^2-r+1}, \frac{r^{10}+r^5+1}{r^2+r+1}, r^8-r^4+1, \frac{r^{10}+1}{r^2+1}\right\}.$$

Как мы уже заметили выше, $\frac{3^{p-1}+1}{2} < \frac{3^p+1}{2}$ и

$$\frac{r^{10}+r^5+1}{r^2+r+1} < \frac{r^{10}+1}{r^2+1} < r^8-r^4+1 < \frac{r^{10}-r^5+1}{r^2-r+1}.$$

Пусть $\frac{3^{p-1}+1}{2} = r^8 - r^4 + 1$. Тогда

$$\frac{3^p+1}{4} = \frac{r^{10}-r^5+1}{r^2-r+1} = r^8 + r^7 - r^5 - r^4 - r^3 + r + 1.$$

Получаем систему равенств

$$\frac{3^{p-1}+1}{2} = r^8 - r^4 + 1, \quad \frac{3^p+1}{4} = \frac{r^{10}-r^5+1}{r^2-r+1}.$$

Вычтем из второго равенства первое:

$$\frac{3^{p-1}-1}{4} = r^7 - r^5 - r^3 + r = r(r^4-1)(r^2-1).$$

Из первого равенства системы имеем $\frac{3^{p-1}-1}{2} = r^4(r^4-1)$. Поделив друг на друга два предыдущих равенства, получим $2 = \frac{r^3}{r^2-1}$; противоречие.

Пусть $\frac{3^{p-1}+1}{2} = \frac{r^{10}+1}{r^2+1} = r^8 - r^6 + r^4 - r^2 + 1$.

Предположим, что $\frac{3^p+1}{4} = r^8 - r^4 + 1$. Тогда

$$\frac{3^{p-1}+1}{2} = r^8 - r^6 + r^4 - r^2 + 1, \quad \frac{3^p+1}{4} = r^8 - r^4 + 1.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим

$$\frac{3^{p-1}-1}{4} = r^6 - 2r^4 + r^2 = r^2(r^2-1)^2.$$

Из первого равенства имеем

$$\frac{3^{p-1}-1}{2} = r^8 - r^6 + r^4 - r^2 = r^2(r^2-1)(r^4+1).$$

Поделив друг на друга два предыдущих равенства, находим $2 = \frac{r^4+1}{r^2-1} = r^2+1+\frac{2}{r^2-1}$; противоречие.

Таким образом,

$$\frac{3^p+1}{4} = \frac{r^{10}-r^5+1}{r^2-r+1} = r^8+r^7-r^5-r^4-r^3+r+1.$$

Вычитая из этого равенства равенство $\frac{3^{p-1}+1}{2} = r^8-r^6+r^4-r^2+1$, имеем

$$\frac{3^{p-1}-1}{4} = r^7+r^6-r^5-2r^4-r^3+r^2+r = r(r^2-1)(r-1)(r^3+r^2+2r+1).$$

Поделив на это равенство полученное выше равенство

$$\frac{3^{p-1}-1}{2} = r^8-r^6+r^4-r^2 = r^2(r^2-1)(r^4+1),$$

находим $2 = \frac{r(r+1)}{r^3+r^2+2r+1}$; противоречие.

Итак,

$$\frac{3^{p-1}+1}{2} = \frac{r^{10}+r^5+1}{r^2+r+1} = r^8-r^7+r^5-r^4+r^3-r+1.$$

Предположим, что

$$\frac{3^p+1}{4} = \frac{r^{10}+1}{r^2+1} = r^8-r^6+r^4-r^2+1.$$

Тогда

$$\frac{3^{p-1}+1}{2} = r^8-r^7+r^5-r^4+r^3-r+1, \quad \frac{3^p+1}{4} = r^8-r^6+r^4-r^2+1.$$

Вычтем из второго равенства первое:

$$\frac{3^{p-1}-1}{4} = r^7-r^6-r^5+2r^4-r^3-r^2+r = r(r^6-r^5-r^4+2r^3-r^2-r+1).$$

Из первого равенства следует, что

$$\frac{3^{p-1}-1}{2} = r^8-r^7+r^5-r^4+r^3-r = r(r^7-r^6+r^4-r^3+r^2-1).$$

Поделив друг на друга два предыдущих равенства, получим

$$\frac{r^7-r^6+r^4-r^3+r^2-1}{r^6-r^5-r^4+2r^3-r^2-r+1} = 2,$$

откуда

$$r^7-r^6+r^4-r^3+r^2 = 2r^6-2r^5-2r^4+4r^3-2r^2-2r+3.$$

Отсюда $r \mid 3$, т. е. $r=3$. Но тогда $3 \mid \frac{3^{p-1}-1}{2}$; противоречие.

Предположим, что $\frac{3^p+1}{4} = r^8-r^4+1$. Получаем систему равенств

$$\frac{3^{p-1}+1}{2} = r^8-r^7+r^5-r^4+r^3-r+1, \quad \frac{3^p+1}{4} = r^8-r^4+1.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим

$$\frac{3^{p-1}-1}{4} = r^7-r^5-r^3+r = r(r^2-1)^2(r^2+1).$$

Из первого равенства системы вытекает, что

$$\frac{3^{p-1}-1}{2}=r^8-r^6+r^4-r^2=r^2(r^2-1)^2(r^2+1).$$

Поделив друг на друга два предыдущих равенства, получим $r=2$. Но тогда $3^{p-1}=181$; противоречие.

Итак,

$$\frac{3^p+1}{4}=\frac{r^{10}-r^5+1}{r^2-r+1}=r^8+r^7-r^5-r^4-r^3+r+1.$$

Получаем систему равенств

$$\frac{3^{p-1}+1}{2}=r^8-r^7+r^5-r^4+r^3-r+1,\quad \frac{3^p+1}{4}=r^8+r^7-r^5-r^4-r^3+r+1.$$

Вычтем из второго равенства первое:

$$\frac{3^{p-1}-1}{4}=2r^7-2r^5-2r^3+2r=2r(r^2-1)(r^4-1).$$

Из первого равенства системы следует, что

$$\frac{3^{p-1}-1}{2}=r^8-r^7+r^5-r^4+r^3-r=r(r^4-1)(r^3-r^2+1).$$

Поделив друг на друга два предыдущих равенства, получим $2=\frac{r^3-r^2+1}{2(r^2-1)}$, откуда $4(r^2-1)=r^3-(r^2-1)$ и, следовательно, $r^2-1 \mid r^3$; противоречие.

11. Пусть P изоморфна ${}^2A_5(2)$, $E_7(2)$, $E_7(3)$, $A_2(4)$, ${}^2E_6(2)$ или одной из спорадических групп. Тогда, рассуждая как в случае 11 леммы 5, приходим к противоречию.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $L=E_7(2)$. Тогда группа L квазираспознаваема.*

Доказательство. Имеем $\{n_2(L),n_3(L)\}=\{73,127\}$. Рассмотрим все возможности для P.

1. Пусть $P\cong A_n$, $n>6$, $n=p$, $p-2$ — простые числа. Тогда $\{73,127\}=\{p,p-2\}$; противоречие.

2. Пусть $P\cong A_1(r)$, $r=s^b$, s — простое число, $r\equiv\varepsilon(\mathrm{mod}\ 4)$, $\varepsilon=\pm1$. Тогда

$$\{73,127\}=\left\{s,\frac{r+\varepsilon}{2}\right\}.$$

Предположим, что

$$73=s,\quad 127=\frac{s^b+\varepsilon}{2}.$$

Подставляя значение s во второе равенство, получим, что $127\cdot2=73^b+\varepsilon$, откуда 73^b равно 253 или 255; противоречие.

Итак,

$$127=s,\quad 73=\frac{s^b+\varepsilon}{2}.$$

Подставляя значение s во второе равенство, получим $73\cdot 2=127^b\pm1$; противоречие.

3. Пусть $P \cong A_1(r)$, $r = 2^b > 2$. Тогда $\{73, 127\} = \{r-1, r+1\}$; противоречие.

4. Пусть $P \cong {}^2D_p(3)$, $p = 2^m + 1 \geq 5$, p — простое число. Тогда

$$\{73, 127\} = \left\{\frac{3^{p-1}+1}{2}, \frac{3^p+1}{4}\right\}.$$

Отсюда $73 = \frac{3^{p-1}+1}{2}$ и, следовательно, $3^{p-1} = 145$; противоречие.

5. Пусть $P \cong G_2(r)$, где $r = 3^b$. Тогда

$$127 = r^2 + r + 1, \quad 73 = r^2 - r + 1.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим, что $54 = 2r$, $27 = r$, а это противоречит первому равенству.

6. Пусть $P \cong {}^2G_2(r)$, $r = 3^{2m+1} > 3$. Тогда

$$\{73, 127\} = \{r - \sqrt{3r} + 1, r + \sqrt{3r} + 1\},$$

откуда

$$73 = r - \sqrt{3r} + 1, \quad 127 = r + \sqrt{3r} + 1.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим $54 = 2\sqrt{3r} = 2 \cdot 3^{m+1}$. Поэтому $27 = 3^3 = 3^{m+1}$, т. е. $m = 2$, следовательно, $r = 3^5 = 243$. Очевидно, что $r = 243$ не удовлетворяет второму равенству; противоречие.

7. Пусть $P \cong F_4(r)$, $r = 2^b$. Тогда $\{73, 127\} = \{r^4 + 1, r^4 - r + 1\}$. Тем самым $127 = r^4 + 1$, следовательно, $126 = r^4 = 2^{4b}$; противоречие.

8. Пусть $P \cong {}^2F_4(r)$, $r = 2^{2m+1} > 2$. Тогда

$$\{73, 127\} = \{r^2 - \sqrt{2r^3} + r - \sqrt{2r} + 1, r^2 + \sqrt{2r^3} + r + \sqrt{2r} + 1\}.$$

Отсюда

$$73 = r^2 - \sqrt{2r^3} + r - \sqrt{2r} + 1, \quad 127 = r^2 + \sqrt{2r^3} + r + \sqrt{2r} + 1.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим, что $54 = 2(\sqrt{2r^3} + \sqrt{2r})$, откуда

$$27 = 2^{3m+2} + 2^{m+1} = 2^{m+1}(2^{2m+1} + 1),$$

т. е. $3^3 = 2^{m+1}(2^{2m+1} + 1)$; противоречие.

9. Пусть $P \cong {}^2B_2(q)$, $q = 2^{2m+1} > 2$. Тогда

$$\{73, 127\} \subseteq \{q - 1, q - \sqrt{2q} + 1, q + \sqrt{2q} + 1\}.$$

Ясно, что $q - \sqrt{2q} + 1 < q - 1 < q + \sqrt{2q} + 1$, тем самым $q - \sqrt{2q} + 1 \leq 73$ и $127 \leq q + \sqrt{2q} + 1$.

Если $q - 1 = 73$, то $q = 74$; противоречие. Поэтому $q - \sqrt{2q} + 1 = 73$ и, следовательно, $q - \sqrt{2q} = 72$. Поскольку $q = 2^{2m+1}$, отсюда получаем, что $2^{m+1}(2^m - 1) = 2^3 \cdot 3^2$. Но тогда $2^{m+1} = 2^3$ и $2^m - 1 = 3^2$, что, очевидно, противоречиво.

10. Пусть $P \cong E_8(q)$. Тогда

$$\{73, 127\} \subseteq \left\{\frac{q^{10} - q^5 + 1}{q^2 - q + 1}, \frac{q^{10} + q^5 + 1}{q^2 + q + 1}, q^8 - q^4 + 1, \frac{q^{10} + 1}{q^2 + 1}\right\}.$$

Как мы уже заметили выше,

$$\frac{q^{10} + q^5 + 1}{q^2 + q + 1} < \frac{q^{10} + 1}{q^2 + 1} < q^8 - q^4 + 1 < \frac{q^{10} - q^5 + 1}{q^2 - q + 1}.$$

Так как

$$\frac{q^{10}+1}{q^2+1} = q^8-q^6+q^4-q^2+1 = q^2(q^2-1)^2(q^2+1)+1 \geq 2^2(2^2-1)^2(2^2+1)+1 = 181,$$

получаем противоречие.

11. Пусть P изоморфна ${}^2A_5(2)$, $E_7(3)$, $A_2(4)$, ${}^2E_6(2)$ или одной из спорадических групп. Поскольку $n_3(L) = 127 \notin \omega(P)$, получаем противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть $L = E_7(3)$. Тогда группа L квазираспознаваема.*

Доказательство. Имеем $\{n_2(L), n_3(L)\} = \{757, 1093\}$. Рассмотрим все возможности для P.

1. Пусть $P \cong A_n, n > 6$, $n = p$, $p-2$ — простые числа. Тогда $\{757, 1093\} = \{p, p-2\}$; противоречие.

2. Пусть $P \cong A_1(r)$, $r = s^b$, s — простое число, $r \equiv \varepsilon (\mathrm{mod}\ 4)$, $\varepsilon = \pm 1$. Тогда

$$\{757, 1093\} = \left\{s, \frac{r+\varepsilon}{2}\right\}.$$

Предположим, что

$$757 = s, \quad 1093 = \frac{s^b+\varepsilon}{2}.$$

Подставляя значение s во второе равенство, получим, что $1093 \cdot 2 = 757^b \pm 1$, откуда 757^b равно 1092 или 1094; противоречие.

Итак,

$$1093 = s, \quad 757 = \frac{s^b+\varepsilon}{2}.$$

Подставляя значение s во второе равенство, приходим к равенству $757 \cdot 2 = 1093^b \pm 1$; противоречие.

3. Пусть $P \cong A_1(r)$, $r = 2^b > 2$. Тогда $\{757, 1093\} = \{r-1, r+1\}$; противоречие.

4. Пусть $P \cong {}^2D_p(3)$, $p = 2^m+1 \geq 5$, p — простое число. Тогда

$$\{757, 1093\} = \left\{\frac{3^{p-1}+1}{2}, \frac{3^p+1}{4}\right\}.$$

Отсюда $757 = \frac{3^{p-1}+1}{2}$ и, следовательно, $3^{p-1} = 1513$; противоречие.

5. Пусть $P \cong G_2(r)$, где $r = 3^b$. Тогда

$$1093 = r^2+r+1, \quad 757 = r^2-r+1.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим, что $336 = 2r$, $r = 168$; противоречие.

6. Пусть $P \cong {}^2G_2(r)$, $r = 3^{2m+1} > 3$. Тогда

$$\{757, 1093\} = \{r-\sqrt{3r}+1, r+\sqrt{3r}+1\},$$

откуда

$$757 = r-\sqrt{3r}+1, \quad 1093 = r+\sqrt{3r}+1.$$

Вычитая из второго равенства первое, имеем $336 = 2\sqrt{3r}$. Отсюда $168 = 3^{m+1}$; противоречие.

7. Пусть $P \cong F_4(r)$, $r = 2^b$. Тогда

$$\{757, 1093\} = \{r^4 + 1, r^4 - r^2 + 1\}$$

и, следовательно, $1093 = r^4 + 1$. Тем самым $1092 = r^4 = 2^{4b}$; противоречие.

8. Пусть $P \cong {}^2F_4(r)$, $r = 2^{2m+1} > 2$. Тогда

$$\{757, 1093\} = \{r^2 - \sqrt{2r^3} + r - \sqrt{2r} + 1, r^2 + \sqrt{2r^3} + r + \sqrt{2r} + 1\}.$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$757 = r^2 - \sqrt{2r^3} + r - \sqrt{2r} + 1, \quad 1093 = r^2 + \sqrt{2r^3} + r + \sqrt{2r} + 1.$$

Вычитая из второго равенства первое, имеем $336 = 2(\sqrt{2r^3} + \sqrt{2r})$, откуда $168 = 2^{m+1}(2^{2m+1} + 1)$. Таким образом, $2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^{m+1}(2^{2m+1} + 1)$. Отсюда $2^{m+1} = 2^3$ и $2^{m+1} + 1 = 21$; противоречие.

9. Пусть $P \cong {}^2B_2(q), q = 2^{2m+1} > 2$. Тогда

$$\{757, 1093\} \subseteq \{q - 1, q - \sqrt{2q} + 1, q + \sqrt{2q} + 1\}.$$

Ясно, что $q - \sqrt{2q} + 1 < q - 1 < q + \sqrt{2q} + 1\}$, поэтому $q - \sqrt{2q} + 1 \leq 757$ и $1093 \leq q + \sqrt{2q} + 1$.

Если $q - 1 = 757$, то $q = 758$; противоречие. Поэтому $q - \sqrt{2q} + 1 = 757$ и, следовательно, $q - \sqrt{2q} = 756$. Поскольку $q = 2^{2m+1}$, отсюда получаем, что $2^{m+1}(2^m - 1) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$. Но тогда $2^{m+1} = 2^2$ и $2^m - 1 = 3^3 \cdot 7$, что, очевидно, противоречиво.

10. Пусть $P \cong E_8(q)$. Тогда

$$\{757, 1093\} \subseteq \left\{\frac{q^{10} - q^5 + 1}{q^2 - q + 1}, \frac{q^{10} + q^5 + 1}{q^2 + q + 1}, q^8 - q^4 + 1, \frac{q^{10} + 1}{q^2 + 1}\right\}.$$

Как мы заметили выше,

$$\frac{q^{10} + q^5 + 1}{q^2 + q + 1} < \frac{q^{10} + 1}{q^2 + 1} < q^8 - q^4 + 1 < \frac{q^{10} - q^5 + 1}{q^2 - q + 1}.$$

Так как $q^8 - q^4 + 1 = q^4(q^4 - 1) + 1 \geq 2^4(2^4 - 1) + 1 = 241$, получаем противоречие.

11. Пусть P изоморфна ${}^2A_5(2)$, $E_7(2)$, $A_2(4)$, ${}^2E_6(2)$ или одной из спорадических групп. Поскольку $n_2(L) = 757 \notin \omega(P)$, приходим к противоречию.

Лемма доказана.

Теорема следует из лемм 5–8.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.
2. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
3. *Mazurov V. D., Shi W.* Groups whose elements have given orders // London Math. Soc. Lecture Note Ser. 1999. V. 261. P. 532–537.
4. *Алексеева О. А., Кондратьев А. С.* О распознаваемости группы $E_8(q)$ по множеству порядков элементов // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 998–1003.
5. *Алексеева О. А., Кондратьев А. С.* Квазираспознаваемость некоторых конечных простых групп по множеству порядков элементов // Укр. мат. конгр. 2001. Алгебра і теор. чисел. Секція 1: Тез. доп. Киев, 2001. С. 4.
6. *Коуровская* тетрадь. Нерешенные задачи по теории групп. 12-е изд. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1992.

7. *Aschbacher M.* Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.
8. *Conway J. H., Curtis R., Norton S., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
9. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1976.
10. *Кондратьев А. С., Мазуров В. Д.* Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 359–369.
11. *Tiep Pham Huu.* p-Steinberg characters of finite simple groups // J. Algebra. 1997. V. 187, N 1. P. 304–319.
12. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 166–198.

Статья поступила 14 ноября 2002 г.

Алексеева Оксана Алексеевна
Южно-Уральский гос. университет, кафедра прикладной математики,
пр. Ленина, 79, корп. 3Б, Челябинск 454080
oksana@prima.susu.ac.ru

Кондратьев Анатолий Семенович
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, 620219 Екатеринбург, ГСП-384
a.s.kondratiev@imm.uran.ru