Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 512.542

О ПОРОЖДЕНИИ СПОРАДИЧЕСКИХ ПРОСТЫХ ГРУПП ТРЕМЯ ИНВОЛЮЦИЯМИ, ДВЕ ИЗ КОТОРЫХ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫ

В. Д. Мазуров

Аннотация: Доказывается следующий результат. *Пусть G — одна из 26 спорадических простых групп. Группа G тогда и только тогда не может быть порождена тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда G изоморфна M_{11}, M_{22}, M_{23} или M^cL.*

Ключевые слова: конечная простая группа, спорадическая группа, порождающий элемент, инволюция

Введение

В 1980 г. в «Коуровскую тетрадь» [1] мной был внесен вопрос 7.30: Какие конечные простые группы порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны? Группы, обладающие таким свойством, позже были названы $(2\times 2, 2)$-группами Я. Н. Нужиным, который в серии своих работ [2–5] показал, что среди простых знакопеременных групп и простых групп лиева типа $(2\times 2, 2)$-группами не являются только группы, изоморфные одной из групп $A_6, A_7, A_8, L_3(q), U_3(q), L_4(2^m), U_4(2^m)$ и $S_4(3)$.

К настоящему времени ответ на вопрос 7.30 известен и для всех спорадических групп. Начало было положено А. В. Ершовым и Н. С. Невмержицкой [6], которые с помощью вычислительной машины перебрали все тройки инволюций в известных подстановочных представлениях групп Матье и выяснили, что M_{12}, M_{24} являются $(2\times 2, 2)$-группами, а M_{11}, M_{22} и M_{23} нет. Я. Н. Нужин и А. В. Тимофеенко [7] добавили к списку групп, которые не являются $(2\times 2, 2)$-группами, группу M^cL и показали, что J_1, J_2, HS порождаются четверной группой и инволюцией, а позже, модифицировав программу Ершова и Невмержицкой, выяснили [8, 9], что Suz, Ru, He, Co_2, Co_3, J_3, F_{22}, F_{23}, ON также являются $(2\times 2, 2)$-группами. Группы Ly и J_4 были исследованы независимо А. В. Тимофеенко [10] и Б. Л. Абашеевым [11]. Позднее Б. Л. Абашеев [12] показал, что свойством $(2\times 2, 2)$ обладают Th, HN и B. В дальнейшем А. В. Тимофеенко [13], используя мощную вычислительную технику Института вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск) и явный вид порождающих элементов спорадических групп, указанный в [14], проверил с помощью

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00495), грантом Е00–1.0–77 в области фундаментального естествознания Минобразования России и грантом УР.04.01.031 программы «Университеты России».

компьютерной системы GAP [15] выполнение $(2 \times 2, 2)$-свойства для всех простых спорадических групп, кроме B и M. В частном письме С. Нортон привел набросок доказательства того, что M является $(2 \times 2, 2)$-группой.

В настоящей работе мы показываем, как получить все эти результаты единым методом, используя только таблицы характеров и известную информацию о максимальных подгруппах спорадических групп.

Теорема. *Пусть G — одна из 26 спорадических простых групп. Группа G тогда и только тогда не может быть порождена тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда она изоморфна M_{11}, M_{22}, M_{23} или M^cL.*

Обозначения и предварительные результаты

Для спорадических групп и их подгрупп используются обозначения из [16]. Множество всех неприводимых обыкновенных характеров группы G обозначается через $\mathrm{Irr}(G)$. Если A, B, C — классы сопряженных элементов группы G и $g \in C$, то $m_G(A, B, C)$ означает число таких пар (x, y), что $x \in A$, $y \in B$ и $xy = g$. Для инволюции t группы G обозначим через $i_G(t)$ число инволюций, отличных от t, в $C_G(t)$.

Лемма 1 (замечание Р. Брауэра). *Пусть A и B — подгруппы конечной группы G и χ — ее обыкновенный неглавный неприводимый характер такой, что*

$$(1_A, \chi|_A) + (1_B, \chi|_B) > \chi(1). \tag{1}$$

Тогда $\langle A, B\rangle \neq G$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть V — модуль, соответствующий характеру χ. Тогда (1) можно переписать в виде

$$\dim C_V(A) + \dim C_V(B) > \dim V,$$

где $C_V(X)$ означает подпространство неподвижных точек подгруппы X в V. Отсюда следует, что $C_V(A) \cap C_V(B) \neq 0$, т. е. $C_V(G) \neq 0$. Поскольку χ неприводим, это означает, что $C_V(G) = V$, и тем самым χ — главный характер; противоречие.

Следующий результат также хорошо известен.

Лемма 2. *Пусть A, B, C — классы сопряженных элементов группы G и $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Тогда*

$$m_G(A, B, C) = \frac{|A||B|}{|G|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi(a)\chi(b)\overline{\chi(c)}}{\chi(1)}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\overline{X}$ означает сумму элементов подмножества X из G в групповой алгебре группы G над полем комплексных чисел. Пусть $C_1, \ldots, C_r$ — все различные классы сопряженных элементов группы G, $A = C_i$, $B = C_j$. Тогда

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = \sum_{t=1}^{r} m_G(A, B, C_t)\overline{C_t}.$$

Если X — матричное представление, соответствующее характеру $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, то $X(g_t)$ для элемента $g_t \in C_t$, $t = 1, \ldots, r$, — скалярная матрица, диагональный элемент ω_t которой равен $|C_t|\chi(g_t)/\chi(1)$. Так как

$$\omega_i\omega_j = \sum_{t=1}^{r} m_G(A, B, C_t)\omega_t,$$

то

$$\frac{|A||B|\chi(a)\chi(b)}{\chi(1)} = \sum_{t=1}^{r} m_G(A,B,C_t)|C_t|\chi(g_t),$$

$$\sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)} \sum_{t=1}^{r} m_G(A,B,C_t)|C_t|\chi(g_t)\overline{\chi(c)} = |A||B| \sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi(a)\chi(b)\overline{\chi(c)}}{\chi(1)},$$

откуда (2) получается применением соотношений ортогональности для характеров.

Лемма 3. *Пусть $C_1,\dots,C_s$ — все классы сопряженности инволюций группы G и $t\in C_1$. Тогда*

$$i_G(t) = \sum_{i,j=1}^{s} m_G(C_i,C_j,C_1). \tag{3}$$

Доказательство. Если a — инволюция, отличная от t и принадлежащая $C_G(t)$, то at — инволюция и $a\cdot at = t$. С другой стороны, если x,y — инволюции и $xy=t$, то x — инволюция в $C_G(t)$, отличная от t.

Лемма 4. *Пусть a,b — инволюции конечной группы G, порождающие подгруппу $D\neq G$, и пусть $M_1,\dots,M_s$ — все максимальные подгруппы G, содержащие D. Если $\sum\limits_{j=1}^{s} i_{M_j}(a) < i_G(a)$, то G порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

Доказательство. По условию множество $C_G(a)\setminus \bigcup\limits_{j=1}^{s} C_{M_j}(a)$ содержит хотя бы одну инволюцию t. Если $H=\langle a,b,t\rangle\neq G$, то H содержится в одной из подгрупп M_j и, следовательно, $t\in C_{M_j}(a)$, что противоречит выбору t.

Доказательство теоремы

Лемма 5. *Ни одна из групп $G\in\{M_{11},M_{22},M_{23},M^cL\}$ не обладает порождающим множеством из трех инволюций, две из которых перестановочны.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть G — одна из этих групп и G порождена такими инволюциями a,b,c, что $ac=ca$. Положим $A=\langle a,c\rangle, B=\langle b\rangle$.

Поскольку в G все инволюции сопряжены, для любого ее характера χ выполняются равенства

$$(1_A,\chi|_A) = (\chi(1)+3\chi(a))/4, \quad (1_B,\chi|_B) = (\chi(1)+\chi(a))/2.$$

Из таблиц обыкновенных характеров групп M_{11}, M_{22}, M_{23}, M^cL [16] видно, что для неглавного неприводимого характера группы G наименьшей степени выполняется неравенство (1). По лемме 1 получаем противоречие.

Теперь теорема вытекает из лемм 4, 5 и следующей леммы.

Лемма 6. *В любой спорадической простой группе G, отличной от M_{11}, M_{22}, M_{23}, M^cL, существуют такие инволюции a,b, что выполнены условия леммы 4.*

Доказательство состоит в заполнении табл. 1. В ней (X,Y,Z) — одна из таких троек классов сопряженности группы G, что X,Y состоят из инволюций и $m_G(X,Y,Z)\neq 0$, a — фиксированная инволюция из класса X, а $M_1,\dots,M_s$

Таблица 1

G	X,Y,Z	$i_G(a)$	s	M_i	$i_{M_i}(a)$
M_{12}	$2A,2B,10A$	42	3	$A_6.2^2, i=1,2$	14
				$2\times S_5$	8
J_1	$2A,2A,11A$	30	1	11:10	0
J_2	$2B,2B,7A$	62	1	$L_3(2):2$	6
HS	$2B,2B,15A$	222	2	$A_8.2$	32
				$5:4\times A_5$	6
J_3	$2A,2A,17A$	130	4	$L_2(16).2, i=1,2$	18
				$L_2(17), i=3,4$	4
M_{24}	$2B,2B,11A$	382	7	$M_{22}.2$	70
				$M_{12}.2$	62
				$L_2(23), i=3,\dots,7$	12
He	$2B,2B,17A$	574	1	$S_4(4).2$	126
Ru	$2B,2B,29A$	1822	1	$L_2(29)$	14
Suz	$2B,2B,13A$	1822	6	$G_2(4)$	302
				$L_3(3).2, i=2,3$	18
				$L_2(25), i=4,5,6$	12
ON	$2A,2A,19A$	1750	3	$L_3(7).2, i=1,2$	98
				J_1	30
Co_3	$2B,2B,21A$	1782	4	$U_3(5).S_3, i=1,2$	50
				$L_3(4).6.2$	30
				$S_3.L_2(8).3$	14
Co_2	$2C,2C,28A$	8894	1	$2^{1+8}:S_6.2$	1022
Fi_{22}	$2C,2C,13A$	7614	3	$O_7(3), i=1,2$	750
				${}^2F_4(2)$	174
HN	$2B,2B,21A$	9390	1	A_{12}	362
Ly	$2A,2A,67A$	34650	1	$67:22$	0
Th	$2A,2A,29A$	30510	2	$U_3(8).6$	126
				$L_2(19).2$	18
Fi_{23}	$2C,2C,17A$	160638	3	$S_8(2), i=1,2$	2686
				$S_4(4).4$	126
Co_1	$2C,2C,33A$	141438	3	$3.Suz.2$	3366
				$U_6(2).3.2, i=2,3$	2464
J_4	$2B,2B,43A$	280830	1	$43:14$	0
Fi_{24}'	$2B,2B,29A$	3137022	1	$29:14$	0
B	$2C,2D,38A$	1605784574	1	$2.{}^2E_6(2).2$	7746558
M	$2B,2B,41A$	90741673459710	6	$41:40$	0
				$3^8.O_8^-(3).2, i=2,\dots,6$	$<\lvert C_{M_i}(a)\rvert$ $< i_G(a)/100$

— все максимальные подгруппы группы G, содержащие $D = \langle a, b\rangle$, где b — фиксированная инволюция из Y такая, что $ab \in Z$.

Данные для этой таблицы легко извлечь с помощью формул (2) и (3) из таблиц характеров и списков максимальных таблиц спорадических групп.

Все вычисления выполнены в GAP [15], где, в частности, содержится полный набор таблиц характеров спорадических групп. Более того, для всех групп, кроме B и M, GAP содержит списки максимальных подгрупп вместе с их таблицами характеров, а также таблицы соответствия классов сопряженности максимальных подгрупп классам сопряженности всей группы. Таким образом, заполнение табл. 1 для большинства групп требует только механических усилий (отметим, что GAP содержит процедуру вычисления чисел $m_G(X, Y, Z)$ на основе формулы (2)). Исключение составляют только группы B и M, которые мы рассмотрим подробнее.

Пусть $G = B$. Поскольку $m_G(2C, 2D, 38A) \neq 0$, существуют такие инволюции $a \in 2C, b \in 2D$, что $ab = c \in 38A$. Отметим, что $\langle c^2\rangle$ — силовская 19-подгруппа из G и $C_G(c^2) = \langle c\rangle$. Число $i_G(a)$ находится по формуле (3). Далее, из списка максимальных подгрупп группы G [17] видно, что любая максимальная подгруппа, порядок которой делится на 19, изоморфна $2.{}^2E_6(2), HN.2$ или Th. Группы $HN.2, Th$ не содержат элементов порядка 38, поэтому любая максимальная подгруппа, содержащая $D = \langle a, b\rangle$, сопряжена с $H \simeq 2.{}^2E_6(2)$. Поскольку эта подгруппа содержит нормализатор в G силовской 19-подгруппы из D, H — единственная максимальная подгруппа в G, содержащая D. Так как в H существуют только два класса X, Y инволюций, а именно $2I, 2J$, для которых $m_H(X, Y, 38A) \neq 0$, и по формуле (3) $i_H(x) = 7746559$ для любого $x \in 2I \cup 2J$, то лемма в этом случае верна.

Пусть $G = M$. Как и в предыдущем случае, можно вычислить, что

$$m_G(2B, 2B, 41A) \neq 0.$$

Формула (3) дает число $i_G(a)$, указанное в табл. 1. По [18] любая максимальная подгруппа из G, порядок которой делится на 41, сопряжена с $41 : 40$ или $H = 3^8.O_8^-(3).2$. Так как $41 : 40$ совпадает с нормализатором в G силовской 41-подгруппы, а порядок нормализатора в H силовской 41-подгруппы равен $41 \cdot 8$, существуют пять максимальных подгрупп, сопряженных с H, и одна максимальная подгруппа, изоморфная 41:40, которые содержат D. Поскольку подгруппа 41 из H действует на подгруппе 3^8 без неподвижных точек, $|C_{3^8}(a)| = 3^4$ и поэтому $|C_H(a)| \leq 3^4 2|C_R(t)|$ для некоторой инволюции t из $R = O_8^-(3)$. Верхнюю границу порядков инволюций из R можно извлечь из таблицы характеров R. Это завершает доказательство леммы 6 для $G = M$.

Для остальных групп таблицы вычисления проводятся по той же схеме. Лемма 6, а вместе с ней и теорема доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нерешенные* вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 15-е изд. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2002.
2. *Нужин Я. Н.* Порождающие тройки инволюций групп Шевалле над конечным полем характеристики 2 // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 2. С. 192—206.
3. *Нужин Я. Н.* Порождающие тройки инволюций знакопеременных групп // Мат. заметки. 1990. Т. 4. С. 91–95.
4. *Нужин Я. Н.* Порождающие тройки инволюций групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. I // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 77–96.

5. *Нужин Я. Н.* Порождающие тройки инволюций групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. II // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 4. С. 422–440.
6. *Ершов А. В., Невмержицкая Н. С.* Порождающие группы Матье тройки инволюций: Докл. на XXXVI междунар. науч. студенческой конф. Новосибирск, 1999.
7. *Нужин Я. Н., Тимофеенко А. В.* Порождающие тройки инволюций некоторых спорадических групп. Красноярск: ИВМ СО РАН, 1999. (Препринт / Ин-т вычислительного моделирования РАН; N 13–99).
8. *Нужин Я. Н., Тимофеенко А. В.* Спорадические группы среди гомоморфных образов групп Коксетера // IV междунар. алгебраическая конф.: Тез. докл. Новосибирск, 2000. С. 131–132.
9. *Тимофеенко А. В.* О порождающих тройках инволюций в спорадических группах / Ред. «Сиб. мат. журн.». Новосибирск, 2001. 18 с. Деп. в ВИНИТИ 19.03.01, № 693-В2001.
10. *Тимофеенко А. В.* Порождающие тройки инволюций групп Лайонса и Янко J_4 // Укр. мат. конгресс–2001. Секция 1: алгебра и теория чисел: Тез. докл. Киев, 2001. С. 50.
11. *Абашеев Б. Л.* О порождающих инволюциях спорадических групп: Курсовая работа. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2001.
12. *Абашеев Б. Л.* О порождающих тройках инволюций спорадических групп: Дипломная работа. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2002.
13. *Тимофеенко А. В.* О порождающих тройках инволюций больших спорадических групп // Дискретная математика. 2002. Т. 14, № 4. (В печати).
14. *Wilson R. A.* ATLAS of finite group representations. http://www.mat.bham.ac.uk/atlas/.
15. *Schönert M. et al.* Groups, Algorithms and Programming. 1997. http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/gap.
16. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
17. *Wilson R. A.* The maximal subgroups of the Baby Monster. I // J. Algebra. 1991. V. 211, N 1. P. 1–14.
18. *Norton S. P., Wilson R. A.* Anatomy of the Monster. II // Proc. London Math. Soc. Ser. III. 2002. V. 84, N 3. P. 581–598.

Статья поступила 8 декабря 2002 г.

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`mazurov@math.nsc.ru`