Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 517.54

УСТОЙЧИВОСТЬ В ТЕОРЕМАХ КОШИ И МОРЕРЫ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ АНАЛОГИ

А. П. Копылов, М. В. Коробков, С. П. Пономарев

Аннотация: Получены критерии ограниченности искажения отображения через интегральную оценку его функции кратности без каких-либо априорных предположений о дифференциальных свойствах этого отображения. Наиболее ясную и в некотором роде окончательную форму имеет результат для комплексных функций $f : \Delta \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ одной комплексной переменной. Найденные результаты распространены на случай многомерных систем уравнений Бельтрами.

Ключевые слова: устойчивость в теоремах Коши и Мореры, голоморфные функции, системы типа Бельтрами, отображения с ограниченным искажением

Полученные в настоящей работе интегральные критерии ограниченности коэффициента искажения отображения усиливают и обобщают результаты работ [1–4].

Наиболее ясную и в некотором роде окончательную форму имеет результат для комплексных функций $f : \Delta \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ одной комплексной переменной, т. е. для ситуации, когда класс отображений с ограниченным искажением совпадает с классом решений уравнений Бельтрами

$$f_{\bar z}(z) = q(z) f_z(z), \tag{1}$$

где

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\Delta} |q(z)| = q_0 < 1 \tag{2}$$

(см. теорему 3). При этом особое значение имеет то обстоятельство, что теорему 3 естественно рассматривать как утверждение об устойчивости в классических теоремах Коши и Мореры о голоморфных функциях.

Нами установлены также теоремы типа Коши и Мореры для решений многомерных систем Бельтрами.

Всюду в дальнейшем Δ — область (открытое связное множество) в вещественном арифметическом евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел будем естественным образом отождествлять с $\mathbb{R}^2$. Напомним, что непрерывное отображение $f = (f_1, \dots, f_n) : \Delta \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным искажением* [5], если оно удовлетворяет следующим условиям:

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02–01–01009, 02–01–06030), INTAS (код проекта 97–10170), гранта № 8 конкурса-экспертизы РАН для молодых ученых и гранта государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (код проекта 00–15–96165).

(i) $f \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Delta)$;

(ii) $J(f,x) = \det\bigl(\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\bigr) \geq 0$ п. в. в Δ;

(iii) существует постоянная $K \geq 1$ такая, что $|f'(x)|^n \leq K n^{n/2} J(f,x)$ п. в. в Δ, где $|f'(x)| = \Bigl(\sum\limits_{k,l=1}^{n} (\frac{\partial f_k}{\partial x_l})^2\Bigr)^{1/2}$ — гильбертова норма производной $f'(x)$. Наименьшая из всех возможных постоянная K называется *коэффициентом искажения*[1)] отображения f [5].

Хорошо известно (см. там же), что если $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением, то f является открытым (т. е. переводит открытые множества в открытые), изолированным (т. е. прообраз $f^{-1}(y)$ любой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек) и сохраняет ориентацию. Напомним, что непрерывное отображение f *сохраняет ориентацию*, если для каждой подобласти $\Delta_1 \Subset \Delta$ и точки $y \notin f(\partial\Delta_1)$ выполнено неравенство

$$\deg(y, f, \Delta_1) \geq 0, \tag{3}$$

где через $\deg(y, f, \Delta_1)$ обозначена топологическая степень сужения $f|_{\Delta_1}$ в точке y (определение и свойства топологической степени см., например, в [5, 6]).

Нам понадобятся еще следующие обозначения. Всюду в дальнейшем $Q = Q(x,r)$ есть n-мерный куб $[x_1 - r, x_1 + r] \times \dots \times [x_n - r, x_n + r]$, ∂Q — граница куба Q, ориентированная по внешней нормали, $|E|$ — мера Лебега множества E, $N(f|_E, \cdot)$ — функция кратности отображения $f|_E$, т. е. $N(f|_E, y) = \mathrm{card}\,(f^{-1}(y) \cap E)$. Как показано в [6, с. 216], функция $N(f|_E, \cdot)$ измерима для любых непрерывного отображения $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ и борелевского множества $E \subset \Delta$, поэтому определена функция множества $\Phi(E) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N(f|_E, y)\, dy$.

1. Утверждения этого пункта справедливы как для плоских ($n = 2$), так и для пространственных ($n \geq 3$) отображений.

Теорема 1. *Пусть непрерывное отображение $f = (f_1, \dots, f_n) : \Delta \to \mathbb{R}^n$, $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, сохраняет ориентацию. Предположим, далее, что $\Phi(E) < \infty$ для любого компактного множества $E \subset \Delta$. Тогда f является отображением с ограниченным искажением в том и только том случае, если существует константа $M > 0$ такая, что для любого куба $Q \subset \Delta$ и произвольной пары номеров $k, l = 1, 2, \dots, n$ справедливо неравенство*

$$\Biggl| \int\limits_{\partial Q} f_k\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_l} \wedge \ldots \wedge dx_n \Biggr| \leq M (\Phi(Q))^{\frac{1}{n}} |Q|^{\frac{n-1}{n}}. \tag{4}$$

Дифференциальную форму $f_k\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_l} \wedge \ldots \wedge dx_n$, фигурирующую в левой части неравенств (4), будем обозначать символом ω_{kl}.

При дополнительном предположении, что отображение f является псевдомонотонным[2)], сформулированный критерий был установлен в теореме 4 работы [3] третьим из авторов настоящей статьи. Тем самым теорема 1 существенно усиливает указанный результат из [3].

[1)] В [5] дано несколько иное, хотя и качественно эквивалентное определение коэффициента искажения с помощью операторной (а не гильбертовой) нормы f'.

[2)] Согласно понятиям, введенным в [3], отображение f называется *псевдомонотонным*, если существует константа $C \geq 0$ такая, что $\operatorname{diam} f(Q) \leq C \operatorname{diam} f(\partial Q)$ для любого $Q \subset \Delta$. Всякое отображение с ограниченным искажением псевдомонотонно, так как оно является открытым, см. выше.

В работе [2] было получено похожее утверждение, но при еще больших априорных ограничениях на f. А именно, в [2] доказано, что непрерывное изолированное открытое отображение f является отображением с ограниченным искажением в том и только том случае, когда для для любого куба $Q \subset \Delta$ и произвольной пары номеров $k, l = 1, 2, \ldots, n$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{\partial Q} \omega_{kl}\right| \le M(\|N(f|_Q)\| |f(Q)|)^{\frac{1}{n}} |Q|^{\frac{n-1}{n}}, \tag{5}$$

где $\|N(f|_Q)\| = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^n} N(f|_Q, y)$. Здесь нужно учесть ту (несущественную) техническую особенность, что, в отличие от терминологии, принятой в данной работе, в [2] (как, впрочем, и в [1, 3, 5]) рассматриваются отображения с ограниченным искажением, удовлетворяющие вместо (ii) условию

(ii$'$) $J(f, x)$ не меняет знака в Δ.

Такие отображения в зависимости от знака якобиана $J(f, x)$ либо сохраняют, либо обращают ориентацию (последнее означает, что неравенство (3) для этих отображений выполняется с обратным знаком). Отметим, что всякое непрерывное изолированное открытое отображение $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$, $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, либо сохраняет, либо обращает ориентацию, причем $\|N(f|_Q)\|_C < \infty$ для $Q \subset \Delta$ (это следует, например, из результатов работ [5, 7], см. также [2]).

Доказательство теоремы 1. В силу упомянутой теоремы 4 из [3] и сделанных замечаний требуется доказать только достаточность условия нашей теоремы.

Итак, пусть отображение $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет соответствующим предположениям теоремы 1. Используя аппроксимацию куба Q кубами Q_j изнутри и совершая предельный переход в (4), как это сделано в начале доказательства теоремы 2 работы [2] (см. [2, с. 177]), получаем, что для каждого куба $Q \subset \Delta$ выполняются неравенства

$$\left|\int\limits_{\partial Q} \omega_{kl}\right| \le M(\Phi(\operatorname{int} Q))^{\frac{1}{n}} |Q|^{\frac{n-1}{n}} < \infty, \quad k, l \in \{1, \ldots, n\}, \tag{4$'$}$$

где через $\operatorname{int} Q$ обозначена внутренность куба Q. Тогда из теоремы 1 статьи [3] следует, что $f \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Delta)$. Так как по условию доказываемой теоремы отображение f непрерывно и сохраняет ориентацию, то по теореме 2.5 из [8, с. 225] для f выполнено условие (ii) неотрицательности якобиана

$$J(f, x) \ge 0 \quad \text{п. в. в } \Delta. \tag{6}$$

Это свойство можно вывести также и из теоремы 5.1 из [8, с. 116] о W^1_n-дифференцируемости f почти всюду в Δ.

Применяя формулу Стокса к левой части неравенств (4$'$), можем переписать их в виде

$$\left|\int\limits_{Q} \frac{\partial f_k}{\partial x_l}\, dx\right| \le M(\Phi(\operatorname{int} Q))^{\frac{1}{n}} |Q|^{\frac{n-1}{n}} < \infty, \quad k, l \in \{1, \ldots, n\}. \tag{7}$$

Исходя из того, что свойство быть отображением с коэффициентом искажения, не превосходящим K, является локальным, зафиксируем произвольную область $D \subset \Delta$, замыкание которой компактно и содержится в Δ. Тогда в силу условия теоремы 1 имеем

$$\Phi(D) < \infty. \tag{8}$$

Пусть $U \subset D$ — непустое открытое множество. Докажем, что справедливы неравенства

$$\left| \int\limits_U \frac{\partial f_k}{\partial x_l}\, dx \right| \le M(\Phi(U))^{\frac{1}{n}} |U|^{\frac{n-1}{n}} < \infty, \quad k, l \in \{1, \ldots, n\}. \tag{9}$$

С этой целью представим U в виде суммы кубов:

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, \quad \operatorname{int} Q_{j_1} \cap \operatorname{int} Q_{j_2} = \varnothing \text{ при } j_1 \ne j_2.$$

Вследствие (7) имеем для каждого номера $m \in \mathbb{N}$

$$\left| \int\limits_{\bigcup_{j=1}^{m} Q_j} \frac{\partial f_k}{\partial x_l}\, dx \right| \le M \sum_{j=1}^{m} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} N(f|_{\operatorname{int} Q_j}, y)\, dy \right)^{\frac{1}{n}} |Q_j|^{\frac{n-1}{n}}, \quad k, l \in \{1, \ldots, n\}.$$

Применяя к правой части неравенство Гёльдера для конечных сумм, получаем

$$\left| \int\limits_{\bigcup_{j=1}^{m} Q_j} \frac{\partial f_k}{\partial x_l}\, dx \right| \le M \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{m} N(f|_{\operatorname{int} Q_j}, y)\, dy \right)^{\frac{1}{n}} \left(\sum_{j=1}^{m} |Q_j| \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} N(f|_{(\cup_{j=1}^m \operatorname{int} Q_j)}, y)\, dy \right)^{\frac{1}{n}} \left(\sum_{j=1}^{m} |Q_j| \right)^{\frac{n-1}{n}}, \quad k, l \in \{1, \ldots, n\}. \tag{10}$$

Так как производная $\frac{\partial f_k}{\partial x_l}$ суммируема на $D \supset U$, а правая часть (10) монотонна (по m), то законен предельный переход в неравенствах (10) при $m \to \infty$, который и дает нам искомое соотношение (9).

Пусть теперь E — произвольное компактное подмножество D. Установим справедливость неравенств

$$\left| \int\limits_E \frac{\partial f_k}{\partial x_l}\, dx \right| \le M(\Phi(E))^{\frac{1}{n}} |E|^{\frac{n-1}{n}} < \infty, \quad k, l \in \{1, \ldots, n\}. \tag{11}$$

С этой целью представим E в виде убывающей последовательности открытых множеств

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j, \quad U_{j+1} \subset U_j \subset D.$$

Вследствие уже доказанных неравенств (9) для каждого номера $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\left| \int\limits_{U_j} \frac{\partial f_k}{\partial x_l}\, dx \right| \le M \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} N(f|_{U_j}, y)\, dy \right)^{\frac{1}{n}} |U_j|^{\frac{n-1}{n}}, \quad k, l \in \{1, \ldots, n\}. \tag{12}$$

Конечность величины $\Phi(D)$ (см. (8)) влечет конечность $N(f|_D, y)$ для п. в. $y \in \mathbb{R}^n$. Если $N(f|_D, y) < \infty$, то, как нетрудно показать, $f^{-1}(y) \cap U_j = f^{-1}(y) \cap E$

при достаточно больших j. Поэтому $N(f|_{U_j}, y) \to N(f|_E, y)$ для п. в. $y \in \mathbb{R}^n$. Последнее вместе с неравенством (8) позволяет нам применить теорему Лебега о предельном переходе к обеим частям неравенств (12), откуда, в свою очередь, получаем нужные нам неравенства (11).

Из свойств отображений класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$ вытекает существование последовательности компактных множеств E_j таких, что

$$\left| D \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right| = \varnothing, \tag{13}$$

и сужение $f|_{E_j}$ удовлетворяет условию Липшица относительно множества E_j, $j = 1, 2, \dots$. В силу (6) и теоремы 1.6 из [8, с. 217] для каждого номера j и произвольного компактного подмножества $E \subset E_j$ справедливо равенство

$$\Phi(E)\left(= \int\limits_{\mathbb{R}^n} N(f|_E, y)\,dy \right) = \int\limits_E J(f,x)\,dx.$$

Объединяя последнее равенство с (11), получаем, что при $E \subset E_j$, $|E| \neq 0$, выполнены неравенства

$$\frac{\left|\int\limits_E \frac{\partial f_k}{\partial x_l}\,dx\right|}{|E|} \le M \left(\frac{\int\limits_E J(f,x)\,dx}{|E|} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad k,l \in \{1,\dots,n\}. \tag{14}$$

Рассматривая далее точки Лебега сужений $\frac{\partial f_k}{\partial x_l}|_{E_j}$ и $J(f,\cdot)|_{E_j}$, нетрудно вывести из соотношений (14) неравенства

$$\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right| \le M(J(f,x))^{\frac{1}{n}} \quad \text{для п. в. } x \in E_j, \quad k,l \in \{1,\dots,n\}.$$

Учитывая еще (13), заключаем, что

$$\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right| \le M(J(f,x))^{\frac{1}{n}} \quad \text{для п. в. } x \in D, \quad k,l \in \{1,\dots,n\}. \tag{15}$$

Налицо выполнение всех условий из определения отображения с ограниченным искажением. Теорема 1 доказана. $\square$

Ввиду теоремы 1 возникает вопрос о том, как зависит коэффициент искажения K от постоянной M в неравенствах (4). Однако, как следует из соотношений (15) приведенного доказательства, выполнение неравенств (4) дает лишь весьма грубую оценку $K \le M^n n^{n/2}$ (ср. с [2, с. 180]), не носящую к тому же характера устойчивого явления. Чтобы устранить этот недостаток, модифицируем формулировку теоремы 1 следующим образом.

Теорема 1′. *Пусть непрерывное отображение $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ $(\Delta \subset \mathbb{R}^n)$ сохраняет ориентацию, и пусть $\Phi(E) < \infty$ для любого компактного множества $E \subset \Delta$. Тогда f является отображением с коэффициентом искажения $\le K$ в том и только том случае, если $K \ge 1$ и для любого куба $Q \subset \Delta$ справедливы неравенства*

$$\left(\sum_{k,l=1}^{n} \left| \int\limits_{\partial Q} \omega_{kl} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le n^{\frac{1}{2}} \left(K \int\limits_{\mathbb{R}^n} N(f|_Q, y)\,dy \right)^{\frac{1}{n}} |Q|^{\frac{n-1}{n}}. \tag{16}$$

Отметим, что из теоремы $1'$ можно легко вывести теорему 1.

Замечание. Теорема $1'$ содержит в частном случае $K=1$ новый признак конформности отображения f, не содержащий (как и классическая теорема Мореры) никаких априорных предположений о дифференциальных свойствах f.

Доказательство теоремы $1'$. Установим необходимость условия (16). Пусть f — отображение с ограниченным искажением, причем

$$\left(\sum_{k,l=1}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} \le Kn^{\frac{n}{2}}J(f,x) \quad \text{п. в. в } \Delta, \quad K\ge 1.$$

Тогда, возводя обе части последнего неравенства в степень $\frac{2}{n}$ и интегрируя их, имеем

$$\sum_{k,l=1}^{n}\int\limits_{Q}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right)^2 dx \le K^{\frac{2}{n}}n\int\limits_{Q}J(f,x)^{\frac{2}{n}}\,dx \tag{17}$$

для каждого куба $Q\subset\Delta$. Из формулы Стокса и интегрального неравенства Гёльдера вытекают соотношения

$$\sum_{k,l=1}^{n}\left(\int\limits_{\partial Q}\omega_{kl}\right)^2 = \sum_{k,l=1}^{n}\left(\int\limits_{Q}\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\,dx\right)^2 \le \left(\sum_{k,l=1}^{n}\int\limits_{Q}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right)^2 dx\right)|Q| \tag{18}$$

и

$$\int\limits_{Q}J(f,x)^{\frac{2}{n}}\,dx \le \left(\int\limits_{Q}J(f,x)\,dx\right)^{\frac{2}{n}}|Q|^{\frac{n-2}{n}}. \tag{19}$$

Преобразуя неравенство (17) с помощью соотношений (18)–(19), получаем

$$\sum_{k,l=1}^{n}\left(\int\limits_{\partial Q}\omega_{kl}\right)^2 \le K^{\frac{2}{n}}n\left(\int\limits_{Q}J(f,x)\,dx\right)^{\frac{2}{n}}|Q|^{\frac{2n-2}{n}}. \tag{20}$$

Принимая во внимание еще и то обстоятельство, что для отображений с ограниченным искажением справедливо равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}N(f|_Q,y)\,dy = \int\limits_{Q}J(f,x)\,dx, \tag{21}$$

мы в силу (20) приходим к искомому неравенству (16).

Докажем достаточность условия (16). Если непрерывное сохраняющее ориентацию отображение f удовлетворяет (16) для каждого куба $Q\subset\Delta$, то по доказанной выше теореме 1 f является отображением с ограниченным искажением. Утверждение о том, что коэффициент искажения отображения f не превосходит параметра K из (16), легко получается, если преобразовать (16) с помощью формулы Стокса (см. левое равенство в (18)) и равенства (21) и рассмотреть затем точки Лебега производных $\frac{\partial f_k}{\partial x_l}$ и якобиана $J(f,x)$. Подробности обсуждения деталей проверки этого факта мы опускаем. $\square$

Замечание. Теореме $1'$ можно придать более наглядную форму. С этой целью введем следующие обозначения. Для каждого куба $Q\subset\Delta$ рассмотрим числовую $(n\times n)$-матрицу

$$\Omega(Q) = \left(\int\limits_{\partial Q}\omega_{kl},\ 1\le k,l\le n\right).$$

Если в пространстве $\mathscr{M}_n$ всех $(n \times n)$-матриц ввести гильбертову норму

$$|(a_{kl})| = \Big(\sum_{k,l} a_{kl}^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

то левая часть (16) превратится в $|\Omega(Q)|$, а само неравенство (16) примет следующий вид:

$$\left(\frac{|\Omega(Q)|}{|Q|}\right)^n \le M\frac{\Phi(Q)}{|Q|}, \tag{22}$$

где $M = n^{n/2}K^n$. Используя (22), для сохраняющих ориентацию отображений f теорему $1'$ можно схематически записать так:

$$\big(f \in W^1_{n,\mathrm{loc}} \wedge |f'|^n \le MJ(f)\big) \Leftrightarrow \left(\forall Q:\ \left(\frac{|\Omega(Q)|}{|Q|}\right)^n \le M\frac{\Phi(Q)}{|Q|}\right). \tag{23}$$

Отправляясь от схематической записи (23) теоремы $1'$, ниже мы установим одно «локальное» обобщение теорем $1, 1'$. Для этого нам потребуется следующее понятие.

Определение. Непрерывное отображение $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ обладает *свойством* LBD (*local bounded distortion*), если существует константа $M > 0$ такая, что

$$\forall x \in \Delta\ \exists \rho(x)\ \forall Q \subset \Delta, x \in Q \left\{\operatorname{diam} Q < \rho(x) \Rightarrow \left(\frac{|\Omega(Q)|}{|Q|}\right)^n \le M\frac{\Phi(Q)}{|Q|}\right\}. \tag{24}$$

Замечание. Обращаем внимание читателя на то, что в (24) при фиксировании точки $x \in \Delta$ рассматриваются только те кубы Q, которые содержат точку x.

Теорема 2. *Пусть $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ $(\Delta \subset \mathbb{R}^n)$ — непрерывное сохраняющее ориентацию отображение, и пусть $\Phi(E) < \infty$ для каждого компактного $E \subset \Delta$. Тогда f является отображением с ограниченным искажением в том и только том случае, если f обладает свойством* LBD.

Доказательство. Очевидно, что следует доказать только достаточность условия LBD. Для каждого натурального m рассмотрим множество

$$F_m = \{x \in \Delta \mid \text{условие LBD выполняется при } \rho(x) \ge 1/m\}. \tag{25}$$

Легко проверить, что F_m замкнуто в Δ. В самом деле, пусть $x_k \to x_0 \in \Delta$, $x_k \in F_m$. Фиксируем $Q \subset \Delta$, $x_0 \in Q$, $\operatorname{diam} Q < 1/m$. Предположим сначала, что $x_0 \in \operatorname{int} Q$. Тогда существует k_0 такое, что $x_k \in \operatorname{int} Q \subset Q$ при $k \ge k_0$. Так как $x_k \in F_m$, то очевидно, что

$$|\Omega(Q)|^n \le M\Phi(Q)|Q|^{n-1}. \tag{26}$$

Итак, (26) выполняется для любого $Q \subset \Delta$, $x_0 \in \operatorname{int} Q$, $\operatorname{diam} Q < 1/m$. Теперь предположим, что $x_0 \in \partial Q$, $\operatorname{diam} Q < 1/m$. Возьмем последовательность кубов $\{Q_s\}$ такую, что $Q \subset \operatorname{int} Q_s \subset Q_{s-1}$, $\operatorname{diam} Q_s < 1/m$, $Q = \bigcap_{s=1}^{\infty} Q_s$. Очевидно, что $x_0 \in Q_s$ и что в силу (26) мы имеем

$$\forall s:\ |\Omega(Q_s)|^n \le M\Phi(Q_s)|Q_s|^{n-1}. \tag{27}$$

Поскольку $Q_s \downarrow Q$, то $\Phi(Q_s) \to \Phi(Q)$. Поэтому, переходя к пределу в (27) при $s \to \infty$, получаем, что (26) выполняется для любого $Q \ni x_0$, $\operatorname{diam} Q < 1/m$, откуда и следует замкнутость F_m.

Далее имеем

$$\Delta = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m. \tag{28}$$

По теореме Бэра о категории существуют индекс m_0 и непустое открытое множество $G \subset \Delta$ такие, что $F_{m_0} \cap G$ плотно в G, поэтому замкнутость F_{m_0} влечет соотношение $G \subset F_{m_0}$. Но тогда в силу (25) для $f|_G$ выполняются условия теоремы $1'$ (в теореме $1'$ достаточно рассматривать кубы, диаметры которых ограничены сверху некоторым числом). Поэтому $f|_G$ является отображением с ограниченным искажением с параметром M. В нашем рассуждении нет необходимости вводить параметр K. Главное здесь то, что параметр M одинаков в левой и правой частях соотношения (23).

Дальнейшее рассуждение, очевидно, можно провести по-разному. Мы воспользуемся леммой Цорна.

Обозначим через $\mathscr{D} = \{D_t \mid t \in T\}$ семейство всех непустых открытых множеств $D_t \subset \Delta$, на каждом из которых f есть отображение с ограниченным искажением с заданным в условии LBD параметром M. Частично упорядочим $\mathscr{D}$ отношением включения множеств. Тогда для каждой цепи $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ (т. е. линейно упорядоченного подсемейства семейства $\mathscr{D}$) имеется верхняя грань $B = \bigcup \mathscr{C}$, на которой f есть отображение с ограниченным искажением с тем же параметром M.

Пусть W — максимальный элемент семейства $\mathscr{D}$. Мы утверждаем, что $W = \Delta$. Допуская противное, рассмотрим непустое замкнутое в Δ подмножество $P = \Delta \setminus W$, которое можно считать совершенным, так как изолированные точки устранимы для отображений с ограниченным искажением. Представим это множество в виде

$$P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i, \tag{29}$$

где $P_i = P \cap F_i$. Используя замкнутость множеств P_i и еще раз теорему Бэра о категории, мы убеждаемся в существовании открытого множества $U \subset \Delta$ и индекса i_0 таких, что

$$P \cap U = P_{i_0} \cap U \neq \varnothing. \tag{30}$$

Можно считать, что U является областью. Поскольку f есть отображение с ограниченным искажением на W с параметром M, то (26) выполняется для любого куба $Q \subset W$. Если же $Q \cap P_{i_0} \neq \varnothing$, то (26) справедливо, если $\operatorname{diam} Q < 1/i_0$. Отсюда заключаем, что в области U отображение f удовлетворяет условиям теоремы $1'$ (по крайней мере для всех $Q \subset U$ с $\operatorname{diam} Q < 1/i_0$). Следовательно, f — отображение с ограниченным искажением в области U, что влечет соотношение $W \neq W \cup U \in \mathscr{D}$. Но последнее соотношение не может иметь места, так как W — максимальный элемент. Из полученного противоречия следует равенство $W = \Delta$, что и завершает доказательство теоремы 2. $\square$

2. Этот пункт посвящен плоским отображениям ($n = 2$). Хорошо известно, что в этом случае отображение $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ является отображением с коэффициентом искажения $\leq K$ тогда и только тогда, когда $f \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Delta)$ и f — решение системы Бельтрами (1), причем параметр q_0 в (2) не превосходит $((K-1)/(K+1))^{1/2}$.

В теоремах 1, $1'$ (которые охватывают и плоский случай $n = 2$) от отображения f требуется помимо выполнения интегральных соотношений (4) или (16) еще и выполнение априорного условия сохранения ориентации. В этом теоремы 1, $1'$ уступают классической теореме Мореры, которая не содержит никаких условий на отображение f (кроме непрерывности и равенства нулю соответствующего интеграла). Следующая теорема восполняет этот пробел в случае плоских отображений, представляя собой интегральный критерий ограниченности искажения, единственными условиями в котором являются непрерывность рассматриваемого отображения и интегральное неравенство (31).

Теорема 3. *Пусть $f : \Delta \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — непрерывное отображение. Предположим, что существует константа M, $0 \le M < 2$, такая, что для каждого замкнутого квадрата $Q \subset \Delta$ со сторонами, параллельными осям координат, справедливы неравенства*

$$\left|\int\limits_{\partial Q} f\,dz\right| \le M\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} N(f|_Q, y)\,dy\right)^{\frac{1}{2}} |Q|^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{31}$$

Тогда f есть $W^1_{2,\mathrm{loc}}$-решение системы Бельтрами (1), (2) *с параметром*

$$q_0 \le q_0(M) = \frac{M}{(4 + M^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{32}$$

Обратно, если $f : \Delta \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — непрерывное $W^1_{2,\mathrm{loc}}$-решение системы Бельтрами (1), (2), *то для каждой подобласти $D \Subset \Delta$ с ориентированной гладкой (кусочно-гладкой, спрямляемой) границей ∂D справедливы неравенства* (31), *в которых Q заменяется на D, с*

$$M = M(q_0) = \frac{2q_0}{(1 - q_0^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{33}$$

где q_0 — параметр в (2).

Ввиду того, что оценки (32)–(33) параметров $q_0(M)$ и $M(q_0)$ носят устойчивый характер, и в предельном случае первое утверждение теоремы 3 (при $M = 0$) переходит в теорему Мореры, а второе (при $q_0 = 0$) — в теорему Коши, теорему 3 естественно рассматривать как утверждение об устойчивости в теоремах Коши и Мореры.

Заметим, что второе утверждение теоремы 3 настоящей работы совпадает с первым из утверждений теоремы 3 из [4]. При дополнительном требовании, что $\sup\limits_{y} N(f|_Q, y) < \infty$ при $Q \subset \Delta$, первое утверждение обсуждаемой сейчас теоремы — это второе утверждение упомянутой теоремы 3 работы [4]. Снятие этого условия ограниченности функции кратности $N(f|_Q, \cdot)$ дает положительный ответ на вопрос, поставленный первым из авторов в конце статьи [4].

Для случая, когда отображение f — гомеоморфизм, теорема 3 представляет собой критерий квазиконформности. Впервые он был получен третьим автором (в несколько отличной форме) в статье [1].

Интересно сравнить интегральные условия (31) с условиями (4) или (16). Последние условия являются более жесткими: выполнение (4) или (16) в случае плоского отображения f эквивалентно (с точностью до значений соответствующих констант) выполнению условия (31) как для дифференциальной формы $f\,dz$, так и для формы $f\,d\bar{z}$.

Доказательство теоремы 3. Доказательство представляет собой комбинацию рассуждений из работ [1–3] и п. 1 настоящей статьи. Мы остановимся только на ключевых моментах.

Как уже было отмечено, второе утверждение теоремы 3 — это первое из утверждений теоремы с тем же номером из статьи [4]. Для удобства читателя заметим, что оно доказывается применением формулы Стокса, равенства (21) и очевидного соотношения

$$J(f,z) = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2. \tag{34}$$

Докажем первую часть теоремы 3 (обобщение теоремы Мореры). Согласно выкладкам работ [2, 3] (см. также начало доказательства теоремы 1 настоящей статьи) справедливость неравенств (31) влечет выполнение неравенств

$$\left|\int\limits_{\partial Q} f\,dz\right| \le M\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} N(f|_{\operatorname{int} Q}, y)\,dy\right)^{\frac12} |Q|^{\frac12} < \infty \tag{35}$$

для каждого квадрата $Q \subset \triangle$. Тогда из рассуждений в доказательстве теоремы 1 статьи [3] (см. также [1]) следует, что существует обобщенная производная $f_{\bar z} \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Delta)$. Отсюда в силу [9, с. 67] существует и обобщенная производная $f_z \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Delta)$. Следовательно, $f \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Delta)$. Используя формулу Стокса, перепишем неравенства (35) в виде

$$2\left|\int\limits_{Q} f_{\bar z}\,dx\right| \le M\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} N(f|_{\operatorname{int} Q}, y)\,dy\right)^{\frac12} |Q|^{\frac12} < \infty,$$

где dx — дифференциальная форма, соответствующая евклидову объему в $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

Применяя метод, изложенный в доказательстве теоремы 1, получим, что для любого компактного множества $E \subset \Delta$ справедливы неравенства

$$2\left|\int\limits_{E} f_{\bar z}\,dx\right| \le M\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} N(f|_{E}, y)\,dy\right)^{\frac12} |E|^{\frac12} < \infty.$$

Продолжая следовать этому методу, заключаем, что

$$2|f_{\bar z}| \le M|J(f,z)|^{\frac12} \quad \text{п. в. в } \Delta. \tag{36}$$

Подставляя в оценку (36) равенство (34), имеем

$$4|f_{\bar z}|^2 \le M^2\big||f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2\big| \quad \text{п. в. в } \Delta.$$

Последнее ввиду условия теоремы $M^2 < 4$ равносильно неравенству

$$|f_{\bar z}|^2 \le \frac{M^2}{4+M^2}|f_z|^2 \quad \text{п. в. в } \Delta. \tag{37}$$

Извлекая квадратный корень в обеих частях неравенства (37), заключаем, что теорема 3 полностью доказана. $\square$

Следующий простой пример показывает, что ограничение $M < 2$ в первом утверждении теоремы 3 (обобщении теоремы Мореры) не может быть опущено.

Пример. Определим отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, полагая

$$f(z) = \begin{cases} z, & \operatorname{Im} z \ge 0; \\ \bar z, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что f удовлетворяет (31) с $M = 2$. Но в то же время f не является отображением с ограниченным искажением.

В заключение пункта отметим, что как функция $q_0(M)$ из (32), так и функция $M(q_0)$ в (33) суть наименьшие возможные.

3. Результаты предыдущего пункта можно распространить на случай многомерных систем Бельтрами. Изучение решений этих систем имеет непосредственное отношение к проблеме устойчивости многомерных голоморфных отображений, ранее исследованной первым из авторов (см. [10]). Следующая теорема содержит утверждение об устойчивости в многомерных вариантах теорем Коши и Мореры.

Теорема 4. *Пусть $f : \Delta \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ — непрерывное отображение и существует постоянная M, $0 \le M < 2^n/(2n)^{\frac{1}{2}}$, такая, что для любого куба $Q \subset \Delta$ и номера $s = 1, \dots, n$ справедливы неравенства*

$$\left| \int\limits_{\partial Q} f(z)\, d\bar{z}_1 \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\bar{z}_s} \wedge dz_s \wedge \ldots \wedge dz_n \right|$$
$$\le M \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \int\limits_{S_k} dv \int\limits_{\mathbb{R}^2} N_{kl}(y)\, dy \right)^{\frac{1}{2}} |Q|^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad (38)$$

где $S_k = \{(z_1, \dots, \widehat{z_k}, \dots, z_n) \mid (z_1, \dots, z_k, \dots, z_n) \in Q\}$, N_{kl} — функция кратности отображения $f_l(z_1, \dots, z_{k-1}, \cdot, z_{k+1}, \dots, z_n)|_{Q_k}$, $Q_k = \{z_k \mid (z_1, \dots, z_k, \dots, z_n) \in Q\}$ и dv — дифференциальная форма, соответствующая евклидову объему в $\mathbb{C}^{n-1}$. Тогда f есть решение многомерной системы Бельтрами

$$f_{\bar{z}}(z) = q(z) f_z(z) \ \text{ п. в. в } \Delta, \quad q_0 = \operatorname*{ess\,sup}_{z \in \Delta} \|q(z)\| < 1 \quad (39)$$

с параметром

$$q_0 \le q_{0,n,m}(M) = M \left(\frac{n}{4^n - M^2 n} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (40)$$

Здесь q — операторнозначное отображение из Δ в пространство $\mathbb{C}L(\mathbb{C}^{nm}, \mathbb{C}^{nm})$ комплексно-линейных преобразований.

Обратно, если $f : \Delta \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ — непрерывное $W^1_{2,\mathrm{loc}}$-решение многомерной системы Бельтрами (39), то для любого куба $Q \subset \Delta$ и номера $s = 1, \dots, n$ справедливы неравенства (38) с

$$M = M_{n,m}(q_0) = \frac{2^n q_0}{(1 - q_0^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (41)$$

Доказательство. Несмотря на кажущуюся громоздкость формулировки, при ближайшем рассмотрении оказывается, что доказательство теоремы 4 практически не отличается от доказательства теоремы 3. Отметим только два технических момента. В процессе доказательства приходится систематически использовать теорему Фубини о повторном интегрировании. Кроме того, обыгрывается тот факт, что если непрерывное отображение $f : \Delta \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ имеет обобщенные производные $f_{\bar{z}} = (f_{\bar{z}_1}, f_{\bar{z}_2}, \dots, f_{\bar{z}_n}) \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Delta)$, то $f \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Delta)$. Это следует из свойств представления Мартинелли — Бохнера (см., например, [10, с. 64–65, 123–134]). Другой способ доказательства этого факта состоит в том, чтобы, предполагая наличие этого свойства при $n = m = 1$ с соответствующей оценкой L_2-норм (см. [9, с. 67]), распространить его на любые размерности n и m применением теоремы Фубини о повторном интегрировании и известных результатов теории пространств Соболева.

Подробности рассуждений доказательства мы опускаем. $\square$

Замечание. Если в формулировку теоремы 4 подставить $n = m = 1$, то функции $q_{0,n,m}$ и $M_{n,m}$ из соотношений (40) и (41) будут несколько отличаться от соответствующих функций q_0 и M, определяемых соотношениями (32) и (33) в теореме 3. Это объясняется тем, что в многомерном случае существуют решения системы (39), у которых разность $|f_{k_{z_l}}|^2 - |f_{k_{\bar{z}_l}}|^2$ может принимать отрицательные значения для некоторых k, l, поэтому оценки в теореме 4 имеют более грубый вид в сравнении с соответствующими оценками в теореме 3. Но в то же время следует отметить, что при $n > 1$ и $m > 1$ функции $q_{0,n,m}$ и $M_{n,m}$ из формулировки теоремы 4 (подобно функциям q и M из (32) и (33)) являются наименьшими из возможных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пономарев С. П.* Об одном условии квазиконформности // Мат. заметки. 1971. Т. 9, № 6. С. 663–666.
2. *Пономарев С. П.* Интегральный критерий квазирегулярности // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 173–181.
3. *Ponomarev S. P.* On some characterizations of quasiregularity // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 1997. V. 38, N 2. P. 13–18.
4. *Копылов А. П.* Об устойчивости в теоремах Коши и Мореры о голоморфных функциях // Докл. РАН. 2001. Т. 378, № 4. С. 447–449.
5. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
6. *Rado T., Reichelderfer P. V.* Continuous transformations in analysis. Berlin: Springer, 1955.
7. *Чернавский А. В.* Дополнение к статье «О конечнократных открытых отображениях многообразий» // Мат. сб. 1965. Т. 66, № 3. С. 471–472.
8. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983.
9. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1988.
10. *Копылов А. П.* Устойчивость в C-норме классов отображений. Новосибирск: Наука, 1990.

Статья поступила 12 августа 2002 г.

Копылов Анатолий Павлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kopylov@math.nsc.ru

Коробков Михаил Вячеславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
korob@math.nsc.ru

Пономарев Станислав Петрович
Pedagogical University, Institute of Mathematics,
Arciszewskiego 22 b, 76-200, Slupsk, Poland
stapon@o2.pl