Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 517.95

НЕКОТОРЫЕ НЕКЛАССИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

С. Н. Глазатов

Аннотация: Исследуется корректность нелокальных краевых задач для некоторого класса уравнений смешанного типа, включающего уравнение Чаплыгина и параболические уравнения с переменным направлением времени.

Ключевые слова: линейное уравнение смешанного типа, периодическое решение

В работе рассматривается вопрос о разрешимости некоторых новых неклассических краевых задач для линейных уравнений смешанного типа.

Уравнения изучаются в цилиндре $Q = D \times (0,T)$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей γ, $0 < T < +\infty$. Положим $S = \gamma \times (0,T)$, $S_0 = \{(x,0),\ x \in D\}$, $S_T = \{(x,T),\ x \in D\}$.

В области Q рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv k(x,t)u_{tt} + a(x,t)u_t + Au = f(x,t), \tag{1}$$

где $Au \equiv -\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + b(x)u$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2 \quad (a_0 > 0)$ для всех $x \in D$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i,j = 1,\dots,n$.

Функция $k(x,t)$ может менять знак в Q произвольным образом.

Достаточно общая теория краевых задач для уравнений вида (1) в области Q развита, например, в [1, гл. 3; 2, гл. 2] (см. также библиографию в этих работах). Постановка корректных краевых задач для (1) в Q зависит от поведения функции $k(x,t)$ на множествах S_0 и S_T и от коэффициентов $a(x,t)$ и $b(x)$.

Однако в дальнейшем в работах [3–7] в области Q для уравнения (1) были предложены совершенно иные краевые задачи, которые названы в этих работах нелокальными, а именно, задавалась некоторая связь между значениями искомой функции $u(x,t)$ и (если нужно) ее производной u_t на S_0 и на S_T. Однако те методы, которые использовались в цитируемых работах для доказательства корректности этих задач, зачастую не позволяли рассмотреть вопрос о существовании t-периодических решений рассматриваемых уравнений.

В дальнейшем всегда будет предполагаться, что коэффициенты уравнения (1) суть достаточно гладкие в $\overline{Q}$ функции. Предположим также, что $k(x,0) = k(x,T)$ для всех $x \in D$. Обозначим $\Gamma_0 = \{x \in D : k(x,0) = k(x,T) = 0\}$.

Краевая задача Π_1. *Найти в Q решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u|_{S_0} = u|_{S_T}, \tag{2}$$

$$u_t|_{\overline{S_0 \setminus \Gamma_0}} = u_t|_{\overline{S_T \setminus \Gamma_0}}, \tag{3}$$

$$u|_S = 0 \tag{4}$$

либо

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_S = 0, \tag{4'}$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \nu_j,$$

$\{\nu_j\}_{j=1}^n$ *— компоненты вектора нормали к границе* γ.

Обозначим через $(\cdot,\cdot)_0$ скалярное произведение в $L^2(Q)$ а через $\|\cdot\|_s$ норму в пространстве Соболева $W_2^s(Q)$.

Утверждение. *Пусть выполнены все вышеуказанные условия на коэффициенты уравнения* (1). *Пусть всюду в* Q *выполнено неравенство* $2a(x,t) - k_t(x,t) \geq \delta > 0$ *и для всех* $x \in D$ *справедливо* $b(x) \geq 0$ *в случае условия* (4) *и* $b(x) \geq \delta > 0$ *в случае условия* (4′). *Тогда решение задачи* Π_1 *единственно в пространстве* $W_2^2(Q)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть равенство $(Lu, u_t)_0 = 0$, произвести интегрирование по частям и воспользоваться условиями утверждения на коэффициенты (1). Получим, что $u \equiv 0$ п. в. в Q.

Теорема 1. *Пусть* $f, f_t \in L^2(Q)$ *и* $f(x,0) = f(x,T)$ *для почти всех* $x \in D$. *Пусть выполнены все вышеуказанные условия на коэффициенты уравнения* (1) *и* $a(x,0) = a(x,T)$ *для всех* $x \in D$. *Предположим также, что всюду в* Q *выполнено неравенство* $2a(x,t) - |k_t(x,t)| \geq \delta > 0$ *и для всех* $x \in D$ *справедливо* $b(x) \geq 0$ *в случае условия* (4) *и* $b(x) \geq \delta > 0$ *в случае условия* (4′). *Тогда существует решение* $u(x,t) \in W_2^2(Q)$ *задачи* Π_1 *и, более того,* $u_t(x,0) = u_t(x,T)$ *для почти всех* $x \in D$.

Доказательство. Пусть $\varphi_s(x)$, $s = 0,1,\ldots,$ — ортонормированные в $L^2(Q)$ собственные функции задачи Дирихле (Неймана) $A\varphi_s = \lambda_s^2 \varphi_s$, $\varphi_s|_\gamma = 0$ $(\frac{\partial \varphi_s}{\partial \nu_A}|_\gamma = 0)$, $s = 0,1,\ldots.$ Будем искать решение задачи Π_1 как предел в $W_2^2(Q)$ при $m \to \infty$ последовательности функций

$$u_m(x,t) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{m} u_{ls} \sin\frac{2\pi lt}{T}\varphi_s(x) + \sum_{l=0}^{m}\sum_{s=0}^{m} \tilde{u}_{ls} \cos\frac{2\pi lt}{T}\varphi_s(x),$$

где u_{ls} и $\tilde{u}_{ls}$ — постоянные, подлежащие определению из некоторой линейной алгебраической системы уравнений.

Обозначим через E_m конечномерную линейную оболочку функций

$$\left\{\sin\frac{2\pi lt}{T}\varphi_s(x),\ \cos\frac{2\pi rt}{T}\varphi_s(x)\right\}_{l=1,\ldots,m,\ s=0,\ldots,m,\ r=0,\ldots,m},$$

а через $P_m : L^2(Q) \to E_m$ ортопроектор в $L^2(Q)$ на E_m. Введем также обозначение $f_m = P_m f$.

Ясно, что если $\varphi \in E_m$, то $\varphi_t \in E_m$ и $A\varphi \in E_m$ и, таким образом, оператор A коммутирует с P_m на функциях из E_m. Кроме того, очевидно, что оператор D_t коммутирует с P_m на достаточно гладких t-периодических функциях. В силу условий теоремы на $f(x,t)$ имеем $D_t^j f_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} D_t^j f$ в $L^2(Q)$ при $j = 0,1$. Более того, как нетрудно видеть, если $z \in L^2(Q)$ и $\varphi \in E_m$, то $(P_m z, \varphi)_0 = (z, P_m \varphi)_0 = (z, \varphi)_0$.

При фиксированном m для нахождения констант u_{ls} и $\tilde{u}_{ls}$ рассмотрим равенство

$$L_1 u_m \equiv P_m(k(x,t)u_{mtt}) + P_m(a(x,t)u_{mt}) + Au_m = f_m. \tag{5}$$

Поскольку u_m входят в (5) линейно и сами зависят от неизвестных u_{ls} и $\tilde{u}_{ls}$ линейным образом, путем приравнивания соответствующих коэффициентов в левой и правой частях (5) при базисных функциях пространства E_m получаем линейную систему алгебраических уравнений для определения этих неизвестных. Как нетрудно видеть, число неизвестных в этой системе равно числу уравнений, и ее безусловная разрешимость эквивалентна единственности ее решения. Докажем единственность решения системы (5) и получим необходимые априорные оценки приближенных решений u_m.

Предположим, что решение системы (5) существует, и рассмотрим равенство

$$(L_1 u_m, u_{mt})_0 = (f_m, u_{mt})_0.$$

Интегрируя по частям, используя свойства проектора P_m, условия теоремы и «ε-неравенство» Юнга, выводим равномерную по m оценку

$$\|u_{mt}\|_0 \leq C_1 \|f_m\|_0. \tag{6}$$

Далее рассмотрим равенство

$$(D_t L_1 u_m, u_{mtt})_0 = (f_{mt}, u_{mtt})_0.$$

Используя условия теоремы на коэффициенты (1), свойства P_m, «ε-неравенство» Юнга и оценку (6), в результате интегрирования по частям получаем неравенство

$$\|u_{mtt}\|_0 \leq C_2(\|f_m\|_0 + \|f_{mt}\|_0), \tag{7}$$

где C_2 не зависит от m.

Теперь перепишем (5) следующим образом:

$$Au_m = -P_m(ku_{mtt}) - P_m(au_{mt}) + f_m.$$

Используя полученные оценки (6), (7), ограниченность оператора P_m и известные неравенства для эллиптических операторов (см., например, [8, с. 468]), выводим равномерную по m оценку

$$\|u_m\|_{W^2_{2,x}(Q)} \leq C_3(\|f_m\|_0 + \|f_{mt}\|_0). \tag{8}$$

Наконец, путем интегрирования по частям в равенстве

$$(D_t L_1 u_m, u_{mt})_0 = (f_{mt}, u_{mt})_0$$

с использованием оценок (6), (7) приходим к неравенству

$$\|\nabla_x u_{mt}\|_0 \leq C_4(\|f_m\|_0 + \|f_{mt}\|_0), \tag{9}$$

где C_4 не зависит от m.

Теперь сложим найденные неравенства (6)–(9) и в итоге получим равномерную по m оценку

$$\|u_m\|_2 \leq C_5(\|f_m\|_0 + \|f_{mt}\|_0). \tag{10}$$

В силу эквивалентности норм в конечномерных пространствах оценка (10) гарантирует единственность решения системы (5), а значит, и ее разрешимость.

Кроме того, в силу условий на функцию $f(x,t)$ из оценки (10) следует, что для всех m

$$\|u_m\|_2 \le C_6. \tag{11}$$

Это означает, что существуют подпоследовательность $\{m_r\}_{r=1}^{\infty}$ и функция $u(x,t) \in W_2^2(Q)$ такие, что $u_{m_r} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} u$ слабо в $W_2^2(Q)$.

Теперь рассмотрим равенство

$$(L_1 u_{m_r}, \omega_p)_0 = (f_{m_r}, \omega_p)_0, \tag{12}$$

где $\omega_p(x,t)$ — базисная функция, а $m_r > p$.

Заметим, что в этом случае

$$(P_{m_r}(ku_{m_r tt} + au_{m_r t}), \omega_p)_0 = (ku_{m_r tt} + au_{m_r t}, \omega_p)_0,$$

и в равенстве (12) можно перейти к пределу при $r \to \infty$. Поскольку ω_p произвольна, это означает, что полученная функция $u(x,t) \in W_2^2(Q)$ является решением задачи Π_1 (краевые условия (2)–(4) либо (2)–(4$'$) удовлетворяются в силу очевидных соображений). Теорема доказана.

Замечание. В описанной ситуации множества S_0 и S_T как носители краевых условий равноправны, поэтому при выполнении всех остальных условий теорема единственности гладкого решения остается справедливой, если $2a+k_t \le -\delta < 0$ всюду в Q, а теорема существования справедлива, если $2a+|k_t| \le -\delta < 0$ всюду в Q. Для доказательства достаточно сделать замену $t = T - t'$.

Отметим также следующее обстоятельство: во всех цитированных работах [3–7] требуется так называемое условие «однородности входа и выхода», т. е. на множествах S_0 и S_T функции $k(x,0)$ и $k(x,T)$ не могут менять знак внутри области D. Тем самым из рассмотрения исключается важный для приложений класс уравнений типа уравнения Чаплыгина, главная часть которого имеет вид $k(x)u_{tt} - \Delta_x u$, где $k(x)$ — знакопеременная функция. Очевидно, что для уравнений такого типа задача Π_1 корректна в пространстве $W_2^2(Q)$ при выполнении соответствующих условий на младшие члены.

Обратимся теперь к другому важному классу неклассических уравнений. Рассмотрим в области Q уравнение

$$L_2 u \equiv k(x,t)u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + a(x,t)u = f(x,t), \tag{13}$$

где квадратичная форма, определяемая вторым слагаемым, обладает теми же свойствами, что и в случае уравнения (1), а функция $k(x,t)$ может менять знак произвольным образом.

Уравнение (13) включает в себя класс параболических уравнений с переменным направлением времени.

Отметим, что первая начально-краевая задача для модельных случаев уравнений с переменным направлением времени в случае $n = 1$ подробно изучена в [9]. Далее, например, в работах [10, 11] эти результаты были обобщены на многомерные уравнения и на дифференциально-операторные уравнения в банаховых пространствах. Нелокальные краевые задачи для (13) в случае не зависящих от t коэффициентов предложены в [12, 13]. Постановка этих задач соответствует подходам цитированных выше работ, случай t-периодической задачи не рассматривается. Этот случай является в некотором смысле предельным для рассмотренного в [12, 13] класса задач.

Что же касается периодических решений строго параболических уравнений, то здесь можно указать работу [14], где среди прочих более общих задач рассмотрена и периодическая задача для строго параболического уравнения с коэффициентами, не зависящими от t. Решение в этом случае выписано явно в виде некоторого ряда при выполнении довольно очевидных условий. В работе [15] при некоторых условиях доказано существование единственного классического периодического решения уравнения типа уравнения (13), при этом $k(x,t) \equiv 1$, а оператор, действующий по пространственным переменным, представляет собой эллиптический оператор общего вида второго порядка (вообще говоря, несамосопряженный) с коэффициентами, зависящими от x и t. На боковой поверхности S задавалось неоднородное условие Дирихле. Заметим, что в случае $k(x,t) \equiv 1$ условия однозначной разрешимости периодической задачи для уравнения (13) в нашей работе совпадают с теми условиями, которые требовались в [14, 15].

Как и ранее, будем предполагать, что коэффициенты уравнения (13) суть достаточно гладкие в $\overline{Q}$ функции и $k(x,0) = k(x,T)$ для всех $x \in D$. Как и выше, обозначим $\Gamma_0 = \{x \in D : k(x,0) = k(x,T) = 0\}$.

Задача Π_2**.** *Найти в* Q *решение уравнения* (13)*, удовлетворяющее краевому условию*

$$u|_{\overline{S_0 \setminus \Gamma_0}} = u|_{\overline{S_T \setminus \Gamma_0}} \tag{14}$$

и либо условию (4)*, либо условию* (4′)*.*

Теорема 2. *Пусть выполнены все вышеуказанные условия на коэффициенты уравнения* (13) *и всюду в* Q *выполнено неравенство*

$$2a(x,t) - k_t(x,t) \geq \delta > 0.$$

Тогда решение задачи Π_2 *единственно в пространстве* $W^{1,2}_{2t,x}(Q)$*.*

Пусть $f, f_t \in L^2(Q)$ *и* $f(x,0) = f(x,T)$ *для почти всех* $x \in D$*. Пусть наряду с вышеуказанными условиями на коэффициенты уравнения* (13) $a(x,0) = a(x,T)$ *для всех* $x \in D$*. Предположим также, что всюду в* Q *выполнено неравенство* $2a(x,t) - |k_t(x,t)| \geq \delta > 0$*. Тогда существует решение* $u(x,t) \in W^{1,2}_{2t,x}(Q)$ *задачи* Π_2 *и, более того,* $u(x,0) = u(x,T)$ *для почти всех* $x \in D$*.*

Доказательство. Пусть $u \in W^{1,2}_{2t,x}(Q)$ — решение однородной задачи Π_2. Рассмотрим равенство $(L_2u, u)_0 = 0$, проинтегрируем, где необходимо, по частям и используем условия теоремы и условия (14), (4) или (4′). В итоге получим $u \equiv 0$ п. в. в Q.

Доказательство существования решения дословно повторяет доказательство теоремы 1 с соответствующими очевидными изменениями.

Метод доказательства теорем 1 и 2 позволяет исследовать разрешимость следующей неклассической краевой задачи для уравнения (13).

Задача $\mathscr{D}$**.** *Найти в* Q *решение уравнения* (13)*, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u|_{S_0} = u|_{S_T} = 0 \tag{15}$$

и либо условию (4)*, либо условию* (4′)*.*

Ясно, что задача $\mathscr{D}$ переопределена. Тем не менее можно указать простое необходимое и достаточное условие разрешимости этой задачи в случае $k(x,0) = k(x,T) = 0$ для всех $x \in D$.

Теорема 3. *Пусть* $\Gamma_0 = D$. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2 *на коэффициенты уравнения* (13) *и на правую часть* $f(x,t)$. *Тогда для разрешимости задачи* $\mathscr{D}$ *в пространстве* $W^{1,2}_{2t,x}(Q)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $f(x,0) = f(x,T) = 0$ *для почти всех* $x \in D$.

Доказательство. Докажем необходимость указанного условия. Пусть задача $\mathscr{D}$ разрешима в указанном пространстве. Введем сначала ряд обозначений. Обозначим через $\widetilde{P}_m : L^2(Q) \to \widetilde{E}_m$ ортопроектор в $L_2(Q)$ на конечномерное пространство $\widetilde{E}_m$, которое строится точно так же, как и пространство E_m в доказательстве теоремы 1. Введем обозначение $J_m : L^2(D) \to H_m$, где J_m — ортопроектор в $L^2(D)$ на H_m — конечномерную линейную оболочку функций

$$\{\widetilde{\varphi}_s(x)\}_{s=0,1,\dots,m}.$$

Здесь $\widetilde{\varphi}_s(x)$ — собственные функции соответствующей эллиптической задачи. Пусть $[.,.]_0$ обозначает скалярное произведение в $L^2(D)$.

Заметим, что гладкое решение $u(x,t) \in W^{1,2}_{2t,x}(Q)$ задачи $\mathscr{D}$ является в то же время единственным гладким решением задачи Π_2 из этого пространства. В самом деле, $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (13) и необходимым краевым условиям. В силу теоремы единственности именно к этому решению сходятся приближенные решения u_m, полученные в результате процедуры, которая описана в доказательствах предыдущих теорем. Напомним, что все условия теоремы 2 на коэффициенты и правую часть (13) предполагаются выполненными. Рассмотрим равенство

$$\widetilde{P}_m(ku_{mt}) + \widetilde{A}u_m + \widetilde{P}_m(au_m) = \widetilde{P}_m f,$$

где

$$\widetilde{A}u \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{xi})_{xj}.$$

Ранее доказано, что при выполнении условий теоремы 2 $u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ слабо в $W^{1,2}_{2t,x}(Q)$ на некоторой подпоследовательности, за которой оставлен первоначальный индекс. Поскольку в указанное равенство входят гладкие функции, можно рассмотреть след этого равенства на множестве S_0.

Имеем

$$(\widetilde{P}_m(ku_{mt}))|_{S_0} + \widetilde{A}u_m|_{S_0} + (\widetilde{P}_m(au_m))|_{S_0} = (\widetilde{P}_m f)|_{S_0}.$$

Рассмотрим теперь скалярное произведение

$$[(\widetilde{P}_m(ku_{mt}))|_{S_0}, \widetilde{\varphi}_s]_0 + [\widetilde{A}u_m|_{S_0}, \widetilde{\varphi}_s]_0 + [(\widetilde{P}_m(au_m))|_{S_0}, \widetilde{\varphi}_s]_0 = [(\widetilde{P}_m f)|_{S_0}, \widetilde{\varphi}_s]_0, \quad (16)$$

где $s \geq 0$ произвольно, но фиксировано.

Заметим, что для любой функции $z(x,t) \in L^2(Q)$ такой, что $z_t \in L^2(Q)$ и $z|_{S_0} = z|_{S_T}$, имеет место равенство

$$(\widetilde{P}_m z)|_{S_0} = J_m(z|_{S_0}).$$

Для доказательства этого нужно представить $z(x,t)$ в виде сходящегося в $W^{1,2}_{2t,x}(Q)$ ряда

$$z(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} z_{ls}\sin\frac{2\pi lt}{T}\widetilde{\varphi}_s(x) + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \tilde{z}_{ls}\cos\frac{2\pi lt}{T}\widetilde{\varphi}_s(x)$$

и вычислить значения левой и правой частей указанного равенства. Учитывая это обстоятельство и самосопряженность оператора $\widetilde{A}$, перепишем (16) следующим образом

$$[J_m(ku_{mt}|_{S_0}), \widetilde{\varphi}_s]_0 + [u_m|_{S_0}, \widetilde{A}\widetilde{\varphi}_s]_0 + [J_m(au_m|_{S_0}), \widetilde{\varphi}_s]_0 = [J_m(f|_{S_0}), \widetilde{\varphi}_s]_0.$$

Поскольку J_m — проектор, при $m > s$ получаем, что

$$[J_m(ku_{mt}|_{S_0}), \widetilde{\varphi}_s]_0 = [(ku_{mt})|_{S_0}, \widetilde{\varphi}_s]_0 = 0$$

в силу того, что u_{mt} — гладкая функция, след $ku_{mt}|_{S_0}$ существует в $L^2(D)$, а $k(x,0) \equiv 0$. Далее при $m > s$ имеем

$$[u_m|_{S_0}, \widetilde{A}\widetilde{\varphi}_s]_0 + [J_m(au_m|_{S_0}), \widetilde{\varphi}_s]_0 = \tilde{\lambda}_s^2[u_m|_{S_0}, \widetilde{\varphi}_s]_0 + [u_m|_{S_0}, a(x,0)\widetilde{\varphi}_s]_0 = [f|_{S_0}, \widetilde{\varphi}_s]_0. \quad (17)$$

Так как $D_t^j u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} D_t^j u$ при $j = 0,1$ слабо в $L^2(Q)$, то $u_m|_{S_0} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u|_{S_0}$ в $L^2(D)$, а $u|_{S_0} = 0$ ввиду условия теоремы. Перейдем теперь к пределу в равенстве (17) при $m \to \infty$ и в итоге получим, что $[f|_{S_0},\ \widetilde{\varphi}_s]_0 = 0$. В силу произвольности s выводим, что $f|_{S_0}$ ортогональна полной в $L^2(D)$ системе собственных функций соответствующей эллиптической задачи, а значит, $f(x,0) = 0$ п. в. в D.

Аналогично доказывается, что $f|_{S_T} = 0$.

Перейдем к доказательству достаточности.

Рассмотрим систему алгебраических уравнений, аналогичную системе (5):

$$L_3 u_m \equiv \widetilde{P}_m(ku_{mt}) - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{mx_i})_{x_j} + \widetilde{P}_m(au_m) = \widetilde{P}_m f, \quad (18)$$

где ортопроектор $\widetilde{P}_m$ введен при доказательстве необходимости обозначенного условия.

Функции $u_m(x,t)$ ищутся в данном случае в виде

$$u_m(x,t) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{m} v_{ls} \sin\frac{2\pi lt}{T}\widetilde{\varphi}_s(x).$$

Напомним, что здесь $\widetilde{\varphi}_s(x)$, $s = 0,1,\ldots,$ — собственные функции соответствующей эллиптической задачи.

Вследствие условия на $f(x,t)$ правая часть (18) есть

$$\widetilde{P}_m f = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{m} f_{ls} \sin\frac{2\pi lt}{T}\widetilde{\varphi}_s(x).$$

В силу условия $\Gamma_0 = D$ и способа построения u_m в разложение ku_{mt} и au_m по базису входят лишь функции вида

$$\sin\frac{2\pi lt}{T}\widetilde{\varphi}_s(x).$$

Таким образом, число неизвестных v_{ls} в системе (18) равно числу уравнений, и можно применить схему доказательства теорем 1 и 2.

Наконец, в случае $\Gamma_0 = D$, пользуясь полученными результатами, можно рассмотреть следующую обратную задачу для уравнения (13).

Обратная задача. *Найти пару функций* $(u(x,t), h(x))$, *удовлетворяющую уравнению*

$$L_2 u = f_1(x,t)h(x) + f_2(x,t) \tag{19}$$

и краевым условиям (15), (4) *либо* (15), (4′). *Здесь* $f_1(x,t)$ *и* $f_2(x,t)$ — *заданные функции.*

Теорема 4. *Пусть* $\Gamma_0 = D$. *Пусть* $f_i, f_{it} \in L^4(Q)$ *и* $f_i(x,0) = f_i(x,T)$ *для почти всех* $x \in D$, $i = 1, 2$. *Предположим также, что* $|f_1(x,0)| = |f_1(x,T)| \geq \delta > 0$ *для почти всех* $x \in D$. *Пусть также выполнены все условия теоремы* 2 *на коэффициенты уравнения* (19).

Тогда существует единственное решение $(u(x,t),\ h(x)) \in W^{1,2}_{2t,x}(Q) \times L^4(D)$ *обратной задачи* (19), (15), (4) (*либо* (19), (15), (4′)).

Доказательство. Положим

$$h(x) = -\frac{f_2(x,T)}{f_1(x,T)} = -\frac{f_2(x,0)}{f_1(x,0)}.$$

Тогда ясно, что правая часть уравнения (19) $g(x,t) = f_1(x,t)h(x) + f_2(x,t)$ удовлетворяет достаточному условию разрешимости прямой задачи, и функция $u(x,t) \in W^{1,2}_{2t,x}(Q)$ находится как решение этой прямой задачи.

Единственность полученного решения очевидна, поскольку, если решение задачи (19), (15), (4) либо (4′) существует, то в силу условий теоремы функция $h(x)$ не может иметь иного вида, кроме предъявленного выше. А если $h(x)$ определяется однозначно, то в силу теоремы единственности решения прямой задачи функция $u(x,t)$ также единственна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
2. *Кузьмин А. Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990.
3. *Терехов А. Н.* Нелокальные краевые задачи для уравнений переменного типа // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1985. С. 148–158.
4. *Глазатов С. Н.* Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 6. С. 162–164.
5. *Глазатов С. Н.* Гладкие решения нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа. I // Актуальные проблемы современной математики. Новосибирск: НИИ МИОО НГУ, 1997. Т. 3. С. 46–52.
6. *Каратопраклиев Г. Д.* Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 78–84.
7. *Каратопраклиев Г. Д.* Об одной нелокальной краевой задаче для эллиптико-параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 5. С. 902–904.
8. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
9. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
10. *Пятков С. Г.* О разрешимости одной краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 6. С. 1327–1329.
11. *Кислов Н. В.* Неоднородные краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений смешанного типа и их приложения // Мат. сб. 1984. Т. 125, № 1. С. 19–37.
12. *Egorov I. E.* On strong solvability of a nonlocal boundary value problem for an equation with variable time direction // Мат. заметки ЯГУ. 1994. Т. 1, № 2. С. 70–74.
13. *Egorov I. E.* On smoothness of a solution to a nonlocal boundary value problem for an operator-differential equation with variable time direction // Мат. заметки ЯГУ. 1995. Т. 2, № 1. С. 98–104.

14. *Дубинский Ю. А.* О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка // Мат. сб. 1973. Т. 90, № 1. С. 3–22.

15. *Шмулев И. И.* Периодические решения первой краевой задачи для параболических уравнений // Мат. сб. 1965. Т. 66, № 3. С. 398–410.

Статья поступила 21 апреля 2000 г., окончательный вариант — 20 апреля 2001 г.

Глазатов Сергей Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
glaz@math.nsc.ru