Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 517.53

ОЦЕНКА НА КРИВЫХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ

А. М. Гайсин, Т. И. Белоус

Аннотация: Исследуется максимальный член адамаровской композиции рядов Дирихле с вещественными показателями. Для суммы ряда Дирихле получена оценка снизу на кривой, произвольным образом приближающейся к прямой сходимости.

Ключевые слова: ряд Дирихле, максимальный член, адамаровская композиция, асимптотика на кривых

Настоящая работа является продолжением нашей статьи [1] и посвящена применению ее результатов к конкретным задачам.

Суть обсуждаемых здесь задач следующая. Пусть $0 < p_n \uparrow \infty$ $(p_n \in \mathbb{N})$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n} \tag{1}$$

— лакунарный степенной ряд, область сходимости которого есть единичный круг $D(0,1) = \{z : |z| < 1\}$, а γ — некоторая кривая, начинающаяся в $D(0,1)$ и оканчивающаяся на границе $D(0,1)$ или асимптотически приближающаяся (например, по спирали) к ней. Спрашивается, при каких условиях на последовательность $\{p_n\}$, а может быть, и на саму функцию $f(z)$ найдется хотя бы одна последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in \gamma$, $|\xi_n| \to 1$, такая, что

$$\ln M(|\xi_n|; f) = (1 + o(1)) \ln |f(\xi_n)| \tag{2}$$

при $|\xi_n| \to 1$, где $M(r; f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ $(0 < r < 1)$?

Отметим, что подобная задача для целых функций конечного порядка, имеющих вид (1), впервые рассматривалась в известной работе Г. Пойа [2], в которой помимо доказательств фундаментальных теорем об асимптотических свойствах целых функций, заданных рядами (1), был поставлен ряд задач. Так возникла приведенная выше довольно сложная задача о целых функциях вида (1), имеющих произвольный рост, которой были в дальнейшем посвящены многочисленные исследования. В [3–9], а также в ряде других работ (обзоры см., например, в [6, 8, 9]) даны достаточные условия, при выполнении которых справедливо равенство (2). Но все эти результаты были далеки от окончательных. Только в работе [10] было получено полное решение данной проблемы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00655).

Цель настоящей статьи — перенести основные результаты работы [10] на ряды Дирихле с вещественными показателями, сходящиеся лишь в полуплоскости. Нами будут установлены оценки как роста, так и убывания суммы ряда Дирихле на кривых, примыкающих к прямой сходимости.

Приведем необходимые в дальнейшем определения и обозначения, сохранив все обозначения из [1].

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность

$$D = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n}.$$

Хорошо известно, что в этом случае

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \tag{3}$$

— целая функция экспоненциального типа (см., например, [11]).

Пусть, как и ранее, $D_c(\Lambda)$ — класс всех функций F, представимых в полуплоскости $\Pi_c = \{s : \operatorname{Re} s < c\}$ $(-\infty < c \le \infty)$ рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{4}$$

сходящимися лишь в данной полуплоскости.

Введем в рассмотрение измененный ряд Дирихле

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(\lambda_n) e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{5}$$

где a_n — коэффициенты ряда (4), а $Q(z)$ — функция, определенная формулой (3). Если последовательность Λ имеет нулевую плотность, то $Q(z)$ (а следовательно, и $Q'(z)$) растет не быстрее целой функции первого порядка и минимального типа. Значит, ряд (5) сходится (причем абсолютно и равномерно) по крайней мере в той же полуплоскости Π_c, что и ряд (4). Если и индекс конденсации последовательности Λ (определение см., например, в [11]) равен нулю, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln|Q'(\lambda_n)|}{\lambda_n} = 0,$$

и области сходимости рядов (4), (5) равны Π_c [11].

Пусть $\mu(\sigma)$ и $\mu^*(\sigma)$ — максимальные члены рядов (4), (5) соответственно. Как и ранее, пусть L — класс всех непрерывных неограниченно возрастающих на $[0, \infty)$ функций, а

$$W = \left\{ w \in L : \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2}\, dx < \infty \right\}.$$

Напомним, что если φ — некоторая фиксированная функция из L, то

$$\underline{W}_{\varphi} = \{w \in W : \underline{\lim_{t\to\infty}} \varphi(t) J(t; w) = 0\},$$

где

$$J(t; w) = \int_t^{\infty} \frac{w(x)}{x^2}\, dx.$$

Введем также множество $W_\varphi = \{w \in W : \lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t)J(t;w) = 0\} \subset \underline{W}_\varphi$.

Пусть $u = u(\sigma)$ — непрерывная неубывающая на $[-1, 0)$ функция, $u(\sigma) \to \infty$ при $\sigma \to 0-$, а $h = h(\sigma)$ — некоторая неотрицательная непрерывная на $[-1, 0)$ функция такая, что $h(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0-$, причем $\sigma^{-1}h(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0-$. Если $E_\beta \subset [-1, 0)$ — исключительное множество, вне которого при $\sigma \to 0-$ выполняется асимптотическое равенство

$$u(\sigma + (1 + \beta^{-1})h(\sigma)) = u(\sigma) + o(1)$$

$(0 < \beta < \infty)$, то множество $[-1, 0) \setminus E_\beta$ будем называть *β-асимптотическим множеством* для пары функций (u, h). Через $e_\beta = \{e_\alpha(\beta)\}$ обозначим β-асимптотическое семейство для этой пары функций, состоящее из всех ее β-асимптотических множеств $e_\alpha(\beta)$.

В дальнейшем будем предполагать, что область сходимости ряда (4) есть полуплоскость Π_o. Через $\Gamma = \{\gamma\}$ обозначим семейство всех кривых γ из полуплоскости Π_o, предельные точки которых принадлежат мнимой оси. Будем считать, что Γ содержит и те кривые γ, которые обладают свойством: если $s \in \gamma$ и $\operatorname{Re} s \to 0-$, то $|s| \to \infty$.

Говорят, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ *имеет лакуны Фейера*, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty. \tag{6}$$

Обычно выполнение этого условия требуется в тех случаях, когда необходимо получить оценку глобальной характеристики роста ряда (4) (например, максимального члена) через его максимум модуля на отрезках прямых (или кривых) вблизи границы области регулярности функции $F \in D_c(\Lambda)$ $(-\infty < c \le \infty)$. Но в общей ситуации и условия (6) недостаточно для получения подобных оценок даже в случае, когда $F \in D_\infty(\Lambda)$ [10]. Однако в этом случае в [10] получены неулучшаемые (более сильные, чем (6)) условия на последовательность Λ, при выполнении которых для функций $F \in D_\infty(\Lambda)$ имеют место точные оценки роста, а также убывания на кривых, определенным образом уходящих в бесконечность. Самое главное то, что при этом никаких ограничений на рост максимального члена $\mu(\sigma)$ не требуется.

Ситуация резко меняется, если $F \in D_o(\Lambda)$. В этом случае возникают специфические трудности, связанные с оценкой размеров исключительных множеств $e \subset [-1, 0)$. Поэтому в случае полуплоскости (или единичного круга для рядов (1)) поступают следующим образом. Фиксируется некоторая функция $\Phi \in L$ и выделяется некоторый подкласс функций $F \in D_o(\Lambda)$, удовлетворяющих, например, условию [12, 13]

$$\varliminf_{\sigma\to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0$$

(здесь $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда (4)). Тогда переменная относительная плотность

$$\Delta(\sigma) = \frac{m(e \cap [\sigma, 0))}{\sigma}$$

исключительного множества $e \subset [-1, 0)$, вне которого для функции F справедливы интересующие нас оценки, зависит только от поведения величины

$$\varphi(t) \int\limits_t^{\infty} \frac{w(x)}{x^2}\, dx,$$

где φ — функция, обратная к Φ, а $w = w(x)$ — некоторая функция распределения последовательности Λ [12]. Если, например, $w \in \underline{W}_{\varphi}$ и $\varphi(x)w(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, то, оказывается, нижняя плотность de множества e равна нулю (если $w \in W_{\varphi}$, то плотность De равна нулю) [12].

Теперь перейдем к точным формулировкам результатов статьи.

Пусть φ — некоторая функция из L, $B = \{b_n\}$ — последовательность комплексных чисел b_n ($b_n \neq 0$ при $n \geq N$), $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — последовательность показателей ряда (4). Будем говорить, что последовательности B и Λ *φ-согласованы*, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\lambda_n)\ln|b_n|}{\lambda_n} = 0. \tag{7}$$

В этом случае говорим, что *пара* (B, Λ) *φ-согласована.* Будем говорить, что *две функции φ и w из класса L согласованы*, если $\varphi(x)w(x) = o(x)$ при $x \to \infty$.

Пусть $\varphi \in L$, Q — функция (3), причем функция $w(x) = \ln M(ex; Q)$ принадлежит классу $\underline{W}_{\varphi}$. Если функции φ и w согласованы, то существует функция $w^* \in \underline{W}_{\varphi}$, также согласованная с φ, причем такая, что $w^*(t) = \beta(t)w(t)$, $0 < \beta(t) \uparrow \infty$ [12, 13]. Поскольку $\underline{W}_{\varphi} \subset W$, то для принадлежности функции $\ln M(x; Q)$ классу $\underline{W}_{\varphi}$ выполнение условия (6) необходимо [11].

Через $v = v(\sigma)$ обозначим решение уравнения

$$3\ln\mu(\sigma) = w^*(v), \tag{8}$$

где $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда (4) Пусть $\nu(\sigma)$ — центральный индекс ряда (4), а $k(\sigma)$, $\mu^*(\sigma)$ — центральный индекс и максимальный член ряда (5). Через $e_\beta = \{e_\alpha(\beta)\}$ обозначим такое β-асимптотическое семейство для пары функций (u, h), $u(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln\mu(\sigma)$, $h = h(\sigma) = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}$ ($v = v(\sigma)$ — решение уравнения (8)), что если $e_\alpha(\beta) \in e_\beta$ и $\sigma \in e_\beta$, то $\lambda_{k(\sigma)} \leq \lambda_{\nu(\sigma)}$.

В этих обозначениях имеет место

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in L$, $w \in \underline{W}_{\varphi}$, где $w(x) = \ln M(ex; Q)$, а Q — функция, определенная формулой (3). Если функции φ и w согласованы, причем для функции $m(\sigma) = \min(\mu^*(\sigma), \mu(\sigma))$ выполняется условие*

$$\varliminf_{\sigma\to 0-} \frac{\ln m(\sigma)}{\Phi(\frac{1}{|\sigma|})} > 0 \tag{9}$$

(Φ — функция, обратная к φ), то для функции $F \in D_o(\Lambda)$ справедлива оценка

$$q(F) \leq d(F). \tag{10}$$

Здесь

$$d(F) = \inf_{\gamma\in\Gamma} d(F;\gamma),$$

$$d(F;\gamma) = \varlimsup_{s\in\gamma, \operatorname{Re}s\to 0-} \frac{\ln|F(s)|}{\ln M(\operatorname{Re}s)}, \quad M(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|,$$

$$q(F) = \inf_{0<\beta\leq\frac{1}{5}} \sup_{\alpha} \varlimsup_{\sigma\in e_\alpha(\beta),\, \sigma\to 0-} \frac{\ln\mu^*(\sigma)}{\ln\mu(\sigma)}.$$

Замечание. В условиях теоремы 1 семейство $e_\beta = \{e_\alpha(\beta)\}$ для каждого β ($0 < \beta < \infty$) непусто. При этом каждое $e_\alpha(\beta)$ получается выкидыванием из $[-1, 0)$ некоторого исключительного множества E_β нулевой нижней плотности.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in L$, $w \in W_\varphi$, *где* $w(x) = \ln M(ex; Q)$, *а* Q — *функция, определенная формулой* (3). *Если для функции* $m(\sigma) = \min(\mu^*(\sigma), \mu(\sigma))$ *выполняется условие*

$$\varlimsup_{\sigma \to 0-} \frac{\ln m(\sigma)}{\Phi(\frac{1}{|\sigma|})} > 0 \tag{11}$$

(Φ — *функция, обратная к* φ), *то для функции* $F \in D_o(\Lambda)$ *имеет место оценка* (10).

Следствие. *Для любой функции* $F \in D_o(\Lambda)$, *удовлетворяющей условиям теоремы* 1 *или* 2, *имеют место оценки*

$$0 \le d(F) \le 1. \tag{12}$$

Точность правой границы в оценках (12) устанавливается следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *или* 2, *причем оценки* (9) *или* (11) *имеют место для функции* $\ln \mu(\sigma)$.

Если для некоторой функции $\psi \in W_\varphi$

$$-\ln|Q'(\lambda_n)| \le \psi(\lambda_n) \qquad (n \ge 1), \tag{13}$$

то $d(F) = 1$.

Отметим, что для функций $F \in D_o(\Lambda)$ более слабый вариант теоремы 3 доказан в работе [12]. Что касается условий теоремы 3, то они аналогичны необходимым и достаточным условиям соответствующей теоремы из [10] и кажутся нам оптимальными. Но, однако, этот вопрос, как и точность левой границы в оценках (12), в случае полуплоскости далеко не простой и пока остается открытым.

Оценки (12) устанавливают связь между ростом и убыванием функций $F \in D_o(\Lambda)$ на каждой кривой $\gamma \in \Gamma$. Действительно, из оценки $0 \le d(F; \gamma)$ следует, что существуют функция $\varepsilon(r)$, $\varepsilon(r) \downarrow 0$ при $r \to 0+$, и последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in \gamma$, такие, что при $\operatorname{Re}\xi_n \to 0-$

$$\ln|F(\xi_n)| > -\varepsilon(|\operatorname{Re}\xi_n|)\ln M(\operatorname{Re}\xi_n). \tag{14}$$

При условии (6) точно такая же оценка для функций $F \in D_\infty(\Lambda)$ установлена в [10] (в этом случае $\operatorname{Re}\xi_n \to +\infty$). Соответствующая (более грубая) оценка для произвольных целых функций f на фиксированном луче была установлена А. Берлингом в работе [14]: для любых $\varepsilon > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ (θ фиксировано) множество

$$\{r \in (0, \infty) : \ln|f(re^{i\theta})| > -(1+\varepsilon)\ln M(r; f)\}$$

неограниченное.

В. К. Хейман в работе [15] рассмотрел аналогичную задачу в случае, когда вместо луча берется произвольная кривая, уходящая в бесконечность. Он показал, что если нижний порядок целой функции f конечен, то на всякой кривой γ, уходящей в бесконечность, для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{z_n\}$, $z_n \in \gamma$, $z_n \to \infty$, такая, что

$$\ln|f(z_n)| > -(1+\varepsilon)\ln M(|z_n|; f).$$

Смысл оценки (14) заключается в том, что в условиях теорем 1 или 2 сумма F ряда Дирихле (4) не может сколь угодно быстро убывать на любой последовательности точек $\{\xi_n\}$, стремящейся к мнимой оси вдоль любой кривой $\gamma \in \Gamma$.

Из теорем 1–3 легко получаются аналогичные утверждения для аналитических функций f, заданных в единичном круге $D(0,1)$ степенными рядами (1). Чтобы убедиться в этом, необходимо сделать замену $z = e^s$. Только следует иметь в виду, что при такой замене исключительные множества $E \subset [-1,0)$ нулевой плотности (нижней плотности) переходят в исключительные множества $e \subset [-1,0)$ нулевой логарифмической (нижней логарифмической) плотности. Это делается точно так же, как и в работе [12], поэтому формулировок соответствующих результатов для круга $D(0,1)$ здесь не приводим.

§ 1. Вспомогательные факты

Сформулируем и докажем ряд вспомогательных утверждений, необходимых нам в дальнейшем.

Доказательства основных теорем статьи основаны на лемме типа Бореля — Неванлинны, доказанной нами в работе [1]. Приведем ее формулировку и замечание к ней.

Лемма 1. *Пусть $u(t)$ — непрерывная, неубывающая на $[-1,0)$ функция, $u(t) \to \infty$ при $t \to 0-$. Пусть $w \in W$, а $v = v(t)$ — решение уравнения*

$$w(v) = e^{u(t)}. \tag{15}$$

Если

$$\frac{w(v(t))}{|t|v(t)} = o(1), \quad t \to 0-, \tag{16}$$

а для некоторой последовательности $\{\tau_j\}$ $(\tau_j \uparrow 0)$

$$\lim_{\tau_j \to 0-} \frac{1}{|\tau_j|} J(v_j; w) = 0, \quad v_j = v(\tau_j), \tag{17}$$

то при $t \to 0-$ вне некоторого множества $e \subset [-1,0)$, $m(e \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$, $\tau_j \to 0-$, имеет место асимптотическое равенство

$$u\left(t + \frac{w(v(t))}{v(t)}\right) = u(t) + o(1).$$

Замечание. При доказательстве леммы 1 в [1] доказано, что при $\sigma \to 0-$

$$\frac{m(e \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|} \le o(1) + \frac{4}{|\sigma|} J(v; w),$$

где $v = v(\sigma)$, а

$$J(v; w) = \int_v^\infty \frac{w(x)}{x^2}\, dx.$$

При доказательстве теорем существенно будут использованы утверждения типа теоремы 2 из [1] о $B(d)$-устойчивости максимального члена ряда (4).

Напомним определение. Пусть $B = \{b_n\}$ — последовательность комплексных чисел b_n ($b_n \neq 0$ при $n \geq N$), удовлетворяющая условию

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln |b_n|}{\lambda_n} = 0.$$

Говорят, что максимальный член $\mu(\sigma)$ ряда (4) $B(d)$-*устойчив*, если при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e \subset [-1, 0)$ нулевой нижней плотности de имеет место асимптотическое равенство

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma),$$

где $\mu^*(\sigma)$ — максимальный член измененного ряда Дирихле

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s}. \tag{18}$$

Лемма 2. *Пусть Φ — некоторая фиксированная функция из класса L, а φ — обратная к Φ функция. Предположим, что пара (B, Λ) φ-согласована, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\lambda_n) \ln |b_n|}{\lambda_n} = 0, \tag{19}$$

а для максимального члена $\mu(\sigma)$ ряда (4) выполняется условие

$$\underline{\lim}_{\sigma\to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi\big(\frac{1}{|\sigma|}\big)} > 0. \tag{20}$$

Если для некоторой функции $w \in \underline{W}_{\varphi}$ последовательность $B = \{b_n\}$ удовлетворяет оценкам

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \le e^{w(\lambda_n)} \quad (n \ge N), \tag{21}$$

то максимальный член $\mu(\sigma)$ $B(d)$-устойчив.

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 2 из [1], но с некоторыми уточнениями.

Пусть выполняются условия (19) и (21). Тогда существует функция $w^* \in \underline{W}_{\varphi}$ такая, что $w(x) = o(w^*(x))$, $w^*(x)\varphi(x) = o(x)$ при $x \to \infty$ [12].

Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v) = 2 \ln \mu(\sigma). \tag{22}$$

Ясно, что $v(\sigma) \uparrow \infty$ при $\sigma \uparrow 0$. Поскольку $w^* \in \underline{W}_{\varphi}$, найдется последовательность $\{\tau_j\}$ $(\tau_j \uparrow 0)$ такая, что

$$\lim_{v_j\to\infty} \varphi(v_j) J(v_j; w^*) = 0, \tag{23}$$

где $v_j = v(\tau_j) \to \infty$ $(\tau_j \to 0-)$,

$$J(v_j; w^*) = \int_{v_j}^{\infty} \frac{w^*(x)}{x^2}\, dx.$$

Уравнение (22) запишем в виде

$$w^*(v) = e^{u(\sigma)}, \quad u(\sigma) = \ln 2 + \ln\ln \mu(\sigma). \tag{24}$$

Далее, из условия (20), учитывая (24), имеем

$$w^*(v(\sigma)) = 2 \ln \mu(\sigma) > \varepsilon_o \Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right) \quad (\varepsilon_o > 0, \;\; \sigma' < \sigma < 0).$$

Но поскольку $w^*(x)=o(x)$ при $x\to\infty$, отсюда получаем, что

$$\frac{1}{|\sigma|}<\varphi(\varepsilon_o^{-1}w^*(v))<\varphi(v), \tag{25}$$

где $v=v(\sigma)$, $\sigma'<\sigma''<\sigma<0$. Последняя оценка, в частности, верна для $\sigma=\tau_j$ $(j\geq j')$. Так что из (23)–(25) видим, что условия (15), (17) леммы 1 выполнены. Кроме того, из (25) следует, что

$$0<\frac{w^*(v(\sigma))}{|\sigma|v(\sigma)}<\frac{\varphi(v(\sigma))w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}\to 0$$

при $\sigma\to 0-$. Значит, условие (16) также имеет место. Поэтому, применяя лемму 1, при $\sigma\to 0-$ вне некоторого множества $e_1\subset[-1,0)$, $m(e_1\cap[\tau_j,0))=o(|\tau_j|)$ $(\tau_j\to 0-)$ выводим, что

$$\mu(\sigma+h)<\mu(\sigma)^{(1+o(1))},\quad h=\frac{w^*(v)}{v},\quad v=v(\sigma). \tag{26}$$

Но из условий (21), (22), (26) в [1] вытекает, что при $\sigma\to 0-$ вне $e_1\subset[-1,0)$

$$(1+o(1))\ln\mu(\sigma)\leq\ln\mu^*(\sigma). \tag{27}$$

С другой стороны, поскольку $|b_n|\leq e^{w(\lambda_n)}$ $(n\geq 1)$, то

$$\mu^*(\sigma)=|a_k||b_k|e^{\lambda_k\sigma}\leq\mu(\sigma)e^{w(\lambda_k)}, \tag{28}$$

где $k=k(\sigma)$ — центральный индекс ряда (18).

Пусть $x=x(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(x)=3\ln\mu^*(\sigma). \tag{29}$$

Из (27) при $\sigma\in[\sigma_1,0)\backslash e_1$ имеем

$$\ln\mu(\sigma)<\frac{3}{2}\ln\mu^*(\sigma).$$

Если для некоторой подпоследовательности $\{\tau_{j_n}\}$ последовательности $\{\tau_j\}$ имеют место оценки $\ln\mu(\tau_{j_n})<\frac{3}{2}\ln\mu^*(\tau_{j_n})$, то, учитывая (22), (29), получаем, что для всех $n\geq 1$

$$2\ln\mu(\tau_{j_n})=w^*(v(\tau_{j_n}))<3\ln\mu^*(\tau_{j_n})=w^*(x(\tau_{j_n})),$$

если j_1 достаточно большое. Следовательно, $v(\tau_{j_n})<x(\tau_{j_n})$ $(n\geq 1)$. Но тогда с учетом (23), (25) находим, что при $\tau_{j_n}\to 0-$

$$\frac{1}{|\tau_{j_n}|}J(x(\tau_{j_n});w^*)<\varphi(v(\tau_{j_n}))J(v(\tau_{j_n});w^*)=o(1).$$

Используя это, применим лемму 1 к функции $u(\sigma)=\ln 3+\ln\ln\mu^*(\sigma)$. Тогда при $\sigma\to 0-$ вне некоторого множества $e_2\subset[-1,0)$, $m(e_2\cap[\tau_{j_n},0))=o(|\tau_{j_n}|)$, $\tau_{j_n}\to 0-$, получаем оценку

$$\mu^*(\sigma+h^*)<\mu^*(\sigma)^{1+o(1)},\quad h^*=\frac{w^*(x)}{x},\quad x=x(\sigma). \tag{30}$$

Пусть теперь $\frac{3}{2}\ln\mu^*(\tau_j)\leq\ln\mu(\tau_j)$ для любого τ_j $(j\geq j_1)$. Тогда рассмотрим множество $A_j=\{x: x\geq\tau_j,\ \ln\mu(\tau_j)<\frac{3}{2}\ln\mu^*(x)\}$ $(j\geq j_1)$. Если $x_j=\inf\{x:$

$x \in A_j\}$, то $v(\tau_j) = x(x_j)$, $x_j = (1 + o(1))\tau_j$ при $\tau_j \to 0-$ [1]. Следовательно, учитывая (23), (25), при $x_j \to 0-$ имеем

$$\frac{1}{|x_j|} J(x(x_j); w^*) = \frac{1}{(1 + o(1))|\tau_j|} J(v(\tau_j); w^*) \to 0.$$

Отсюда, применяя лемму 1 к функции $u(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln \mu^*(\sigma)$, при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e_3 \subset [-1, 0)$, $m(e_3 \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$, $\tau_j \to 0-$ опять приходим к оценке (30). Но тогда при $\sigma \to 0-$ вне множества $e_4 = e_2 \cup e_3$, $m(e_4 \cap [\tau_{j_n}, 0)) = o(|\tau_{j_n}|)$, $\tau_{j_n} \to 0-$ [1]

$$(1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma) \le \ln \mu(\sigma). \tag{31}$$

Из оценок (27), (31) при $\sigma \to 0-$ вне множества $e = e_1 \cup e_4$, $m(e \cap [\tau_{j_n}; 0)) = o(|\tau_{j_n}|)$, $\tau_{j_n} \to 0-$, окончательно получаем, что

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma). \tag{32}$$

Таким образом, максимальный член $\mu(\sigma)$ $B(d)$-устойчив, и лемма 2 доказана.

Замечание. Лемма 2 представляет собой более сильный вариант достаточной части теоремы 2 из [1]. Действительно, в лемме 2 функция Φ принадлежит более широкому классу L, а в теореме 2 $\Phi \in M$, где M — класс функций Φ из L таких, что $x\Phi(x) < \Phi(kx)$ при $x \ge x_o$ (k — некоторая постоянная). Последняя оценка означает, что функции из класса M растут быстрее любой степени. Далее, в теореме 2 вместо условия (20) требуется выполнение оценки

$$\varliminf_{\sigma \to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{|\sigma|\Phi\left(\frac{\tau}{|\sigma|}\right)} > 0 \quad (\tau > 0). \tag{33}$$

Но поскольку $\Phi \in M$, отсюда следует, что

$$\varliminf_{\sigma \to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi_1\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0,$$

где $\Phi_1(x) = \Phi(qx)$ $(q < \tau)$. Так как $\varphi_1(t) = q^{-1}\varphi(t)$ (φ_1, φ — функции, обратные к Φ_1 и Φ соответственно), видим, что условия теоремы 2 более ограничительны, чем условия леммы 2. Это объясняется тем, что теорема 2 носит необходимый и достаточный характер. Именно для доказательства необходимости теоремы 2 были введены класс M и условие (33).

Лемма 3. *Пусть Φ — некоторая фиксированная функция из класса L, а φ — обратная к ней. Предположим, что пара (B, Λ) φ-согласована, а для максимального члена ряда (4) выполняется условие*

$$\varlimsup_{\sigma \to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0. \tag{34}$$

Если для некоторой функции $w \in W_\varphi$ последовательность $B = \{b_n\}$ удовлетворяет оценкам (21), то максимальный член ряда $\mu(\sigma)$ $B(d)$-устойчив.

Доказательство почти ничем не отличается от доказательства леммы 2. Разница лишь в том, что в этом случае равенство (32) будет иметь место вне некоторого исключительного множества $e \subset [-1, 0)$, $m(e \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$ при $\tau_j \to 0-$, где выбор последовательности $\{\tau_j\}$ диктуется условием (34), а не условием (23), как в лемме 2.

Аналогичная ситуация рассматривалась в работе [12].

Лемма 4 (теорема о двух константах). *Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании, а на границе области D для функции $f(z)$ имеют место оценки*

$$|f(z)| \le M \quad (z \in \partial D), \quad |f(z)| \le m \quad (z \in E),$$

где E — некоторое подмножество границы области D, а m и M $(m \le M)$ — некоторые положительные постоянные. Тогда

$$|f(z)| \le m^{\gamma(z)} M^{1-\gamma(z)} \quad (z \in D),$$

где $\gamma(z) = w(z; E, D)$ — гармоническая мера множества E относительно области D.

Это утверждение доказано в работе [16].

Лемма 5. *Пусть γ — кривая, соединяющая точку z_o с окружностью $\{z : |z - z_o| = R\}$, состоящая из конечного числа кусочно-гладких жордановых кривых, а $g(z)$ — функция, аналитическая в круге $D(z_o; R) = \{z : |z - z_o| < R\}$ и непрерывная в ее замыкании $\overline{D}(z_o; R)$.*

Пусть $M = \max\limits_{\overline{D}(z_o;R)} |g(t)|$, $m = \max\limits_{\gamma} |g(t)|$. Тогда при $0 < \beta \le \frac{1}{5}$ для всех z из круга $\overline{D}(z_o; \beta R)$ верна оценка

$$|g(z)| \le m^{1-2\beta} M^{2\beta}. \tag{35}$$

Доказательство леммы основано на следующей теореме из [16, гл. II, § 2.4, теорема 2.4.7]. *Пусть область D представляет собой круг $D(0; R)$ с выброшенным из него множеством E, состоящим из конечного числа кусочно-гладких кривых и конечного числа областей, ограниченных такими кривыми, а $\triangle$ — некоторое подмножество интервала $(0, R)$, имеющее меру δ.*

Если для любого $x \in \triangle$ на окружности $\{z : |z| = x\}$ есть хотя бы одна точка, принадлежащая множеству E, то

$$w(z; E, D) \ge \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\frac{R - |z|}{R + |z|} \left(\frac{\delta}{2R - \delta} \right) \right] \quad (z \in D). \tag{36}$$

Докажем лемму. Пусть для удобства $z_o = 0$. Тогда, полагая $\Delta = (0, R)$, $E = \gamma$, $D = D(0, R)$, из (36) получаем, что если $|z| \le \beta R$ $(0 < \beta < \frac{1}{2})$, то

$$w(z; \gamma, D) \ge \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(1 - 2\beta) > 0.$$

Рассмотрим функцию $y(\beta) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(1 - 2\beta) - 1 + 2\beta$. Имеем $y(o) = y(\frac{1}{2}) = 0$. Проверяется, что при $0 < \beta < \beta_1 = \frac{\pi - \sqrt{-\pi^2 + 4\pi}}{2\pi}$ функция $y = y(\beta)$ возрастает. Поскольку $\frac{1}{5} < \beta_1$, то $y(\beta) > 0$ при $0 < \beta \le \frac{1}{5}$. Следовательно, $w(z; \gamma, D) > 1 - 2\beta$, если $|z| \le \beta R$ $(0 < \beta \le \frac{1}{5})$. С учетом этой оценки, применяя теорему о двух константах, приходим к требуемой оценке (35).

§ 2. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 4. Всегда $d(F) \le 1$. Установим оценку снизу.

Пусть $w(x) = \ln M(ex; Q)$, где Q — функция, определенная формулой (3). Поскольку $w \in \underline{W}_{\varphi}$, а $\varphi(x) w(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, то существует функция $w^* \in \underline{W}_{\varphi}$, $\quad w(x) = o(w^*(x))$, $\quad \varphi(x) w^*(x) = o(x)$ при $x \to \infty$ [12].

Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v) = 3 \ln \mu(\sigma). \tag{37}$$

Если $\sigma_o \le \sigma < 0$, то это уравнение имеет единственное решение $v = v(\sigma)$, причем $v(\sigma) \uparrow \infty$ при $\sigma \to 0-$.

Так как $w^* \in \underline{W}_{\varphi}$, найдется последовательность $\{t_j\}$ $(0 < t_j \uparrow \infty)$ такая, что

$$\lim_{t_j \to \infty} \varphi(t_j) J(t_j; w^*) = 0, \tag{38}$$

где

$$J(t; w^*) = \int\limits_t^{\infty} \frac{w^*(x)}{x^2}\, dx.$$

Можно считать, что $v(\sigma_o) \le t_1$. Имея это в виду, рассмотрим последовательность $\{\tau_j\}$ $(\tau_j \uparrow 0)$, которую определим из условий $v(\tau_j) = t_j$ $(j \ge 1)$. Из (38) получаем, что

$$\lim_{v_j \to \infty} \varphi(v_j) J(v_j; w^*) = 0, \tag{39}$$

где $v_j = v(\tau_j) \uparrow \infty$ при $\tau_j \uparrow 0-$.

Далее, уравнение (37) можно записать в виде

$$w^*(v) = e^{u(\sigma)}, \quad u(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln \mu(\sigma).$$

Поскольку из условия (9) следует, что

$$\varliminf_{\sigma \to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0,$$

то при $\sigma_o < \sigma_1 \le \sigma < 0$ имеем (см. (25))

$$\frac{1}{|\sigma|} < \varphi(v), \quad v = v(\sigma). \tag{40}$$

Следовательно, из (39) и условия согласованности функций φ и w^* получаем, что

$$\lim_{\tau_j \to 0-} \frac{1}{|\tau_j|} J(v_j; w^*) = 0, \quad \lim_{\sigma \to 0-} \frac{w^*(v(\sigma))}{|\sigma| v(\sigma)} = 0.$$

Видим, что все условия (15)–(17) леммы 1 выполнены. Тогда, полагая

$$h = h(\sigma) = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)},$$

из леммы 1 получаем, что при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $E'_\beta \subset [-1, 0)$, $m(E'_\beta \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$, $\tau_j \to 0-$,

$$\mu(\sigma + (1 + \beta^{-1}) h(\sigma)) = \mu(\sigma)^{1 + o(1)} \quad (0 < \beta \le 1/5). \tag{41}$$

Следовательно, при $\sigma \to 0-$ вне E'_β

$$R_v = \sum_{\lambda_j > v} |a_j| e^{\lambda_j \sigma} \le \mu(\sigma + h(\sigma)) \sum_{\lambda_j > v} e^{-h(\sigma)\lambda_j} < \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))}. \tag{42}$$

Пусть

$$P_a(s) = \sum_{\lambda_n \le a} |a_n| e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it).$$

Тогда [17]

$$a_n = e^{-\alpha\lambda_n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \varphi_n(t)P_a(t+\alpha)\,dt, \qquad (43)$$

где α — произвольный параметр,

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{q_a'(\lambda_n)}\int\limits_0^\infty \frac{q_a(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}e^{-\lambda t}d\lambda, \quad q_a(\lambda) = \prod_{\lambda_n\le a}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \qquad (44)$$

а C — любой замкнутый контур, охватывающий начало координат.

Положим $a = v(\sigma)$, а в качестве C возьмем контур $\{t : |t| = h(\sigma)\}$. Пусть $\alpha = \sigma + i\tau$ $(\sigma < 0)$, где τ такое, что $\alpha \in \gamma$. Поскольку для $\lambda_n \le v(\sigma)$

$$\frac{1}{|q_v'(\lambda_n)|} \le \frac{1}{|Q'(\lambda_n)|} \quad (n \ge 1),$$

то из (43), (44) получаем, что для любого $\lambda_n \le v(\sigma)$

$$|a_n||Q'(\lambda_n)|e^{\lambda_n\sigma} \le h(\sigma)\Big[\max_{|\xi-\alpha|\le h(\sigma)}|F(\xi)| + \sum_{\lambda_j>v}|a_n|e^{\lambda_j(\sigma+h(\sigma))}\Big]\int\limits_0^\infty\left|\frac{q_v(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\right||e^{-\lambda t}||\,d\lambda|. \qquad (45)$$

Пусть $\lambda = re^{i\varphi}$ такое, что $|\lambda - \lambda_n| > 1$. Тогда

$$\left|\frac{q_v(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\right| \le |q_v(\lambda)|. \qquad (46)$$

В противном случае по принципу максимума модуля имеем

$$\max_{|\lambda-\lambda_n|\le 1}\left|\frac{q_v(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\right| = |q_v(\lambda_o)|, \quad |\lambda_o - \lambda_n| = 1. \qquad (47)$$

Поскольку $|\lambda_o - \lambda| \le 2$, а $|e^{-\lambda t}| \le e^{-rh}$ при $|t| = h$, то с учетом (46), (47) из (45) следует, что для любого $\lambda_n \le v(\sigma)$

$$|a_n||Q'(\lambda_n)|e^{\lambda_n\sigma} \le h(\sigma)\Big[\max_{|\xi-\alpha|\le h(\sigma)}|F(\xi)| + \sum_{\lambda_j>v}|a_j|e^{\lambda_j(\sigma+h(\sigma))}\Big]\int\limits_0^\infty M(r+2;q_v)e^{-rh}dr, \quad h = h(\sigma). \qquad (48)$$

Далее, учитывая (37) и определения величин $v = v(\sigma)$, $h = h(\sigma)$, а также неравенство Иенсена $N(r) \le \ln M(r;q_a)$, имеем

$$\ln M(R;q_v) = n(v)\ln\left(1+\frac{R^2}{v^2}\right) + 2R^2\int\limits_0^v \frac{n(t)}{t(t^2+R^2)}\,dt \le \frac{n(v)}{v}R + 2N(v) = o(1)h(\sigma)R + o(1)\ln\mu(\sigma).$$

Следовательно, согласно (41) и оценке типа (42), из (48) получаем, что для всех $\lambda_n \le v(\sigma)$ при $\sigma \to 0-$ вне E_β'

$$|a_n||Q'(\lambda_n)|e^{\lambda_n\sigma} \le \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))} + \mu(\sigma)^{o(1)}\max_{|\xi-\alpha|\le h(\sigma)}|F(\xi)|. \qquad (49)$$

Пусть $\mu^*(\sigma)$ — максимальный член ряда

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(\lambda_n) e^{\lambda_n s}.$$

Через $p = p(\sigma)$ обозначим решение уравнения

$$w^*(p) = 2\ln \mu^*(\sigma). \tag{50}$$

Поскольку из условия (9) следует, что

$$\varliminf_{\sigma\to 0-} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0,$$

то с учетом (50) и условия $w^*(x) = o(x)$, $x \to \infty$, при $\sigma_2 \le \sigma < 0$ $(\sigma_1 < \sigma_2)$ имеем

$$\frac{1}{|\sigma|} < \varphi(p), \quad p = p(\sigma). \tag{51}$$

Пусть $\{\tau_j\}$ — последовательность, введенная выше, $x = x_j$ — решение уравнения $p(x) = v(\tau_j)$. Выбирая $t_1 = v(\tau_1)$ достаточно большим, если это необходимо, можем считать, что $\min\limits_x p(x) < v(\tau_1)$. Тогда $p(x_j) = v(\tau_j) = t_j$ для всех $j \ge 1$ ($\{t_j\}$ — последовательность из условия (38)). Из (51), (38) вытекает, что

$$\frac{1}{|x_j|} J(p(x_j); w^*) < \varphi(p(x_j)) J(p(x_j); w^*) = \varphi(t_j) J(t_j; w^*) \to 0$$

при $t_j \to \infty$. Более того, при $\sigma \to 0-$

$$0 < \frac{w^*(p(\sigma))}{|\sigma| p(\sigma)} < \frac{\varphi(p(\sigma)) w^*(p(\sigma))}{p(\sigma)} \to 0.$$

Но тогда, применяя лемму 1 к функции $u(\sigma) = \ln 2 + \ln\ln \mu^*(\sigma)$, точно так же, как была получена оценка (42), при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $E_1 \subset [-1, 0)$, $m(E_1 \cap [x_j, 0)) = o(|x_j|)$, $x_j \to 0-$, будем иметь

$$R_p^* = \sum_{\lambda_j > p} |a_j||Q'(\lambda_j)| e^{\lambda_j \sigma} \le [\mu^*(\sigma)]^{-1(1+o(1))}. \tag{52}$$

Следовательно, из (42), (52) при $\sigma_3 < \sigma < 0$, $\sigma \notin E_1 \cup E'_\beta$, получаем, что

1) $\lambda_{\nu(\sigma)} \le v(\sigma)$;

2) $\lambda_{k(\sigma)} \le p(\sigma)$,

где $\nu(\sigma)$ и $k(\sigma)$ — центральные индексы рядов (4) и (5).

Далее,

$$|Q'(\lambda_n)| \le \frac{2}{\lambda_n} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_j^2}\right) \le M(\lambda_n; Q), \quad n \ge n_0.$$

Следовательно, для $\sigma_3 < \sigma < 0$, $\sigma \notin E_1 \cup E'_\beta$, имеем

$$\mu^*(\sigma) = |a_k Q'(\lambda_k)| e^{\lambda_k \sigma} \le \mu(\sigma) e^{w(p)},$$

где $p = p(\sigma)$, $k = k(\sigma)$. Значит, для таких σ при $\sigma \to 0-$ будет $(1+o(1)) \ln \mu^*(\sigma) \le \ln \mu(\sigma)$. Тем самым $w^*(p) = 2\ln \mu^*(\sigma) < 3\ln \mu(\sigma) = w^*(v)$. Это означает, что

$\lambda_{k(\sigma)} \le p(\sigma) < v(\sigma)$ при $\sigma_3 < \sigma < 0$, $\sigma \notin E_1 \cup E'_\beta$. С учетом этого из (49) получаем, что при $\sigma \to 0-$ вне $E_1 \cup E'_\beta$

$$\mu^*(\sigma) < 1 + \mu(\sigma)^{o(1)} \max_{|\xi-\alpha|\le h(\sigma)} |F(\xi)|, \tag{53}$$

где $\alpha = \sigma + i\tau$ $(\alpha \in \gamma)$.

Убедимся, что множество $E = E_1 \cup E'_\beta$ имеет нулевую плотность. Действительно, из замечания к лемме 1 при $\sigma \to 0-$ вытекает, что

$$\frac{m(E \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|} \le \frac{m(E_1 \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|} + \frac{m(E'_\beta \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|}$$
$$\le o(1) + \frac{4}{|\sigma|} J(p(\sigma); w^*) + \frac{4}{|\sigma|} J(v(\sigma); w^*) = o(1) + r(\sigma).$$

Введем последовательность $\{\xi_j\}$, полагая $\xi_j = \max(\tau_j, x_j)$ $(j \ge 1)$.

Если $\xi_j = \tau_j$, то $\xi_j \ge x_j$, поэтому $v(\xi_j) = v(\tau_j) = t_j = p(x_j) \le p(\xi_j)$. Следовательно, учитывая (40), имеем

$$r(\xi_j) \le 4\varphi(v(\xi_j))J(p(\xi_j); w^*) + 4\varphi(v(\xi_j))J(v(\xi_j); w^*) \le 8\varphi(t_j)J(t_j; w^*).$$

Если же $\xi_j = x_j$, то $\xi_j \ge \tau_j$ и $p(\xi_j) = p(x_j) = t_j = v(\tau_j) \le v(\xi_j)$. Поэтому в силу (51)

$$r(\xi_j) \le 4\varphi(p(\xi_j))J(p(\xi_j); w^*) + 4\varphi(p(\xi_j))J(v(\xi_j); w^*) \le 8\varphi(t_j)J(t_j; w^*).$$

Таким образом, с помощью (38) при $\xi_j \to 0-$ окончательно получаем, что

$$\frac{m(E \cap [\xi_j, 0))}{|\xi_j|} \le o(1) + r(\xi_j) \le o(1) + 8\varphi(t_j)J(t_j; w^*) = o(1).$$

Мы воспользовались тем, что $t_j \to \infty$ при $\xi_j \to 0-$. Значит, $dE = 0$.

Дальнейшие рассуждения основаны на лемме 5.

Рассмотрим круг $\overline{D}(\alpha; h\beta^{-1})$ $(h = h(\sigma),\ \alpha = \sigma + i\tau,\ \alpha \in \gamma)$. Поскольку $\sigma^{-1}h(\sigma) = o(1)$ при $\sigma \to 0-$, то при $\sigma_4 \le \sigma < 0$ этот круг целиком содержится в полуплоскости Π_o.

Пусть $\gamma(\alpha)$ — часть кривой, содержащаяся в круге $\overline{D}(\alpha; h\beta^{-1})$ $(0 < \beta \le \frac{1}{5},\ h = h(\sigma))$. Она не обязательно кусочно-гладкая и жорданова. Поэтому поступаем следующим образом.

Пусть α_1 — какая-нибудь точка кривой $\gamma(\alpha)$, принадлежащая окружности $\partial\overline{D}(\alpha; h\beta^{-1})$. Соединим точку α_1 с α ломаной $l(\alpha)$ без самопересечений и такой, что

$$d(\xi) = \inf_{z\in\gamma(\alpha)} |F(z) - F(\xi)| \le m_\alpha, \tag{54}$$

где $\xi \in l(\alpha)$, $m_\alpha = \max\limits_{\gamma(\alpha)} |F(t)|$. Такая ломаная существует. Действительно, для любого $z \in \gamma(\alpha)$ найдется окрестность $D(z; \nu_z)$ $(\nu_z > 0)$ такая, что

$$|F(z) - F(\xi)| \le m_\alpha$$

для любого $\xi \in D(z; \nu_z)$. Поскольку $\gamma(\alpha)$ — компакт, по лемме Гейне — Бореля из покрытия $\bigcup\limits_{z\in\gamma(\alpha)} D(z; \nu_z)$ можно выделить конечное подпокрытие: $D(z_o; \nu_o)$, $D(z_1; \nu_1), \dots, D(z_n; \nu_n)$, где $z_i \in \gamma(\alpha)$, $\nu_i > 0$ $(i = 0, 1, \dots, n)$.

Можем считать, что $z_o = \alpha$, $z_n = \alpha_1$. Соединим между собой центры всех попарно пересекающихся кружков $D(z_i; \nu_i)$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ отрезками прямых.

Отбрасывая, если это необходимо, конечное число отрезков, получим жорданову ломаную $l(\alpha)$, соединяющую точки α и α_1. Заметим, что $l(\alpha)$ целиком содержится в объединении кружков $D(z_i;\nu_i)$ $(i=0,1,\dots,n)$. Осталось проверить оценку (54).

Пусть $\xi\in l(\alpha)$. Тогда существует круг $D(z_i;\nu_i)$, содержащий эту точку. Поскольку $|F(z_i)-F(\xi)|\le m_\alpha$, то $d(\xi)\le m_\alpha$.

Вернемся теперь к оценке (53). Применяя лемму 5 для круга $\overline{D}(z_o;\beta^{-1}h)$ и кривой $l(\alpha)$, получаем

$$\max_{|\xi-\alpha|\le h(\sigma)}|F(\xi)|\le\max_{l(\alpha)}|F(t)|^{1-2\beta}\max_{|t-\alpha|\le\beta^{-1}h(\sigma)}|F(t)|^{2\beta}$$
$$\le|F(\xi_\alpha)|^{1-2\beta}M^{2\beta}(\sigma+\beta^{-1}h(\sigma)),\quad \xi_\alpha\in l(\alpha).$$

Но из (54) следует, что

$$d(\xi_\alpha)=|F(\xi_\alpha)-F(z_\alpha)|\le m_\alpha$$

для некоторой точки $z_\alpha\in\gamma(\alpha)$. Следовательно,

$$\max_{|\xi-\alpha|\le h(\sigma)}|F(\xi)|\le[2m_\alpha]^{1-2\beta}M^{2\beta}(\sigma+\beta^{-1}h(\sigma))$$
$$=(2|F(z'_\alpha)|)^{1-2\beta}M^{2\beta}(\sigma+\beta^{-1}h(\sigma)),\quad (55)$$

где $z'_\alpha\in\gamma(\alpha)$.

Учитывая оценку (41), при $\sigma\to 0-$ вне $E'_\beta\subset[-1,0)$ имеем

$$\mu(\sigma)\le M(\sigma)\le M(\sigma+\beta^{-1}h(\sigma))\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|e^{\lambda_n(\sigma+\beta^{-1}h(\sigma))}$$
$$\le\mu(\sigma+(1+\beta^{-1})h(\sigma))\Big[n(v(\sigma))+\sum_{\lambda_n>v(\sigma)}e^{-h(\sigma)\lambda_n}\Big]<\mu(\sigma)^{1+o(1)}.\quad (56)$$

С учетом оценок (55), (56) из (53) получаем, что при $\sigma\to 0-$ вне множества $E_\beta=E_1\cup E'_\beta$, $m(E_\beta\cap[\xi_j,0))=o(|\xi_j|)$, $\xi_j\to 0-$, будет

$$(1+o(1))\mu^*(\sigma)\le 2|F(z'_\alpha)|^{1-2\beta}\mu(\sigma)^{(1+o(1))2\beta},\quad z'_\alpha\in\gamma(\alpha).$$

Тем самым при $\sigma\to 0-$ вне E_β

$$\frac{\ln\mu^*(\sigma)}{\ln\mu(\sigma)}\le(1+o(1))2\beta+(1-2\beta)\frac{|\ln F(z'_\alpha)|}{\ln\mu(\sigma)},\quad 0<\beta\le\frac{1}{5}.$$

Используя еще раз оценки (56), отсюда находим, что

$$\overline{\lim_{\sigma\in e'(\beta),\sigma\to 0-}}\frac{\ln\mu^*(\sigma)}{\ln\mu(\sigma)}\le 2\beta+(1-2\beta)d(F;\gamma),\quad (57)$$

где $0<\beta\le\frac{1}{5}$, $e'(\beta)=[-1,0)\backslash E_\beta$. Из (56) видно, что $e'(\beta)$ является β-асимптотическим множеством для пары (u,h), где $u(\sigma)=\ln 3+\ln\ln\mu(\sigma)$, $h=h(\sigma)$. Значит, $e'(\beta)\in e_\beta$, где e_β — β-асимптотическое семейство для пары (u,h). Следовательно, из (57) имеем

$$q(F)=\inf_{0<\beta\le\frac{1}{5}}\sup_{\alpha}\overline{\lim_{\sigma\in e_\alpha(\beta),\,\sigma\to 0-}}\frac{\ln\mu^*(\sigma)}{\ln\mu(\sigma)}\le 2\beta+(1-2\beta)d(F;\gamma),$$

где $e_\alpha(\beta) \in e_\beta$, причем $e_\alpha(\beta)$ такое, что если $\sigma \in e_\alpha(\beta)$, то $\lambda_{k(\sigma)} \le \lambda_{\nu(\sigma)}$. Здесь $k = k(\sigma)$, $\nu = \nu(\sigma)$ — центральные индексы рядов (4), (5) соответственно. Поскольку левая часть этого неравенства от β и γ не зависит, то, сначала устремляя β к нулю, а затем минимизируя правую часть по всем $\gamma \in \Gamma$, получаем требуемое неравенство (10).

Теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2 почти ничем не отличается от доказательства теоремы 1. Поэтому доказательство теоремы 2 опускаем. По этому поводу по существу уже сказано в комментарии к лемме 3.

Доказательство теоремы 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Имеем $|Q'(\lambda_n)| \le M(\lambda_n; Q)$ $(n \ge n_o)$. Так как функция $\ln M(ex; Q)$ принадлежит множеству $\underline{W}_\varphi$, с учетом (13) получаем, что

$$|Q'(\lambda_n)| + \left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right| \le e^{w(\lambda_n)} \quad (n \ge 1),$$

где w — некоторая функция из $\underline{W}_\varphi$.

Поскольку $\psi \in W_\varphi$ (ψ — функция из (13)), то

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) \int_t^\infty \frac{\psi(x)}{x^2}\, dx = 0.$$

Следовательно, $\varphi(t)\psi(t) = o(t)$ при $t \to \infty$. Кроме того, из условий теоремы 1 следует, что $\varphi(t)\ln M(et; Q) = o(t)$ при $t \to \infty$. Поэтому можно считать, что $\varphi(t)w(t) = o(t)$ при $t \to \infty$. Это означает, что пара (B, Λ) φ-согласована, где $B = \{Q'(\lambda_n)\}$. Значит, согласно лемме 2 максимальный член $\mu(\sigma)$ ряда (4) $B(d)$-устойчив ($B = \{Q'(\lambda_n)\}$). Но тогда из (10) следует, что $q(F) = 1$. Поскольку $q(F) \le d(F) \le 1$, то $d(F) = 1$.

Ситуация, когда выполнены условия теоремы 2, рассматривается аналогично. В этом случае следует воспользоваться леммой 3.

Теорема 3 полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гайсин А. М., Белоус Т. И.* B-устойчивость максимального члена адамаровской композиции двух рядов Дирихле // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1271–1282.
2. *Pólya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzeihen // Math. Z. 1929. Bd 29. S. 549–640.
3. *Fuchs W. H. J.* Proof of a conjecture of G. Pólya concerning gap series // Illinois J. Math. 1963. V. 7. P. 661–667.
4. *Kövari T.* On the asymptotic paths of entire functions with gap power series // J. Anal. Math. 1965. V. 15. P. 281–286.
5. *Hayman W. K.* Angular value distribution of power series with gaps // Proc. London Math. Soc. 1972. V. 24. P. 590–624.
6. *Павлов А. И.* О росте по кривым целых функций, заданных лакунарными степенными рядами // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 5. С. 1169–1181.
7. *Korevaar J., Dixon M.* Interpolation, strongly nonspanning powers and Macintyre exponents // Indag. Math. (N. S.) 1978. V. 40, N 2. P. 243–258.
8. *Гайсин А. М.* Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 7. С. 931–945.
9. *Гайсин А. М.* Асимптотическая оценка суммы ряда Дирихле на кривых // Мат. заметки. 1997. Т. 61, № 6. С. 810–816.
10. *Гайсин А. М.* Оценка ряда Дирихле с лакунами Фейера на кривых // Докл. РАН. 2000. Т. 370, № 6. С. 735–737.

11. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
12. *Гайсин А. М.* Поведение логарифма модуля суммы ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 53, № 4. С. 173–185.
13. *Скаскив О. Б.* К теореме Вимана о минимуме модуля аналитических в единичном круге функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1989. Т. 53, № 4. С. 833–850.
14. *Beurling A.* Some theorems on boundedness of analytic functions // Duke Math. J. 1949. V. 16. P. 355–359.
15. *Hayman W. K.* How quickly can an entire function tend to zero along a curve? // Enseign. Math. 1978. V. 24, N 3–4. P. 215–223.
16. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.
17. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 23 февраля 2001 г.

Гайсин Ахтяр Магазович
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН, ул. Чернышевского, 112, Уфа 450077
`gaisin@imat.rb.ru`

Белоус Татьяна Ивановна
Уфимский гос. авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, корп. 8, комн. 313, Уфа 450000
`belousti@yandex.ru`