Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 512.543

О РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ЭКСПОНЕНТЫ 4

Г. С. Дерябина, А. Н. Красильников

Аннотация: Доказано, что для любого тождества $v = 1$ существует такое целое положительное $N = N(v)$, что для любой метабелевой группы G и любого ее порождающего множества A из выполнения тождества $v = 1$ в каждой подгруппе, порожденной не более чем N элементами множества A, следует выполнение этого тождества во всей группе G. С другой стороны, показано, что для центрально-метабелевых групп аналогичное утверждение неверно уже для тождества $x^4 = 1$. Этим дан ответ на вопрос, поставленный В. В. Блудовым.

Ключевые слова: разрешимые группы, тождества, группы экспоненты 4

Пусть F — свободная группа, свободно порожденная элементами $x_1, x_2, \dots$. Пусть $v = v(x_1, \dots, x_n) \in F$. Выражение $v = 1$ называется *тождеством* группы G, если $v(g_1, \dots, g_n) = 1$ для любых $g_1, \dots, g_n \in G$. Терминологию и основные факты, относящиеся к тождествам в группах и к многообразиям групп, можно найти в [1, 2].

В. В. Блудовым был поставлен следующий вопрос [3, вопрос 13.10]. *Существует ли такая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для всякой k-ступенно разрешимой группы G с порождающим множеством A из выполнения тождества $x^4 = 1$ в каждой подгруппе, порожденной не более чем $f(k)$ элементами множества A, следует выполнение этого тождества во всей группе G?*

Напомним, что *метабелевой* называется 2-ступенно разрешимая группа, а *центрально-метабелевой* — группа, у которой фактор-группа по центру метабелева.

Теорема 1. *Пусть $v = 1$ — произвольное тождество. Тогда существует такое натуральное число $N = N(v)$, что для любой метабелевой группы G и любого ее порождающего множества A из выполнения тождества $v = 1$ в каждой подгруппе, порожденной не более чем N элементами множества A, следует выполнение этого тождества во всей группе G.*

Из теоремы 1 вытекает, что число $f(2)$ можно определить.

Теорема 2. *Для любого натурального n существует $(n + 1)$-порожденная центрально-метабелева группа G_n с порождающим множеством A такая, что каждая подгруппа в G_n, порожденная не более чем n элементами множества A, удовлетворяет тождеству $x^4 = 1$, но сама группа G_n этому тождеству не удовлетворяет.*

Так как каждая центрально-метабелева группа разрешима ступени 3, из теоремы 2 вытекает, что указанной в вопросе В. В. Блудова функции f не существует. Более того, нельзя определить уже число $f(3)$.

Работа второго из авторов частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований и INTAS.

Доказательство теоремы 1. Пусть M — свободная метабелева группа счетного ранга с множеством $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ свободных порождающих. Пусть Φ — множество всех сохраняющих порядок отображений ϕ множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел в себя (т. е. таких ϕ, что если $m, n \in \mathbb{N}$ и $m < n$, то $\phi(m) < \phi(n)$). Для каждого $\phi \in \Phi$ обозначим тем же символом ϕ эндоморфизм группы M такой, что $\phi(y_i) = y_{\phi(i)}$, а множество всех таких эндоморфизмов ϕ обозначим снова символом Φ. Подгруппу K группы M назовем Φ-*замкнутой*, если $\phi(K) \subseteq K$ для всех $\phi \in \Phi$.

Пусть $v(x_1, \dots, x_k) = 1$ — произвольное тождество. Напомним, что *длиной* $|h|$ *элемента* h *группы* M *в порождающих* Y называется наименьшее число s такое, что $h = a_1 \dots a_s$ для некоторых $a_1, \dots, a_s \in Y \cup Y^{-1}$. Пусть V_l — нормальная подгруппа в M, порожденная множеством

$$\{v(h_1, \dots, h_k) \mid h_1, \dots, h_k \in M,\ |h_1| + \dots + |h_k| \le l\}.$$

Ясно, что $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$, а также что для любого l подгруппа V_l является Φ-замкнутой. Известно [4], что в M возрастающие цепи нормальных Φ-замкнутых подгрупп стабилизируются. Значит, стабилизируется и цепь $V_1 \subseteq V_2 \dots$, т. е. $V_m = V_{m+1} = \dots$ для некоторого m. Положим $N = N(v) = m$.

Пусть V — вербальная подгруппа в M, отвечающая тождеству $v = 1$. Так как V порождается множеством

$$\{v(h_1, \dots, h_k) \mid h_1, \dots, h_k \in M\},$$

то $V = \bigcup_{l=1}^{\infty} V_l$, а поскольку $V_1 \subseteq \dots \subseteq V_{N-1} \subseteq V_N = V_{N+1} = \dots$, то $V = V_N$.

Пусть G — метабелева группа с порождающим множеством A, в которой каждая подгруппа, порожденная не более чем N элементами из A, удовлетворяет тождеству $v = 1$. Покажем, что тогда G удовлетворяет тождеству $v = 1$. Ясно, что без ограничения общности можно считать множество A не более чем счетным. Пусть ψ — эпиморфизм M на G, отображающий Y на A.

Пусть $h_1, \dots, h_k$ — произвольные элементы группы M такие, что $|h_1| + \dots + |h_k| \le N$. Тогда $v(h_1, \dots, h_k)$ лежит в некоторой подгруппе группы M, порожденной не более чем N элементами множества Y. Значит, $\psi(v(h_1, \dots, h_k))$ лежит в некоторой подгруппе группы G, порожденной не более чем N элементами множества $A = \psi(Y)$. Эта подгруппа удовлетворяет тождеству $v = 1$, поэтому

$$\psi(v(h_1, \dots, h_k)) = v(\psi(h_1), \dots, \psi(h_k)) = 1.$$

Отсюда следует, что $\psi(V_N) = 1$, а так как $V_N = V$, то $\psi(V) = 1$. Следовательно, G удовлетворяет тождеству $v = 1$, как и требовалось. Теорема 1 доказана. $\square$

Замечание. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие групп, $F(\mathbf{V})$ — относительно свободная группа счетного ранга в $\mathbf{V}$ со свободными порождающими $y_1, y_2, \dots$. Доказательство теоремы 1 остается верным для любого многообразия $\mathbf{V}$, в котором $F(\mathbf{V})$ удовлетворяет условию максимальности на нормальные Φ-замкнутые подгруппы. Таким свойством, наряду с многообразием всех метабелевых групп, обладают также все многообразия вида $\mathbf{N}_c\mathbf{A} \cap \mathbf{A}\mathbf{N}_c$ (М. Вон-Ли [5]), где $\mathbf{A}$ — многообразие всех абелевых групп, а $\mathbf{N}_c$ — многообразие всех нильпотентных групп ступени не выше c. Таким образом, теорема 1 остается верной для многообразий $\mathbf{N}_c\mathbf{A} \cap \mathbf{A}\mathbf{N}_c$. Так как указанное свойство наследуется подмногообразиями, теорема 1 верна и для всех подмногообразий многообразий $\mathbf{N}_c\mathbf{A} \cap \mathbf{A}\mathbf{N}_c$ $(c = 2, 3, \dots)$.

Доказательство теоремы 2. Пусть H — элементарная абелева 2-группа с базисом $z_1, z_2, \dots, z_n$. Пусть

$$B = \langle b^h (h \in H) \mid (b^h)^2 = [b^{h_1}, b^{h_2}, b^{h_3}] = 1 \text{ для всех } h, h_i \in H \rangle.$$

Тогда группа H действует на B естественным образом: $(b^h)^{h'} = b^{hh'}$ для любых $h, h' \in H$.

Ясно, что $[b^{h_1}, b^{h_2}]^2 = [(b^{h_1})^2, b^{h_2}] = 1$ для любых $h_1, h_2 \in H$, поэтому B' — элементарная абелева 2-группа. Также ясно, что B/B' — элементарная абелева 2-группа, поэтому $f^2 \in B'$ для любого $f \in B$. В частности, f^2 лежит в центре группы B. Отметим, что B — группа экспоненты 4.

Пусть $<$ — произвольный линейный порядок на H такой, что $h > 1$ для всех $h \in H$, $h \neq 1$. Легко видеть, что множество

$$\{[b^{h_1}, b^{h_2}] (h_1, h_2 \in H) \mid h_1 > h_2\}$$

является базисом B' (как элементарной абелевой 2-группы). Пусть K — подгруппа в B, порожденная всеми элементами вида $[b^{h_1}, b^{h_2}][b^{h_1 h_2}, b]$ $(h_1, h_2 \in H)$. Нетрудно проверить, что K — H-замкнутая подгруппа, лежащая в центре группы B. Также легко проверить, что базисом K является множество

$$\{[b^{h_1}, b^{h_2}][b^{h_1 h_2}, b] (h_1, h_2 \in H) \mid h_1 > h_2\}.$$

Следовательно, коммутант $\overline{B}'$ группы $\overline{B} = B/K$ имеет базисом (как элементарная абелева 2-группа) множество $\{[\bar{b}, \bar{b}^h] \mid h \in H, h \neq 1\}$, где $\bar{b} = bK$.

Пусть $W = \overline{B}H$ — полупрямое произведение групп $\overline{B}$ и H. На подгруппе $\overline{B}'$ группа H действует тривиально, поэтому $\overline{B}'$ лежит в центре группы W. Нетрудно проверить, что $W/\overline{B}'$ — метабелева группа, поэтому группа W центрально-метабелева.

Лемма. *Пусть $h \in H$, $f = \bar{b}^{h_1} \dots \bar{b}^{h_l} \in \overline{B}$. Тогда $(hf)^4 = [\bar{b}, \bar{b}^h]^l$.*

Доказательство. Ясно, что $(hf)^2 = h^2 f^h f = f^h f$. Так как f^2 лежит в центре группы B и $f^4 = 1$ для любого $f \in B$, то

$$(hf)^4 = (f^h)^2 f^2 [f, f^h] = (f^2)^h f^2 [f, f^h] = f^4 [f, f^h] = [f, f^h].$$

Далее,

$$[f, f^h] = [\bar{b}^{h_1} \dots \bar{b}^{h_l}, \bar{b}^{h_1 h} \dots \bar{b}^{h_l h}] = \prod_{i<j} [\bar{b}^{h_i}, \bar{b}^{h_j h}][\bar{b}^{h_j}, \bar{b}^{h_i h}] \prod_{i=1}^{l} [\bar{b}^{h_i}, \bar{b}^{h_i h}].$$

Поскольку $[\bar{b}^{h_i}, \bar{b}^{h_j h}][\bar{b}^{h_j}, \bar{b}^{h_i h}] = [\bar{b}^{h_i h_j h}, \bar{b}]^2 = 1$ для всех i, j и $[\bar{b}^{h_i}, \bar{b}^{h_i h}] = [\bar{b}, \bar{b}^h]$ для всех i, имеем $[f, f^h] = [\bar{b}, \bar{b}^h]^l$.

Таким образом, $(hf)^4 = [\bar{b}, \bar{b}^h]^l$. Лемма доказана.

Пусть N — подгруппа в $\overline{B}'$, порожденная всеми элементами $[\bar{b}, \bar{b}^h]$, где h является произведением не более чем $n-1$ элементов множества $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ (эквивалентно: $h \neq z_1 \dots z_n$). Так как $\overline{B}'$ лежит в центре группы W, то N — нормальная подгруппа в W. Отметим, что $\overline{B}'/N$ — циклическая группа порядка 2 с порождающим элементом $[\bar{b}, \bar{b}^{z_1 \dots z_n}]N$.

Положим $G_n = W/N$. Ясно, что G_n центрально-метабелева. Определим порождающее множество A группы G_n как образ в G_n множества $\{\bar{b}, z_1, \dots, z_n\}$. Группа G_n имеет экспоненту в точности 8, поскольку по лемме $(z_1 \dots z_n \bar{b})^4 =$

$[\bar{b}, \bar{b}^{z_1 \dots z_n}]$, значит, $(z_1 \dots z_n \bar{b})^4 \notin N$. С другой стороны, если $\widetilde{G}$ — произвольная подгруппа в G_n, порожденная n элементами множества A, то для любого элемента $g \in \widetilde{G}$ выполнено $g^4 = 1$. Действительно, если $\widetilde{G}$ порождается образами элементов $z_1, \dots, z_n$, то $\widetilde{G} \simeq H$ и $g^2 = 1$. Если же $\widetilde{G}$ порождается образами элементов $\bar{b}, z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n$, то $g = h\bar{b}^{h_1} \dots \bar{b}^{h_l} N$, где $h, h_1, \dots, h_l$ лежат в подгруппе $\widetilde{H}$ группы H, порожденной $z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots z_n$. Так как по лемме $(h\bar{b}^{h_1} \dots \bar{b}^{h_l})^4 = [\bar{b}, \bar{b}^h]^l$ и $[\bar{b}, \bar{b}^h] \in N$ для любого $h \in \widetilde{H}$ по определению подгруппы N, то $g^4 = 1$. Теорема 2 доказана. $\square$

Замечание. Метод доказательства теоремы 2 позволяет построить для любых положительных целых n и $k > 1$ группу G_n, порожденную множеством A мощности $n+1$, в которой все подгруппы, порожденные не более чем n элементами множества A, удовлетворяют тождеству $x^{2^k} = 1$, тогда как сама группа G_n этому тождеству не удовлетворяет. Указанная группа G_n имеет экспоненту 2^{k+1} и нильпотентный ступени 2 коммутант. Аналогичный результат, по-видимому, можно получить тем же методом и для любого простого p, при этом можно добиться того, чтобы группа G_n оказалась разрешимой ступени 3 и одновременно с нильпотентным ступени p коммутантом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейман Х.* Многообразия групп. М.: Мир, 1969.
2. *Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю.* Тождества // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 18. С. 117–240. (Итоги науки и техники).
3. *Коуровская* тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 13-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1995.
4. *Cohen D. E.* On the laws of a metabelian variety // J. Algebra. 1967. V. 5. P. 267–273.
5. *Vaughan-Lee M. R.* Abelian by nilpotent varieties // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1970. V. 21. P. 193–202.

Статья поступила 15 мая 2002 г.

Дерябина Галина Сергеевна
Московский гос. технический университет им. Н. Э. Баумана,
ул. 2-я Бауманoвская, 5, Москва 107005
galina_deryabina@podlipki.ru

Красильников Алексей Николаевич
Московский педагогический гос. университет,
ул. Малая Пироговская, 1, Москва 119882
alexei@krasilnikov.mccme.ru