Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 515.164.13

К ТЕОРЕМЕ КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

В. И. Кузьминов, И. А. Шведов

Аннотация: С. Киченассами указал условия, когда пространство W_p^k дифференциальных форм на замкнутом многообразии M с нормой $\|\omega\|_{W_p} = \|\omega\|_{L_p} + \|d\omega\|_{L_p}$ компактно вложено в пространство потоков F_p^k на M с нормой $\inf\limits_{\varphi\in L_q}\{\|\omega - d\varphi\|_{L_q} + \|\varphi\|_{L_q}\}$. В работе получен вариант теоремы Киченассами для произвольных банаховых комплексов и, в частности, для эллиптических дифференциальных комплексов на замкнутом многообразии.

Ключевые слова: теоремы вложения, пространства Соболева дифференциальных форм, банаховы комплексы, эллиптические дифференциальные комплексы, рефлективные подкатегории

Пусть M — замкнутое ориентируемое гладкое n-мерное многообразие. В [1] С. Киченассами доказал, что для произвольного потока ω на M выполнено неравенство

$$\inf_{\varphi\in L^q}\{\|\omega - d\varphi\|_{L_q} + \|\varphi\|_{L_q}\} \le C\{\|\omega\|_{L_p} + \|d\omega\|_{L_p}\},$$

если $1 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$, $1/p - 1/q < 1/n$.

Из этого неравенства следует, что пространство W^kL_p дифференциальных форм с нормой $\|\omega\|_{L_p} + \|d\omega\|_{L_p}$ вложено в пространство потоков F^kL_q с нормой $\inf\limits_{\varphi\in L_q}\{\|\omega - d\varphi\|_{L_q} + \|\varphi\|_{L_q}\}$. Кроме того, в [1] показано, что это вложение компактно.

В настоящей работе установлено, что конструкция Киченассами тесно связана со свойством рефлективности подкатегории банаховых комплексов с непрерывными дифференциалами в категории всех банаховых комплексов. Предложен вариант вложения Киченассами для банаховых комплексов и найдены как достаточные, так и необходимые условия для компактности этого вложения. Получено обобщение теоремы Киченассами на случай пространств дифференциальных форм на компактном многообразии с краем. Указан вариант этой теоремы для дифференциальных эллиптических комплексов на замкнутом многообразии.

В дальнейшем оператором $T : X \to Y$ будем называть произвольное линейное отображение, заданное на линейном подпространстве $\operatorname{dom} T$ банахова пространства X и принимающее значения в банаховом пространстве Y.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00795) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № 00–15–96165).

Будем использовать обозначения $\operatorname{Ker} T = \{x \in \operatorname{dom} T : Tx = 0\}$, $\operatorname{Im} T = \{y \in Y : y = Tx, x \in \operatorname{dom} T\}$. Пространство $\operatorname{dom} T$ будем считать снабженным нормой графика оператора T, а именно $\left\{\|x\|_X^2 + \|Tx\|_Y^2\right\}^{1/2}$. Пространство $\operatorname{dom} T$ банахово, если оператор T замкнут. Будем считать, что $\operatorname{dom} T = X$ в тех случаях, когда речь идет о непрерывном операторе $T : X \to Y$. Будем говорить, что последовательность в банаховом пространстве X *частично сходится*, если она содержит сходящуюся подпоследовательность.

Оператор T называют *нормально разрешимым*, если подпространство $\operatorname{Im} T$ замкнуто в Y. Из теоремы о замкнутом графике следует, что замкнутый оператор нормально разрешим тогда и только тогда, когда оператор $T^{-1} : \operatorname{Im} T \to X/\operatorname{Ker} T$ непрерывен.

Замкнутый оператор $T : X \to Y$ называется *компактно разрешимым*, если оператор $T^{-1} : \operatorname{Im} T \to X/\operatorname{Ker} T$ компактен. Всякий компактно разрешимый оператор нормально разрешим.

Замкнутый оператор T нормально разрешим тогда и только тогда, когда каждая ограниченная (фундаментальная) последовательность, лежащая в $\operatorname{Im} T$, может быть накрыта при отображении T ограниченной (фундаментальной) в X последовательностью. Замкнутый оператор T компактно разрешим тогда и только тогда, когда каждая ограниченная в $\operatorname{Im} T$ последовательность может быть накрыта при отображении T частично сходящейся последовательностью.

Следующая лемма доказана в [2].

Лемма 1. *Замкнутый оператор T компактно разрешим тогда и только тогда, когда для каждой ограниченной в $\operatorname{dom} T$ последовательности x_n найдется лежащая в $\operatorname{dom} T$ и частично сходящаяся в X последовательность x_n', для которой $Tx_n' = Tx_n$.*

Лемма 2. *Замкнутый плотно определенный оператор $T : X \to Y$ компактно разрешим тогда и только тогда, когда компактно разрешим сопряженный оператор $T^* : Y^* \to X^*$.*

Доказательство. В [2] установлено, что оператор T^* компактно разрешим, если компактно разрешим оператор T. Докажем обратное утверждение. Пусть оператор T^* компактно разрешим. Тогда он нормально разрешим. Поскольку оператор T нормально разрешим в том и только в том случае, когда нормально разрешим оператор T^* [3, гл. IV, теорема 5.13], то T — нормально разрешимый оператор. Представим оператор T в виде композиции $T = i \circ \widetilde{T} \circ p$, где $p : X \to X/\operatorname{Ker} T$ — каноническая проекция на фактор-пространство, $i : \operatorname{Im} T \to Y$ — тождественное вложение, оператор $\widetilde{T} : X/\operatorname{Ker} T \to \operatorname{Im} T$ индуцирован оператором T. Оператор $\widetilde{T}$ замкнут и инъективно отображает $\operatorname{dom} \widetilde{T}$ на $\operatorname{Im} T$. Поэтому оператор $\widetilde{T}^{-1} : \operatorname{Im} T \to X/\operatorname{Ker} T$ непрерывен. Но тогда $(\widetilde{T}^*)^{-1} = (\widetilde{T}^{-1})^*$ [3, гл. III, теорема 5.30]. Поскольку p — непрерывный сюръективный оператор, а i — непрерывный оператор, то $T^* = p^* \circ \widetilde{T}^* \circ i^*$. Так как оператор T^* компактно разрешим, то компактно разрешим оператор $\widetilde{T}^*$ и, следовательно, компактен оператор $(\widetilde{T}^*)^{-1} = (\widetilde{T}^{-1})^*$. По теореме Шаудера оператор $\widetilde{T}^{-1}$ компактен, и поэтому оператор $\widetilde{T}$ компактно разрешим. Следовательно, компактно разрешим оператор T. Лемма доказана.

Последовательность $A = \left(A^k, d_A^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ банаховых пространств A^k и замкнутых плотно определенных операторов $d_A^k : A^k \to A^{k+1}$ называется *банаховым комплексом*, если $\operatorname{Im} d_A^{k-1} \subset \operatorname{Ker} d_A^k$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$.

Морфизмом $f : A \to B$ *банаховых комплексов* называется последовательность непрерывных операторов $f^k : A^k \to B^k$, удовлетворяющая условиям $f^k\big(\operatorname{dom} d_A^k\big) \subset \operatorname{dom} d_B^k$ и $d_B^k f^k a = f^{k+1} d_A^k a$ для всех $a \in \operatorname{dom} d_A^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Для каждого банахова комплекса A определены пространства когомологий $H^k A = \operatorname{Ker} d_A^k / \operatorname{Im} d_A^{k-1}$ и пространства редуцированных когомологий $\overline{H}^k A = \operatorname{Ker} d_A^k / \overline{\operatorname{Im} d_A^{k-1}}$. Пространство $H^k A$ — топологическое векторное пространство, топология которого задана полунормой, индуцированной нормой пространства A^k, пространство $\overline{H}^k A$ банахово.

Для банахова комплекса A определен такой банахов комплекс $WA = (W^k A, d_{WA}^k)_{k \in \mathbb{Z}}$, для которого $W^k A = \operatorname{dom} d_A^k, d_{WA}^k = d_A^k$. Каждому морфизму банаховых комплексов $f : A \to B$ очевидным образом соответствует морфизм $Wf : WA \to WB$. Таким образом, W является функтором, действующим из категории банаховых комплексов в подкатегорию комплексов, чьи дифференциалы непрерывны.

Надстройкой над банаховым комплексом A называется банахов комплекс $SA = \big(S^k A, d_{SA}^k\big)$, для которого $S^k A = A^{k-1}$, $d_{SA}^k = -d_A^{k-1}$.

Для банахова комплекса определен *сопряженный банахов комплекс*, для которого $(A^*)^k = (A^{-k})^*$, $d_{A^*}^k = \big(d_A^{-k-1}\big)^*$.

В дальнейшем в обозначениях будем опускать индексы в тех случаях, когда это не приводит к недоразумению.

Для произвольного банахова комплекса A определим банахов комплекс LA, полагая

$$L^k A = A^{k-1} \times A^k, \quad \|(a', a'')\|_{LA} = \{\|a'\|_A^2 + \|a''\|_A^2\}^{1/2}, \quad d_{LA}^k(a', a'') = (-a'', 0).$$

Для $a \in SWA$ положим $\gamma(a) = (a, da)$. Этим определен морфизм банаховых комплексов $\gamma : SWA \to LA$. Для каждого k отображение $\gamma^k : S^k WA \to L^k A$ является изометрией на замкнутое подпространство $\gamma^k(S^k WA)$ пространства $L^k A$. Дифференциалы комплексов SWA и LA непрерывны. Поэтому определен банахов комплекс $FA = LA/\gamma(SWA)$, имеющий непрерывные дифференциалы. Обозначим через $\varphi_A : LA \to FA$ каноническую проекцию.

Поскольку S, W и L — функторы, то и F является функтором. Этот функтор действует из категории банаховых комплексов в подкатегорию банаховых комплексов с непрерывными дифференциалами.

Формула $\psi_A a = \varphi_A(0, a)$ определяет морфизм $\psi_A : A \to FA$. Действительно, $\psi d_A a = \varphi(0, d_A a) = \varphi(-a, 0) = \varphi d_L(0, a) = d_{FA}\psi a$.

Лемма 3. *Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ оператор ψ_A^k отображает пространство A^k инъективно на плотное в $F^k A$ множество.*

Доказательство. Если $\psi a = 0$, то $(0, a) = (a', d_A a')$ для некоторого $a' \in \operatorname{dom} d_A$. Но тогда $a' = 0$ и $a = d_A a' = 0$. Отображение ψ инъективно. Пусть $(a', a'') \in LA$ и $\varepsilon > 0$. Ввиду плотной определенности оператора d_A найдется такое $a \in \operatorname{dom} d_A$, что $\|a' - a\|_A \le \varepsilon$. Тогда $\|\varphi(a', a'') - \varphi(0, a'' - d_A a)\|_{FA} = \|\varphi(a' - a, 0)\|_{FA} \le \varepsilon$. Установлена плотность пространства $\operatorname{Im}\psi_A$ в FA. Лемма доказана.

Предложение 1. *Для произвольного банахова комплекса A и его морфизма $\alpha : A \to B$ в комплекс B с непрерывными дифференциалами существует единственный морфизм $\tilde{\alpha} : FA \to B$ такой, что $\tilde{\alpha} \circ \psi_A = \alpha$.*

Доказательство. Формула $\tilde{\alpha}^k \varphi^k(a', a'') = \alpha^k a'' - d_B \alpha^{k-1} a'$ задает непрерывные отображения $\tilde{\alpha}^k : F^k A \to B^k$. Так как $d_B \tilde{\alpha}\varphi(a', a'') = d_B \alpha^k a'' =$

$\tilde{\alpha}\varphi(-a'', 0) = \tilde{\alpha}\varphi d_{LA}(a', a'') = \tilde{\alpha} d_{FA}\varphi(a', a'')$, операторы $\tilde{\alpha}^k$ образуют морфизм $\tilde{\alpha} : FA \to B$. Единственность морфизма $\tilde{\alpha}$ следует из леммы 3. Предложение доказано.

Предложение 1 означает, что подкатегория банаховых комплексов с непрерывными дифференциалами рефлективна в категории банаховых комплексов.

Морфизм $j : A \to B$ банаховых комплексов будем называть *вложением*, если операторы j^k инъективны и выполнено следующее условие (Г): если $ja \in \operatorname{dom} d_B$ и $d_B ja \in \operatorname{Im} j$, то $a \in \operatorname{dom} d_A$.

Вложение $j : A \to B$ банаховых комплексов будем называть *допустимым*, если для каждого $b \in \operatorname{dom} d_B$ существуют такие $a', a'' \in A$, что $ja' \in \operatorname{dom} d_B$ и $b = d_B ja' + ja''$.

Предложение 2. *Для произвольного банахова комплекса A морфизм $\psi_A : A \to FA$ является допустимым вложением. Если $\alpha : A \to B$ — допустимое вложение и комплекс B имеет непрерывные дифференциалы, то морфизм $\tilde{\alpha} : FA \to B$ является топологическим изоморфизмом.*

Доказательство. Инъективность операторов ψ_A^k установлена в лемме 3. Покажем, что выполнено условие (Г). Пусть $d_{FA}\psi_A a = \psi_A a_1$. Тогда $\varphi(0, a_1) = \varphi(-a, 0)$ и, следовательно, $\varphi(a, a_1) = 0$, $a \in \operatorname{dom} d_A$ и $d_A a = a_1$. Установлено, что ψ_A — вложение.

Пусть $\varphi(a_1, a_2)$ — произвольный элемент пространства $F^k A$. Тогда

$$\varphi(a_1, a_2) = \varphi(a_1, 0) + \varphi(0, a_2) = \varphi d_L(0, -a_1) + \varphi(0, a_2) = d_{FA}\psi_A(-a_1) + \psi_A a_2.$$

Вложение ψ_A допустимо.

Пусть теперь $\alpha : A \to B$ — допустимое вложение и B — комплекс с непрерывными дифференциалами. В соответствии с доказательством предложения 1 морфизм $\tilde{\alpha} : FA \to B$ задан формулой $\tilde{\alpha}\varphi(a', a'') = \alpha a'' - d_B \alpha a'$. Если $\tilde{\alpha}\varphi(a', a'') = 0$, то по свойству (Г) вложения α имеем $\alpha a' \in \operatorname{dom} d_A$ и $d_A a' = a''$. В этом случае $\varphi(a', a'') = 0$. Морфизм $\tilde{\alpha}$ инъективен.

Для произвольного $b \in B$ существуют такие a', a'', что $b = d_B \alpha a' + \alpha a''$. Но тогда $b = \tilde{\alpha}\varphi(-a', a'')$. Установлено, что морфизм $\tilde{\alpha}$ сюръективен. По теореме Банаха $\tilde{\alpha}$ — топологический изоморфизм. Предложение доказано.

Следствие. *Если A — банахов комплекс с непрерывными дифференциалами, то $\psi_A : A \to FA$ — топологический изоморфизм.*

Пусть $j : A \to B$ — произвольное допустимое вложение. Для $b \in W^k B$, $b = d_B ja' + ja''$ положим $\chi_j^k b = \varphi(-a', a'')$. Элемент $\chi_j^k b$ не зависит от выбора представления элемента b в виде $b = d_B ja' + ja''$. В самом деле, пусть $b = d_B ja_1 + ja_2$ — второе такое представление. Тогда $j(a_2 - a'') = d_B j(a' - a_1)$. В силу условия (Г) $d_A(a' - a_1) = a_2 - a''$. Следовательно, $\varphi(-a', a'') = \varphi(-a_1, a_2)$.

Лемма 4. *Для произвольного допустимого вложения $j : A \to B$ и произвольного $k \in \mathbb{Z}$ существует константа C_k, удовлетворяющая следующему условию: для любого $b \in W^k B$ существуют такие $a', a'' \in A$, что $b = d_B ja' + ja''$ и $\|a'\|_A \le C_k \|b\|_{WB}$, $\|a''\|_A \le C_k \|b\|_{WB}$.*

Доказательство. Операторы $d_B^k \circ j^k$ замкнуты, и поэтому пространства $X^k = \operatorname{dom}\bigl(d_B^k \circ j^k\bigr)$ банаховы. Формула $\alpha(a', a'') = d_B ja' + ja''$ задает сюръективный непрерывный оператор $\alpha : X^{k-1} \times X^k \to W^k B$. Используя теорему Банаха о гомоморфизме, заключаем, что искомая константа C_k существует. Лемма доказана.

Лемма 5. *Для произвольного допустимого вложения $j : A \to B$ операторы $\chi_j^k : W^k B \to F^k A$ образуют вложение комплекса WB в FA.*

Доказательство. Линейность отображений χ_j^k легко следует из определений. Если $\chi_j b = 0$, $b = d_B ja' + ja''$, то $\varphi(-a', a'') = 0$ и поэтому $a' \in WA$, $da' = -a''$, $b = -jda' + ja'' = 0$. Установлено, что отображения χ_j^k инъективны. По лемме 4 эти отображения непрерывны.

Пусть $b \in WB$ и $b = d_B ja' + ja''$. Тогда

$$d_{FA}\chi_j b = d_{FA}\varphi(-a', a'') = \varphi d_{LA}(-a', a'') = \varphi(-a'', 0),$$
$$\chi_j d_B b = \chi_j d_B ja'' = \varphi(-a'', 0).$$

Установлено, что χ_j — морфизм комплексов. Лемма доказана.

Замечание. Тождественное вложение $Id_A : A \to A$ является допустимым вложением. Будем использовать обозначение χ_A вместо χ_{Id_A}. Легко проверить, что для произвольного допустимого вложения $j : A \to B$ $\chi_j \circ W(j) = \chi_A, F(j) \circ \chi_j = \chi_B$. Кроме того, $\chi_A : WA \to FA$ является ограничением оператора $\psi_A : A \to FA$.

Лемма 6. *Для произвольного допустимого вложения $j : A \to B$ отображения $H^k(j) : H^k A \to H^k B$ являются топологическими изоморфизмами.*

Доказательство. Будем обозначать символом $[z]$ элемент когомологий, представленный циклом z. Пусть $[z] \in H^k A$ и $H(j)[z] = 0$. Тогда $jz = d_B b$ для некоторого $b \in WB$. Представим элемент b в виде $b = d_B ja' + ja''$. Так как $jz = d_B ja''$, по условию (Г) $a'' \in WA$ и $z = d_A a''$, $[z] = 0$. Установлено, что отображения $H^k(j)$ инъективны.

Пусть $h \in H^k B$. Найдется такой цикл $u \in WB$, что $[u] = h$ и $\|u\|_B \le 2\|h\|_{HB}$. По лемме 4 $u = d_B ja' + ja''$, где $\|a'\|_A \le C_k\|u\|_B$, $\|a''\|_A \le C_k\|u\|_B$. Тогда $d_B ja'' = 0$. По свойству (Г) $a'' \in WA$ и $d_A a'' = 0$. Кроме того, $[ja''] = h$ и $\|[a'']\|_{HA} \le 2C_k\|h\|_{HB}$. Установлено, что отображения $H^k(j)$ сюръективны и отображения $(H^k(j))^{-1}$ непрерывны. Непрерывность отображений $H^k(j)$ следует из непрерывности отображений j^k. Лемма доказана.

Лемма 7. *Для произвольного допустимого вложения $j : A \to B$ отображения $H^k(\chi_j) : H^k B \to H^k FA$ являются топологическими изоморфизмами.*

Доказательство. Согласно сделанному выше замечанию $H(\chi_j) \circ H(j) = H(\psi_A)$. По предложению 2 ψ_A — допустимое вложение. По лемме 6 $H(j)$ и $H(\psi_A)$ — топологические изоморфизмы. Следовательно, $H(\chi_j)$ — топологический изоморфизм. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $j : A \to B$ — произвольное допустимое вложение. Тогда*

1) *если для некоторого k операторы $d_B^k \circ j^k$ и $d_B^{k-1} \circ j^{k-1}$ компактно разрешимы и $\dim H^k B < \infty$, то оператор $\chi_j^k : W^k B \to F^k A$ компактен;*

2) *если χ_j^k — компактный оператор, то оператор $d_B^k \circ j^k$ компактно разрешим;*

3) *если χ_j^k — компактный оператор и оператор d_A^{k-1} нормально разрешим, то $d_B^{k-1} \circ j^{k-1}$ — компактно разрешимый оператор и $\dim H^k B < \infty$.*

Доказательство. 1. Пусть b_n — произвольная ограниченная последовательность в $W^k B$. Так как вложение j допустимо, то $\operatorname{Im} d_B^k = \operatorname{Im}\bigl(d_B^k \circ j^k\bigr)$. В силу компактной разрешимости оператора $d_B^k \circ j$ найдется частично сходящаяся в A^k последовательность a_n, для которой $d_B^k ja_n = d_B^k b_n$. Переходя к подпоследовательности, будем считать, что последовательность a_n сходится в A^k.

Поскольку $\chi_j^k j a_n = \varphi(0, a_n)$, последовательность $\chi_j^k j a_n$ сходится в $F^k A$. Пусть $z_n = b_n - j^k a_n$. Последовательность z_n ограничена в B^k, и $d_B^k z_n = 0$. Так как $\dim H^k B < \infty$, то в $\operatorname{Ker} d_B^k$ найдется такое конечномерное подпространство H, что $\operatorname{Ker} d_B^k = \operatorname{Im} d_B^{k-1} \oplus H$. Представим каждый элемент z_n в виде $z_n = u_n + h_n$, где $u_n \in \operatorname{Im} d_B^{k-1}$ и $h_n \in H$. Последовательность h_n ограничена в B и лежит в конечномерном пространстве, значит, она частично сходится в B. Поскольку $d_B^k h_n = 0$, последовательность h_n частично сходится в $W^k B$. В силу непрерывности отображения χ_j^k частично сходится последовательность $\chi_j^k h_n$. Переходя к подпоследовательности, будем считать, что последовательность $\chi_j^k h_n$ сходится.

Последовательность u_n ограничена в B^k и лежит в $\operatorname{Im} d_B^{k-1} = \operatorname{Im}\big(d_B^{k-1} \circ j^{k-1}\big)$. В силу компактной разрешимости оператора $d_B^{k-1} \circ j^{k-1}$ существует частично сходящаяся в A^{k-1} последовательность v_n, для которой $d_B^{k-1} j^{k-1} v_n = u_n$. Поскольку $\chi_j^k u_n = \varphi(-v_n, 0)$, последовательность $\chi_j^k(u_n)$ частично сходится. Но тогда частично сходится и последовательность $\chi_j^k b_n = \chi_j^k j^k a_n + \chi_j^k h_n + \chi_j^k u_n$. Установлено, что оператор χ_j^k компактен.

2. Пусть a_n — произвольная ограниченная последовательность в $\operatorname{dom}\big(d_B^k \circ j^k\big)$. Последовательность $j^k a_n$ ограничена в $W^k B$, $\chi_j^k j^k a_n = \varphi(0, a_n)$ и оператор χ_j^k компактен, так что последовательность $\varphi(0, a_n)$ частично сходится в $F^k A$. Это означает существование такой последовательности c_n в $W^{k-1} A$, что последовательность $\big(c_n, a_n + d_A^{k-1} c_n\big)$ частично сходится в LA. Но тогда последовательность $a_n + d_A^{k-1} c_n$ частично сходится в A и $d_B^k j^k\big(a_n + d_A^{k-1} c_n\big) = d_B^k j^k a_n$. По лемме 1 оператор $d_B^k \circ j^k$ компактно разрешим.

3. Пусть a_n — произвольная ограниченная последовательность в $\operatorname{dom}\big(d_B^{k-1} \circ j^{k-1}\big)$. Тогда $d_B^{k-1} j^{k-1} a_n$ — ограниченная последовательность в $W^k B$. В силу компактности оператора χ_j^k можно считать, что последовательность $\varphi(-a_n, 0)$ сходится в $F^k A$. Тогда найдется такая последовательность c_n в $W^{k-1} A$, что последовательность $\big(c_n - a_n, d_A^{k-1} c_n\big)$ сходится в $L^k A$. В силу нормальной разрешимости оператора d_A^{k-1} найдется такая сходящаяся в $W^{k-1} A$ последовательность x_n, что $d_A^{k-1} x_n = d_A^{k-1} c_n$. Тогда последовательность $a_n - c_n + x_n$ сходится в A^{k-1} и $d_B^{k-1} j^{k-1}(a_n - c_n + x_n) = d_B^{k-1} j^{k-1} a_n$. По лемме 1 оператор $d_B^{k-1} \circ j^{k-1}$ компактно разрешим.

Из условия нормальной разрешимости оператора d_A^{k-1} следует, что пространство $H^k A$ отделимо (хаусдорфово). По лемме 6 отделимо пространство $H^k B$. Из условия компактности оператора χ_j^k вытекает, что оператор $H^k(\chi_j) : H^k B \to H^k F A$ компактен. По лемме 7 $H^k(\chi_j)$ — топологический изоморфизм. Но тогда $\dim H^k B < \infty$. Теорема доказана.

Пусть A^* — банахов комплекс, сопряженный к банахову комплексу A. Определим спаривание пространств $L^k A$ и $L^{-k} S^{-1} A^*$, полагая

$$\langle (a', a''), (f', f'') \rangle = \langle a', f'' \rangle + \langle a'', f' \rangle. \tag{1}$$

Лемма 8. *Для произвольного банахова комплекса A комплекс $LS^{-1}A^*$ сопряжен к комплексу LA относительно спаривания* (1). *При этом подпространство $\gamma_{S^{-1}A^*}(W^{-k-1}A^*)$ является аннулятором подпространства $\gamma_A(W^{k-1}SA)$.*

Доказательство. С точностью до обозначений эта лемма совпадает со следующим известным утверждением [3, гл. III, § 5, п. 5]: пусть T — плотно определенный оператор, тогда обратный график оператора $-T^*$ совпадает с аннулятором графика оператора T. Лемма доказана.

Следствие. *Спаривание* (1) *индуцирует спаривание*

$$\langle a, \varphi_{A^*}(f,g)\rangle = -\langle a,g\rangle + \langle d_A a, f\rangle \tag{2}$$

пространств W^kA *и* $F^{-k}A^*$, *а также спаривание*

$$\langle \varphi_A(a_1,a_2), f\rangle = -\langle a_1, d_{A^*}f\rangle + \langle a_2, f\rangle \tag{3}$$

пространств F^kA *и* $W^{-k}A^*$. *Относительно этих спариваний пространство* $F^{-k}A^*$ *сопряжено к* W^kA, *а пространство* $W^{-k}A^*$ *сопряжено к* F^kA.

Вложение $j : A \to B$ будем называть *регулярным*, если существуют морфизм $R : B \to A$ и последовательность непрерывных операторов $\Pi = (\Pi^k : B^k \to A^{k-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ такие, что

$$b = jRb + d_B j\Pi b + j\Pi d_B b \tag{4}$$

для каждого $b \in WB$.

Каждое регулярное вложение допустимо. Для регулярного вложения j

$$\chi_j b = \varphi(-\Pi b, Rb + \Pi d_B b). \tag{5}$$

Если $a \in \operatorname{dom}(d_B \circ j)$, то по формуле (4)

$$ja = jRja + d_B j\Pi ja + j\Pi d_B ja. \tag{6}$$

Поскольку все слагаемые в (6), кроме $d_B j\Pi ja$, принадлежат $\operatorname{Im} j$, по условию (Г) $d_B j\Pi ja = jd_A\Pi ja$. Поэтому

$$a = Rja + d_A\Pi ja + \Pi d_B ja \tag{7}$$

для любого $a \in \operatorname{dom}(d_B \circ j)$.

Если $a \in WA$, то формула (7) дает равенство

$$a = Rja + d_A\Pi ja + \Pi j d_A a. \tag{8}$$

Формулы (4) и (8) означают, что $W(j) : WA \to WB$ и $W(R) : WB \to WA$ — взаимно обратные гомотопические эквивалентности коцепных комплексов WA и WB.

Вложение $j : A \to B$ назовем *плотным*, если $j(W^kA)$ плотно в W^kB для каждого $k \in \mathbb{Z}$.

Лемма 9. *Для любого плотного регулярного вложения* $j : A \to B$ *морфизм* $j^* : B^* \to A^*$ *является регулярным вложением.*

Доказательство. Из условия плотности вложения j следует, что подпространство $\operatorname{Im} j^k$ плотно в B^k. Поэтому морфизм j^* инъективен. Покажем, что для j^* выполнено условие (Г). Пусть $f \in B^*$, $j^*f \in \operatorname{dom} d_A^*$ и $d_A^* j^* f = j^* g$. Тогда для любого $a \in \operatorname{dom} d_A$ выполнено равенство $\langle jd_A a, f\rangle = \langle ja, g\rangle$. Ввиду плотности подпространства $j(WA)$ в WB получаем, что $\langle d_B b, f\rangle = \langle b, g\rangle$ для любого $b \in \operatorname{dom} d_B$. Но тогда $f \in \operatorname{dom} d_B^*$ и $d_B^* f = g$.

Пусть для вложения j выполнена формула (4). Для произвольных $f \in WA^*$ и $a \in WA$ по формуле (8) имеем

$$\langle d_A a, j^*\Pi^* f\rangle = \langle \Pi j d_A a, f\rangle = \langle a - Rja - d_A\Pi ja, f\rangle = \langle a, f - j^*R^*f - j^*\Pi^* d_A^* f\rangle.$$

Следовательно, $j^*\Pi^* f \in \operatorname{dom} d_A^*$ и

$$d_A^* j^*\Pi^* f = f - j^*R^*f - j^*\Pi^* d_A^* f. \tag{9}$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Если $j : A \to B$ — плотное регулярное вложение, то $(\chi_j^k)^* = -\chi_{j^*}^{-k}$.*

Доказательство. Пусть $b \in W^k B$, $f \in W^{-k} A^*$. Используя равенства (5) и (3), получаем

$$\langle \chi_j b, f\rangle = \langle \varphi(-\Pi b, Rb + \Pi d_B b, f\rangle = \langle \Pi b, d_{A^*} f\rangle + \langle Rb + \Pi d_B b, f\rangle.$$

Аналогично равенства (9), (5) и (2) дают

$$\begin{aligned}\langle b, \chi_{j^*} f\rangle &= \langle b, \varphi(-\Pi^* f, R^* f + \Pi^* d_A^* f)\rangle \\ &= -\langle b, R^* f + \Pi^* d_A^* f\rangle - \langle d_B b, \Pi^* f\rangle = -\langle Rb + \Pi d_B b, f\rangle - \langle \Pi b, d_{A^*} f\rangle.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Для плотного регулярного вложения $j : A \to B$ оператор $\chi_j^k : W^k A \to F^k A$ компактен тогда и только тогда, когда операторы $d_B^k \circ j^k$ и $d_B^{k-1} \circ j^{k-1}$ компактно разрешимы и $\dim H^k B < \infty$.*

Доказательство. В теореме 1 доказаны достаточность указанных условий для компактности оператора χ_j^k и необходимость одного из условий, а именно условия компактной разрешимости оператора $d_B^k \circ j^k$. Докажем необходимость остальных условий.

Пусть оператор χ_j^k компактен. По лемме 10 компактен оператор $\chi_{j^*}^{-k}$. По теореме 1 компактно разрешим оператор $d_{A^*}^{-k} \circ (j^*)^{-k} = \left(d_A^{k-1}\right)^* \circ (j^k)^* = \left(j^k \circ d_A^{k-1}\right)^*$. Так как $j^k \circ d_A^{k-1} \subset d_B^{k-1} \circ j^{k-1}$ и подпространство $\operatorname{Im}\left(j^k \circ d_A^{k-1}\right)$ плотно в $\operatorname{Im}\left(d_B^{k-1} \circ j^{k-1}\right)$ ввиду плотности вложения j, то $\left(d_B^{k-1} \circ j^{k-1}\right)^* \subset \left(j^k \circ d_A^{k-1}\right)^*$ и $\operatorname{Ker}\left(d_B^{k-1} \circ j^{k-1}\right)^* = \operatorname{Ker}\left(j^k \circ d_A^{k-1}\right)^*$. При этих условиях из компактной разрешимости оператора $\left(j^k \circ d_A^{k-1}\right)^*$ следует компактная разрешимость оператора $\left(d_B^{k-1} \circ j^{k-1}\right)^*$. По лемме 2 компактно разрешим оператор $d_B^{k-1} \circ j^{k-1}$.

Из компактной разрешимости оператора $d_B^{k-1} \circ j^{k-1}$ следует его нормальная разрешимость. А поскольку $\operatorname{Im}\left(d_B^{k-1} \circ j^{k-1}\right) = \operatorname{Im} d_B^{k-1}$, нормально разрешим и оператор d_B^{k-1}. По теореме 1 $\dim H^{k-1} B < \infty$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $j : A \to B$ — регулярное вложение, для которого операторы R^k и Π^k компактны для каждого $k \in \mathbb{Z}$. Тогда операторы χ_j^k компактны.*

Доказательство. Пусть a_n — ограниченная в $\operatorname{dom}(d_B \circ j)$ последовательность. По формуле (7) $a_n = Rja_n + \Pi d_B j a_n + d_A \Pi j a_n$. В силу компактности операторов R и Π последовательность $a'_n = Rja_n + \Pi d_B j a_n$ частично сходится в A. Так как $d_B j d_A \Pi j a_n = d_B d_B j \Pi j a_n = 0$, то $d_B j a_n = d_B j a'_n$ и по лемме 1 оператор $d_B j$ компактно разрешим.

Как отмечено в доказательстве теоремы 2, из компактной разрешимости оператора $d_B \circ j$ следует нормальная разрешимость оператора d_B. Поэтому пространства когомологий $H^k B$ отделимы (банаховы). Для произвольной ограниченной последовательности h_n в $H^k B$ выберем ограниченную последовательность циклов z_n такую, что $[z_n] = h_n$. По формуле (4) $z_n = jRz_n + d_B j \Pi b$, $[z_n] = [jRz_n]$. В силу компактности оператора R последовательность $[jRz_n]$ частично сходится. Установлено, что всякая ограниченная последовательность в банаховом пространстве $H^k B$ частично сходится. Это возможно только в том случае, когда $\dim H^k B < \infty$. По теореме 1 операторы χ_j^k компактны. Теорема доказана.

Пример. Пусть $T : X \to Y$ — плотно определенный замкнутый оператор. Рассмотрим комплекс A, для которого $A^0 = X$, $A^1 = Y$, $A^k = 0$ при $k \neq 0, 1$, $d_A^0 = T$. В этом случае оператор χ_A^0 совпадает с тождественным вложением $\operatorname{dom} T$ в X. По теореме 1 оператор этого вложения компактен тогда и только тогда, когда оператор T компактно разрешим и $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$. Оператор χ_A^1 является композицией канонического вложения слагаемого Y в сумму $X \oplus Y$ и канонической проекции $X \oplus Y \to X \oplus Y/\Gamma$, где Γ — график оператора T. По теореме 2 этот оператор компактен тогда и только тогда, когда оператор T компактно разрешим и $\dim(Y/\operatorname{Im} T) < \infty$.

Пусть M — замкнутое компактное n-мерное гладкое многообразие. Будем использовать обозначение $D'(M, E)$ для пространства сечений распределений дифференцируемого векторного расслоения E над M. Пусть $pdo_m(E \to F)$ — множество всех классических псевдодифференциальных операторов порядка m, действующих из сечений расслоения E в сечения расслоения F. На замкнутом компактном многообразии каждый оператор $T \in pdo_m(E \to F)$ является оператором, действующим из $D'(M, E)$ в $D'(M, F)$. При этом он переводит $C^\infty(M, E)$ в $C^\infty(M, F)$. Будем рассматривать псевдодифференциальные операторы как операторы, действующие в общих соболевских пространствах $H_p^s(M, E)$ [4, п. 1.2.1.2]. Так как $H_p^s(M, E) \subset D'(M, E)$, для любых $s, r \in \mathbb{R}$ и $p, q \in (1, \infty)$ определено сужение $T : H_p^s(M, E) \to H_q^r(M, F)$ оператора $T : D'(M, E) \to D'(M, F)$. При этом предполагаем, что для этого сужения $\operatorname{dom} T = \{u \in H_p^s(M, E) : Tu \in H_q^r(M, F)\}$. Для каждого $T \in pdo_m(E \to F)$ оператор $T : H_p^s(M, E) \to H_q^r(M, F)$ замкнут и плотно определен. Если при этом $r = s - m$ и $p = q$, то этот оператор непрерывен [4, п. 2.3.2.5].

Для пространств $H_p^s(M, E)$ справедлива следующая теорема вложения [5, п. 4.6.2]: если $r \le s$ и $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \le \frac{s-r}{n}$, то $H_p^s(M, E) \subset H_q^r(M, F)$, причем оператор этого вложения непрерывен. Если при этом $r < s$, то оператор вложения компактен [4, п. 1.2.1.2].

Пусть $E = (E^k, P^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ — дифференциальный комплекс над M, $P^k \in do_m(E^k \to E^{k+1})$ — дифференциальные операторы порядка $m > 0$ (m одно и то же для всех k). Рассматривая P^k как операторы $P^k : H_p^r(M, E^k) \to H_p^r(M, E^{k+1})$, получаем банахов комплекс $H_p^r(M, E) = (H_p^r(M, E^k), P^k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Формула $\lambda^k \varphi(u_1, u_2) = u_2 - P^{k-1} u_1$ корректно определяет линейное отображение $\lambda^k : F^k H_p^r(M, E) \to D'(M, E^k)$. Легко проверить, что это отображение инъективно и $\operatorname{Im} \lambda^k$ совпадает с пространством

$$\widetilde{F}^k H_p^r(M, E) = \{u \in D'(M, E^k) : \|u\|_{\widetilde{F}} < \infty\},$$

где

$$\|u\|_{\widetilde{F}} = \inf_{v \in D'(M, E^{k-1})} \bigl\{ \|u + P^{k-1} v\|_{H_p^r}^2 + \|v\|_{H_p^r}^2 \bigr\}^{1/2}.$$

Отображение λ^k является изометрией пространства $F^k H_p^r(M, E)$ на пространство $\widetilde{F}^k H_p^r(M, E)$, снабженное нормой $\|\cdot\|_{\widetilde{F}}$.

Теорема 4. *Пусть E — эллиптический дифференциальный комплекс над M,*

$$s \le r + m, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \le \frac{r + m - s}{n}. \tag{10}$$

Тогда $W^k H_p^r(M, E) \subset \widetilde{F}^k H_q^s(M, E)$, причем оператор этого вложения непрерывен. Если к тому же $s < r + m$, то этот оператор компактен.

Доказательство. По теореме вложения $H^s_q(M,E) \subset H^{s-m}_q(M,E)$ и поэтому определено вложение $j : H^s_q(M,E) \to H^{s-m}_q(M,E)$ банаховых комплексов.

Эллиптический комплекс E обладает параметриксом [6, п. 2.6.4]. Значит, существуют такие псевдодифференциальные операторы $R^k \in pdo_{-\infty}(E^k \to E^k)$ и $V^k \in pdo_{-m}(E^k \to E^{k-1})$, что

$$PVu + VPu = u - Ru \tag{11}$$

для любого $u \in D'(M,E)$.

Операторы

$$R^k : H^{s-m}_q(M,E^k) \to H^s_q(M,E^k), \quad V^k : H^{s-m}_q(M,E^k) \to H^s_q(M,E^{k-1})$$

непрерывны. Поэтому из формулы (11) следует, что вложение j регулярно. Следовательно, операторы $\chi^k_j : W^k H^{s-m}_q(M,E) \to F^k H^s_q(M,E)$ непрерывны. Легко проверить, что отображение $\lambda^k \circ \chi^k$ совпадает с тождественным вложением $W^k H^{s-m}_q(M,E) \to \widetilde{F}^k H^s_q(M,E)$. По теореме вложения $H^r_p(M,E^k) \subset H^{s-m}_q(M,E^k)$, если выполнены условия (10), причем оператор этого вложения непрерывен. Этот оператор компактен, если при этом $r > s-m$. Значит, $W^k H^r_p(M,E) \subset W^k H^{s-m}_q(M,E) \subset \widetilde{F}^k H^s_q(M,E)$. Оператор этого вложения непрерывен, если выполнены условия (10), и компактен, если к тому же $r > s-m$. Теорема доказана.

В частном случае, когда $E = \Lambda T^*M$ — комплекс де Рама на многообразии M, $r = s = 0$, теорема 4 совпадает с основным результатом работы [1]: если $1/p - 1/q \le 1/n$, то $W^k L_p(M,E) \subset \widetilde{F}^k L_q(M,E)$ и оператор этого вложения компактен.

Покажем, что этот результат Киченассами справедлив для компактных многообразий с краем. Пусть M — компактное n-мерное гладкое многообразие, $L_p(M)$ — банахов L_p-комплекс де Рама на M. Можно считать, что M — область с гладкой границей в некотором компактном замкнутом многообразии $\widetilde{M}$. В качестве $\widetilde{M}$ можно рассмотреть дубль многообразия M. Как и в случае замкнутого многообразия $\widetilde{M}$, определены пространства $\widetilde{F}^k L_p(M)$, состоящие из тех потоков ω на $\operatorname{int} M$, для которых $\|\omega\|_{\widetilde{F}} < \infty$, где

$$\|\omega\|_{\widetilde{F}} = \inf_{\varphi \in L^{k-1}_p(M)} \left\{ \|\omega - d\varphi\|^2_{L_p} + \|\varphi\|^2_{L_p} \right\}^{1/2}.$$

Существует непрерывный оператор $\alpha : W^k L_p(M) \to W^k L_p(\widetilde{M})$ такой, что $\alpha\omega|_M = \omega$ для каждой формы $\omega \in W^k L_p(M)$ [7]. Пусть $\beta : \widetilde{F}^k L_q(\widetilde{M}) \to \widetilde{F}^k L_q(M)$ — оператор ограничения, $i : W^k L_p(\widetilde{M}) \to \widetilde{F}^k L_q(\widetilde{M})$ — оператор вложения. При $1/p - 1/q \le 1/n$ оператор $\beta \circ i \circ \alpha : W^k L_p(M) \to \widetilde{F}^k L_q(M)$ определен и компактен. Этот оператор совпадает с оператором вложения $W^k L_p(M) \to \widetilde{F}^k L_q(M)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kichenassamy S.* Compactness theorems for differential forms // Comm. Pure Appl. Math. 1989. V. 42, N 1. P. 47–53.
2. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О нормальной и компактной разрешимости линейных операторов // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 49–59.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
4. *Ремпель Ш., Шульце Б. В.* Теория индекса эллиптических задач. М.: Мир, 1986.

5. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

6. *Тарханов Н. Н.* Метод параметрикса в теории дифференциальных комплексов. Новосибирск: Наука, 1990.

7. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Интегральное представление интеграла дифференциальной формы // Функциональный анализ и математическая физика. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1985.

Статья поступила 1 ноября 2002 г.

Кузьминов Владимир Иванович, *Шведов Игорь Александрович*
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kuzminov@math.nsc.ru, shvedov@math.nsc.ru