Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6

УДК 517.95

ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В НЕВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

В. А. Шарафутдинов

Аннотация: Рассматривается задача восстановления соленоидальной части симметричного тензорного поля f, определенного на компактном римановом многообразии (M, g) с краем, по известным интегралам поля f вдоль всех геодезических, соединяющих точки края. Все ранее известные результаты по этой задаче получены в предположении выпуклости края ∂M. Последнее предположение связано с тем, что множество максимальных ориентированных геодезических имеет структуру гладкого многообразия, если край ∂M выпуклый и отсутствуют геодезические бесконечной длины, в силу чего лучевое преобразование гладкого поля является гладкой функцией и применима аналитическая техника. В настоящей статье край ∂M не предполагается выпуклым. Вместо этого считается, что M является гладкой областью большего риманова многообразия, край которого выпуклый и для которого рассматриваемая задача допускает оценку устойчивости. В этом предположении доказывается единственность решения поставленной задачи для (M, g).

Ключевые слова: интегральная геометрия, лучевое преобразование, тензорные поля

1. Постановка задачи и формулировка результата

Напомним вкратце постановку задачи интегральной геометрии для тензорных полей вдоль геодезических римановой метрики. Подробности см. в [1].

Пусть (M, g) — компактное риманово многообразие с краем ∂M. Насколько однозначно симметричное тензорное поле f ранга m на M определяется совокупностью интегралов

$$If(\gamma) = \int\limits_0^1 f_{i_1 \dots i_m}(\gamma(t)) \dot\gamma^{i_1}(t) \dots \dot\gamma^{i_m}(t) dt, \tag{1.1}$$

известных для всех геодезических $\gamma : [0, 1] \to M$ метрики g с концами на краю; $\gamma(0), \gamma(1) \in \partial M$? Подынтегральное выражение в (1.1) написано с использованием локальной системы координат. Тем не менее это выражение определено инвариантно, т. е. не зависит от выбора координат.

При $m = 0$ это классическая задача интегральной геометрии о восстановлении функции по ее лучевым интегралам. При $m = 2$ указанная задача является линеаризацией известной проблемы определения римановой метрики по известным расстояниям между граничными точками, иногда называемой проблемой

Работа выполнена во время пребывания автора в Институте математических исследований (MSRI) в Беркли (Калифорния) и поддержана Интеграционным грантом СО РАН (№ 43).

граничной жесткости. При $m = 1$ подобные задачи возникают в допплеровской томографии. Некоторые томографические проблемы, связанные с распространением электромагнитных и упругих волн в слабо анизотропных средах, приводят к подобным задачам для $m = 2$ и $m = 4$.

Легко видеть, что при $m > 0$ тензорное поле f не определяется однозначно совокупностью интегралов (1.1). Действительно, для данного риманова многообразия (M, g) обозначим через $C^\infty(S^m\tau'_M)$ пространство гладких симметричных ковариантных тензорных полей ранга m. Введем дифференциальный оператор первого порядка

$$d = \sigma\nabla : C^\infty(S^{m-1}\tau'_M) \to C^\infty(S^m\tau'_M). \tag{1.2}$$

Здесь ∇ — ковариантная производная в метрике g, а σ — симметрирование по всем индексам тензора. Оператор d называется *внутренним дифференцированием.* Если $f = dv$, то подынтегральное выражение в (1.1) является полной производной по t:

$$f_{i_1\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}(t)\dots\dot\gamma^{i_m}(t) = d(v_{i_1\dots i_{m-1}}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}(t)\dots\dot\gamma^{i_{m-1}}(t))/dt.$$

Если дополнительно предположить, что v обращается в нуль на краю, $v|_{\partial M} = 0$, то $If(\gamma) = 0$ для любой геодезической γ с концами на краю. В связи с этим вводится следующее определение: $f \in C^\infty(S^m\tau'_M)$ называется *потенциальным полем*, если существует поле $v \in C^\infty(S^{m-1}\tau'_M)$, обращающееся в нуль на краю, т. е. $v|_{\partial M} = 0$, и такое, что $f = dv$. Теперь мы можем сформулировать наш вопрос следующим образом: верно ли, что симметричное тензорное поле f определяется совокупностью интегралов (1.1) с точностью до потенциального слагаемого?

Большинство результатов, связанных с этим вопросом, получено в предположении выпуклости края ∂M. Пожалуй, самое важное исключение из этого правила составляет класс SGM-многообразий, введенный в связи с нелинейной задачей граничной жесткости. Грубо говоря, риманово многообразие удовлетворяет SGM-условию, если длина любой геодезической совпадает с расстоянием между ее концами. Более точное определение см. в [2]. В частности, любая область евклидова пространства удовлетворяет этому условию. В [3] доказана граничная жесткость двумерного SGM-многообразия неположительной кривизны.

Мы приведем здесь один из ранее полученных результатов, необходимый для понимания настоящей статьи. Сначала дадим предварительные определения.

(M, g) называется *компактным рассеивающим римановым многообразием* (сокращенно КРРМ), если 1) M компактно; 2) край ∂M строго выпуклый, т. е. вторая квадратичная форма края положительно определена в каждой точке края; 3) для любой точки $x \in M$ и для любого касательного вектора $0 \neq \xi \in T_xM$ максимальная геодезическая $\gamma_{x,\xi}(t)$, удовлетворяющая начальным условиям $\gamma_{x,\xi}(0) = x$ и $\dot\gamma_{x,\xi}(0) = \xi$, определена на конечном отрезке $[\tau_-(x, \xi), \tau_+(x, \xi)]$.

Отметим, что в случае общего риманова многообразия (M, g) множество геодезических, соединяющих точки края, может иметь плохую топологию и, в частности, не иметь естественной структуры гладкого многообразия. Поэтому в общем случае мы используем $If(\gamma)$ лишь как обозначение для интеграла из правой части (1.1), избегая определения оператора I. Ситуация гораздо лучше в случае КРРМ. В последнем случае множество максимальных ориентированных геодезических имеет естественную структуру гладкого многообразия и мы можем определить лучевое преобразование I, как описано далее.

Для риманова многообразия (M,g) через $TM = \{(x,\xi) \mid x \in M, \xi \in T_xM\}$ обозначаем пространство касательного расслоения, а через $\Omega M = \{(x,\xi) \in TM \mid \|\xi\| = 1\}$ — подмногообразие TM, состоящее из единичных векторов. Вводим также обозначения

$$\partial_\pm \Omega M = \{(x,\xi) \in \Omega M \mid x \in \partial M, \pm\langle \xi, \nu(x)\rangle \geq 0\}$$

для многообразий выходящих и входящих векторов в точках края. Здесь $\nu(x)$ — единичный вектор внешней нормали к краю, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в метрике g.

Для КРРМ (M,g) *лучевое преобразование*

$$I : C^\infty(S^m\tau'_M) \to C^\infty(\partial_+\Omega M) \tag{1.3}$$

определяется равенством

$$If(x,\xi) = \int\limits_{\tau_-(x,\xi)}^{0} f_{i_1\dots i_m}(\gamma_{x,\xi}(t))\dot\gamma^{i_1}_{x,\xi}(t)\dots\dot\gamma^{i_1}_{x,\xi}(t)dt, \tag{1.4}$$

где $\gamma_{x,\xi} : [\tau_-(x,\xi), 0] \to M$ — геодезическая, определяемая начальными условиями $\gamma_{x,\xi}(0) = x$, $\dot\gamma_{x,\xi}(0) = \xi$. Формула (1.4) отличается от (1.1) тем, что в (1.4) семейство максимальных ориентированных геодезических параметризовано точками многообразия $\partial_+\Omega M$. В частности, строгая выпуклость края обеспечивает гладкость нижнего предела интегрирования в (1.4).

Оператор (1.3) продолжается до непрерывного оператора

$$I : H^1(S^m\tau'_M) \to H^1(\partial_+\Omega M).$$

Здесь $H^1(S^m\tau'_M)$ — пространство тензорных полей, координаты которых локально квадратично интегрируемы вместе с первыми производными в произвольной локальной системе координат, а $H^1(\partial_+\Omega M)$ — соответствующее пространство функций на $\partial_+\Omega M$.

При изучении лучевого преобразования существенную роль играет разложение тензорного поля на потенциальную и соленоидальную части, описываемое следующей теоремой. Пусть

$$-\delta : C^\infty(S^m\tau'_M) \to C^\infty(S^{m-1}\tau'_M)$$

— оператор, сопряженный к (1.2) относительно естественного L_2-произведения на пространстве тензорных полей; δ называется *дивергенцией*.

Теорема 1.1. *Пусть (M,g) — компактное риманово многообразие. Любое поле $f \in H^1(S^m\tau'_M)$ единственным образом представимо в виде*

$$f = \tilde f + dv, \quad \delta\tilde f = 0, \quad v|_{\partial M} = 0$$

с некоторыми $\tilde f \in H^1(S^m\tau'_M)$ и $v \in H^2(S^{m-1}\tau'_M)$. Слагаемые этого разложения называются соответственно соленоидальной и потенциальной частями поля f. Эти слагаемые непрерывно зависят от f в следующем смысле: оценки

$$\|\tilde f\|_{H^1(S^m\tau'_M)} \leq C\|f\|_{H^1(S^m\tau'_M)}, \quad \|v\|_{H^2(S^{m-1}\tau'_M)} \leq C\|\tilde f\|_{H^1(S^m\tau'_M)}$$

справедливы с не зависящей от f постоянной C.

Пусть (M, g) — риманово многообразие. Для точки $x \in M$ и двумерного подпространства $\sigma \subset T_x M$ через $K(x, \sigma)$ обозначаем секционную кривизну в точке x в направлении σ. Для $(x, \xi) \in \Omega M$ вводим обозначения:

$$K(x, \xi) = \sup_{\sigma \ni \xi} K(x, \sigma), \quad K^+(x, \xi) = \max\{K(x, \xi), 0\}.$$

Для КРРМ (M, g) определяем следующую характеристику:

$$k^+(M, g) = \sup_{(x,\xi) \in \partial_- \Omega M} \int\limits_0^{\tau_+(x,\xi)} t K^+(\gamma_{x,\xi}(t), \dot\gamma_{x,\xi}(t)) dt,$$

где $\gamma_{x,\xi} : [0, \tau_+(x, \xi)] \to M$ — геодезическая, определяемая начальными условиями $\gamma_{x,\xi}(0) = x$, $\dot\gamma_{x,\xi}(0) = \xi$.

Основной необходимый нам результат о лучевом преобразовании формулируется следующим образом.

Теорема 1.2. *Пусть $m \geq 0$ — целое число и (M, g) — n-мерное компактное рассеивающее риманово многообразие, удовлетворяющее условию*

$$k^+(M, g) < (n + 2m - 1)/m(m + n) \text{ при } m > 0, \quad k^+(M, g) < 1 \text{ при } m = 0. \tag{1.5}$$

Для любого тензорного поля $f \in H^1(S^m \tau'_M)$ соленоидальная часть $\tilde f$ поля f однозначно восстанавливается по лучевому преобразованию If поля f, и справедлива следующая условная оценка устойчивости:

$$\|\tilde f\|^2_{L_2} \leq C \left(\|f\|_{H^1} \|If\|_{L_2} + \|If\|^2_{H^1} \right). \tag{1.6}$$

Замечание 1. В первоначальным варианте этой теоремы в книге [4] условие (1.5) было заменено неравенством $k^+(M, g) < \varepsilon(m, n)$ с некоторым $\varepsilon(m, n) > 0$. В английском варианте [1] этой книги теорема доказана в предположении $k^+(M, g) < 1/(m + 1)$, несколько более сильном, чем (1.5). Доказательство теоремы в предположении (1.5) приведено в [5].

Замечание 2. Нетрудно доказать, что если n-мерное КРРМ (M, g) удовлетворяет условию $k^+(M, g) < 1$, то M диффеоморфно замкнутому шару пространства $\mathbb{R}^n$ и любые две точки из M соединяет единственная геодезическая.

Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы.

Теорема 1.3. *Пусть $m \geq 0$ — целое число и (M, g) — n-мерное компактное рассеивающее риманово многообразие, удовлетворяющее условию (1.5). Пусть D — открытое множество в M такое, что замыкание $\overline{D}$ лежит в $M \setminus \partial M$, а граница ∂D является гладким подмногообразием в M. Рассмотрим $(\overline{D}, g)$ как компактное риманово многообразие. Пусть $f \in C^\infty(S^m \tau'_{\overline{D}})$ — гладкое симметричное тензорное поле на $\overline{D}$. Если*

$$If(\gamma) = 0 \tag{1.7}$$

для любой геодезической $\gamma : [a, b] \to \overline{D}$ с концами на ∂D, $\gamma(a), \gamma(b) \in \partial D$, то f является потенциальным полем, т. е. существует поле $v \in C^\infty(S^{m-1} \tau'_{\overline{D}})$, обращающееся в нуль на краю, т. е. $v|_{\partial D} = 0$, и такое, что $f = dv$.

Замечание 3. В условиях теоремы 1.3 $(\overline{D}, g)$ может иметь нетривиальную топологию, но по-прежнему является SGM-многообразием. Это является косвенным подтверждением того, что класс SGM-многообразий естествен для рассмотрения проблемы граничной жесткости.

Замечание 4. Подчеркнем, что теорема 1.3 не дает оценки устойчивости, подобной оценке (1.6) в теореме 1.2. Как читатель увидит ниже, характер большинства из приводимых в доказательстве теоремы 1.3 аргументов не позволяет надеяться на получение оценок устойчивости.

Замечание 5. Теорема 1.3 была сформулирована в качестве гипотезы К. Кроуком в частной беседе, за что автор выражает ему свою признательность.

2. Доказательство теоремы 1.3

Основным шагом в доказательстве теоремы 1.3 является следующая

Лемма 2.1. *В условиях теоремы* 1.3 *существует поле $v \in C^\infty(S^{m-1}\tau'_{\overline{D}})$ на $\overline{D}$, удовлетворяющее граничному условию $v|_{\partial D} = 0$, обращающееся в нуль вне произвольной окрестности края ∂D в $\overline{D}$ и такое, что поле $\tilde{f} = f - dv$ обращается в нуль на краю, $\tilde{f}|_{\partial D} = 0$.*

Сначала покажем, что теорема 1.3 вытекает из этой леммы.

Доказательство теоремы 1.3. В силу леммы 2.1 мы можем, не снижая общности, считать само поле f обращающимся в нуль на границе

$$f|_{\partial D} = 0. \tag{2.1}$$

Мы продолжаем f до поля, определенного на всем M, полагая $f = 0$ вне $\overline{D}$. Обозначаем это продолжение снова через f. Граничное условие (2.1) обеспечивает, что $f \in H^1(S^m\tau'_M)$. Поле f принадлежит ядру лучевого преобразования на M. Согласно теореме 1.2 f является потенциальным полем, т. е. существует такое поле $v \in H^2(S^{m-1}\tau'_M)$, обращающееся в нуль на ∂M

$$v|_{\partial M} = 0, \tag{2.2}$$

что

$$dv = f \quad \text{в } M. \tag{2.3}$$

Так как d — эллиптический оператор и f C^∞-гладко в D, то из (2.3) следует C^∞-гладкость поля v в D. Рассматриваемое на всем M поле f принадлежит $C^{0,\alpha}(S^m\tau'_M)$ с любым $0 < \alpha < 1$. Поэтому решение v уравнения (2.3) принадлежит $C^{1,\alpha}(S^{m-1}\tau'_M)$. Остается доказать, что v обращается в нуль вне D:

$$v|_{M\setminus D} = 0. \tag{2.4}$$

Действительно, в этом случае ограничение поля v на $\overline{D}$ дает утверждение теоремы 1.3.

Поле f обращается в нуль вне D:

$$f|_{M\setminus D} = 0, \tag{2.5}$$

по определению. Мы покажем, что (2.4) вытекает из (2.2), (2.3) и (2.5).

Для любой геодезической $\gamma : [a,b] \to M$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\big(v_{i_1\dots i_{m-1}}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}(t)\dots\dot\gamma^{i_{m-1}}(t)\big) = (dv)_{i_1\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}(t)\dots\dot\gamma^{i_m}(t),$$

которое вместе с (2.3) дает

$$v_{i_1\dots i_{m-1}}(\gamma(b))\dot\gamma^{i_1}(b)\dots\dot\gamma^{i_{m-1}}(b) - v_{i_1\dots i_{m-1}}(\gamma(a))\dot\gamma^{i_1}(a)\dots\dot\gamma^{i_{m-1}}(a) = \int\limits_a^b f_{i_1\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}(t)\dots\dot\gamma^{i_m}(t)dt. \quad (2.6)$$

Докажем следующее утверждение. Существует такое открытое и плотное в ΩM подмножество $\Omega_0 M$, что для любой точки $(x,\xi)\in\Omega_0 M$ максимальная геодезическая, выходящая из x в направлении ξ, пересекает ∂D трансверсально в конечном числе точек.

Действительно, для $(x,\xi)\in\Omega M$ пусть $\gamma_{x,\xi}:[0,\tau_+(x,\xi)]\to M$ — максимальная геодезическая, выходящая из x в направлении ξ. Функция $\tau_+(x,\xi)$ гладкая на $\Omega M\setminus\partial(\Omega M)$ в силу строгой выпуклости края ∂M. Поэтому множество

$$G=\{(x,\xi;t)\mid x\in\partial D, \xi\in T_x(\partial D), \|\xi\|=1, 0\le t\le\tau_+(x,\xi)\}\subset\Omega(\partial D)\times\mathbb{R}$$

является гладким компактным $(2n-2)$-мерным многообразием с краем. По теореме Сарда образ отображения

$$G\to\Omega M, \quad (x,\xi;t)\mapsto(\gamma_{x,\xi}(t),\dot\gamma_{x,\xi}(t))$$

является замкнутым множеством нулевой меры в ΩM. Это доказывает утверждение, поскольку этот образ есть дополнение множества $\Omega_0 M$.

Пусть $(x,\xi)\in\Omega_0 M$ и $x\notin\overline{D}$. Рассмотрим максимальную геодезическую $\gamma=\gamma_{x,\xi}:[0,\tau_+(x,\xi)]\to M$, выходящую из (x,ξ), т. е. $\gamma(0)=x$ и $\dot\gamma(0)=\xi$. Второй конец геодезической γ принадлежит краю, $\gamma(\tau_+(x,\xi))\in\partial M$. Поскольку $v|_{\partial M}=0$, равенство (2.6) для этой геодезической дает

$$-v_{i_1\dots i_{m-1}}(x)\xi^{i_1}\dots\xi^{i_{m-1}} = \int\limits_0^{\tau_+(x,\xi)} f_{i_1\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}(t)\dots\dot\gamma^{i_m}(t)dt. \quad (2.7)$$

Отрезок $[0,\tau_+(x,\xi)]$ может быть представлен в виде конечного объединения

$$[0,\tau_+(x,\xi)]=[0,a_1]\cup[a_1,b_1]\cup\dots\cup[b_{k-1},a_k]\cup[a_k,b_k]\cup[b_k,\tau_+(x,\xi)]$$

с

$$0=b_0<a_1\le b_1<a_2\le b_2<\dots\le a_k\le b_k<\tau_+(x,\xi)=a_{k+1}$$

так, что $\gamma|_{[a_j,b_j]}\subset\overline{D}$ и $\gamma|_{[b_j,a_{j+1}]}\subset M\setminus D$. Представим правую часть равенства (2.7) в виде суммы интегралов по отдельным дугам указанного разбиения кривой γ. Интеграл по $\gamma|_{[a_j,b_j]}$ равен нулю в силу главного условия (1.7) теоремы 1.3. Интеграл по $\gamma|_{[b_j,a_{j+1}]}$ равен нулю, потому что $f|_{M\setminus D}=0$. Таким образом, мы установили, что правая часть формулы (2.7) равна нулю и, следовательно,

$$v_{i_1\dots i_{m-1}}(x)\xi^{i_1}\dots\xi^{i_{m-1}}=0 \quad \text{для } (x,\xi)\in\Omega_0 M, x\notin\overline{D}.$$

Это доказывает (2.6), поскольку поле v непрерывно, а $\Omega_0 M$ плотно. Теорема доказана.

Доказательство леммы 2.1 состоит из двух шагов, представленных следующими двумя леммами.

Лемма 2.2. *Пусть $(\overline{D}, g)$ — компактное риманово многообразие с краем и $f \in C^\infty(S^m\tau'_{\overline{D}})$ — гладкое симметричное тензорное поле. Существуют тензорное поле $v \in C^\infty(S^{m-1}\tau'_{\overline{D}})$, обращающееся в нуль на краю, $v|_{\partial\overline{D}} = 0$, и окрестность $W \subset \overline{D}$ края $\partial\overline{D}$ такие, что поле $\tilde{f} = f - dv$ обладает следующим свойством. Для любой геодезической $\gamma : [a, b] \to W$, выходящей с края ортогонально к нему, $\gamma(a) \in \partial\overline{D}$, $\dot{\gamma}(a) \perp \partial\overline{D}$, равенство*

$$\tilde{f}(\dot{\gamma}(t), \xi_1, \dots, \xi_{m-1}) = 0 \tag{2.8}$$

выполняется для всех $t \in [a, b]$ и для всех $\xi_i \in T_{\gamma(t)}\overline{D}$ $(1 \le i \le m-1)$.

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0 \in \partial\overline{D}$ и введем полугеодезическую систему координат $(x^1, \dots, x^n) = (y^1, \dots, y^{n-1}, z)$ в некоторой окрестности U точки x_0 так, что край определяется уравнением $z = 0$, $z \ge 0$ в U и элемент длины ds_g метрики g имеет вид

$$ds_g^2 = g_{\alpha\beta}dy^\alpha dy^\beta + dz^2$$

в этих координатах. В этой и последующих формулах греческие индексы меняются от 1 до $n-1$; суммирование от 1 до $n-1$ подразумевается по повторяющимся греческим индексам. Символы Кристоффеля в этой системе координат имеют следующую специфику:

$$\Gamma^n_{in} = \Gamma^i_{nn} = 0. \tag{2.9}$$

Докажем существование и единственность тензорного поля $v \in C^\infty(S^{m-1}\tau'_{\overline{D}}; U)$ в области U определения полугеодезической системы координат, удовлетворяющего системе уравнений

$$(dv)_{ni_1\dots i_{m-1}} = f_{ni_1\dots i_{m-1}} \tag{2.10}$$

с произвольными индексами $1 \le i_1, \dots, i_{m-1} \le n$ и граничному условию

$$v|_{U\cap\partial\overline{D}} = 0. \tag{2.11}$$

Заметим, что система уравнений (2.10) инвариантна относительно замены полугеодезических координат, а (2.8) является инвариантной формой системы (2.10). Поэтому после того, как будут доказаны существование и единственность решения в области определения полугеодезической системы координат, мы сможем построить глобальное поле $v \in C^\infty(S^{m-1}\tau'_{\overline{D}}; W')$, удовлетворяющее (2.8) в некоторой окрестности W' края $\partial\overline{D}$. Умножив затем v на срезающую функцию $\varphi \in C^\infty(\overline{D})$, обращающуюся в нуль вне W' и равную тождественно единице в меньшей окрестности W края, мы получим утверждение леммы.

Будем искать решение задачи (2.10), (2.11) с помощью индукции по количеству вхождений числа n в набор индексов, участвующих в уравнении (2.10). В простейшем случае, когда все участвующие в (2.10) индексы совпадают с n, уравнение (2.10) в силу специфики (2.9) символов Кристоффеля выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial z} v_{n\dots n} = f_{n\dots n}.$$

Последнее уравнение вместе с однородным начальным условием $v_{n\dots n}|_{z=0} = 0$, однозначно определяет компоненту $v_{n\dots n}$ поля v.

Чтобы проделать индуктивный шаг, введем обозначение

$$\overset{k}{v}_{\alpha_1\dots\alpha_k} = v_{\alpha_1\dots\alpha_k n\dots n}\ (1 \le k \le m-1), \quad \overset{k}{f}_{\alpha_1\dots\alpha_k} = f_{\alpha_1\dots\alpha_k n\dots n}\ (1 \le k \le m)$$

для компонент поля v (поля f) с $m-k-1$ $(m-k)$ вхождениями индекса n. Уравнение (2.10) может быть переписано в виде

$$(m-k)\frac{\partial}{\partial z}\overset{k}{v}_{\alpha_1\dots\alpha_k} - 2(m-k)\sum_{s=1}^{k}\Gamma^{\beta}_{\alpha_s n}\overset{k}{v}_{\beta\alpha_1\dots\widehat{\alpha_s}\dots\alpha_k} = m\overset{k}{f}_{\alpha_1\dots\alpha_k}$$

$$+\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_s}}\overset{k-1}{v}_{\alpha_1\dots\widehat{\alpha_s}\dots\alpha_k} + \sum_{1\le s<t\le k}\big(\Gamma^{\beta}_{\alpha_s\alpha_t}\overset{k-1}{v}_{\beta\alpha_1\dots\widehat{\alpha_s}\dots\widehat{\alpha_t}\dots\alpha_k} + \Gamma^{n}_{\alpha_s\alpha_t}\overset{k-2}{v}_{\alpha_1\dots\widehat{\alpha_s}\dots\widehat{\alpha_t}\dots\alpha_k}\big) \tag{2.12}$$

в случае $m-k \ge 1$ вхождений индекса n в правую часть этого уравнения. Здесь символ $\wedge$, помещенный над индексом, означает, что этот индекс пропускается. Функции $\overset{k-1}{v}_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}}$ и $\overset{k-2}{v}_{\alpha_1\dots\alpha_{k-2}}$ уже найдены по индуктивному предположению. Уравнения (2.12) вместе с однородными начальными условиями $\overset{k}{v}_{\alpha_1\dots\alpha_k}|_{z=0} = 0$ однозначно определяют функции $\overset{k}{v}_{\alpha_1\dots\alpha_k}$, что и завершает индуктивный шаг. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *В условиях теоремы* 1.3 *пусть поле* $f \in C^\infty(S^m\tau'_{\overline{D}})$ *удовлетворяет* (1.7) *для любой геодезической* $\gamma : [a,b] \to \overline{D}$ *с концами на краю* ∂D. *Тогда построенное в лемме* 2.2 *поле* $\tilde f = f - dv$ *обращается в нуль на краю*

$$\tilde f|_{\partial D} = 0. \tag{2.13}$$

Доказательство. Чтобы не усложнять обозначений, мы будем построенное в лемме 2.2 поле $\tilde f$ обозначать снова через f. Это не уменьшает общности, поскольку поле $\tilde f$ также удовлетворяет условию (1.7).

Итак, f удовлетворяет предположениям теоремы 1.3 и условию

$$f_{ni_1\dots i_{m-1}}(x) = 0 \tag{2.14}$$

для любой точки $x \in \overline{D}$, достаточно близкой к ∂D и лежащей в области определения полугеодезической системы координат. Мы должны показать, что

$$f_{i_1\dots i_m}(x)\xi^{i_1}\dots\xi^{i_m} = f_{\alpha_1\dots\alpha_m}(x)\xi^{\alpha_1}\dots\xi^{\alpha_m} = 0 \tag{2.15}$$

для любой краевой точки $x \in \partial D$ и для любого вектора $\xi \in T_x(\partial D)$.

Зафиксируем точку $x \in \partial D$ и единичный вектор $\xi \in T_x(\partial D)$. Пусть $\nu_x \in T_xM$ — единичный вектор внутренней нормали к краю ∂D в точке x. Для $\varepsilon > 0$ положим $\xi_\varepsilon = \xi + \varepsilon\nu_x$ и рассмотрим геодезическую $\gamma_\varepsilon(t)$, выходящую из точки x в направлении ξ_ε, т. е. $\gamma_\varepsilon(0) = x$ и $\dot\gamma_\varepsilon(0) = \xi_\varepsilon$. Ясно, что $\gamma_\varepsilon(t) \in D$ при достаточно малых $t > 0$. Пусть $l_\varepsilon > 0$ минимальное из таких $t > 0$, что $\gamma_\varepsilon(t) \in \partial D$. Таким образом, $\gamma_\varepsilon : [0, l_\varepsilon] \to \overline{D}$, $\gamma_\varepsilon(0) = x \in \partial D$, $y_\varepsilon := \gamma_\varepsilon(l_\varepsilon) \in \partial D$ и $\gamma_\varepsilon(t) \in D$ при $0 < t < l_\varepsilon$.

Рассмотрим отдельно два возможных случая: 1) существует такая последовательность $0 < \varepsilon_k \to 0$, что $l_{\varepsilon_k} \to 0$ при $k \to \infty$; 2) $l_\varepsilon \ge l_0 > 0$ для всех $0 < \varepsilon \le 1$.

В первом случае предположим, что равенство (2.15) не верно. Пусть для определенности

$$f_{\alpha_1\dots\alpha_m}(x)\xi^{\alpha_1}\dots\xi^{\alpha_m} > 0. \tag{2.16}$$

При достаточно большом k точки $(\gamma_{\varepsilon_k}(t), \dot\gamma_{\varepsilon_k}(t))$ принадлежат произвольной окрестности точки (x,ξ) при всех $t \in [0, l_{\varepsilon_k}]$. Поэтому из (2.16) следует, что подынтегральное выражение в интеграле

$$\int\limits_0^{l_{\varepsilon_k}} f_{\alpha_1\dots\alpha_m}(\gamma_{\varepsilon_k}(t))\dot\gamma^{\alpha_1}_{\varepsilon_k}(t)\dots\dot\gamma^{\alpha_m}_{\varepsilon_k}(t)dt$$

положительно на интервале $(0, l_{\varepsilon_k})$. Следовательно, этот интеграл положителен, что противоречит условию (1.7).

Теперь рассматриваем второй случай: $l_\varepsilon \ge l_0 > 0$ для $0 < \varepsilon \le 1$. Зафиксируем некоторое $\varepsilon \in (0,1)$ и упростим наши обозначения до следующих: $\gamma = \gamma_\varepsilon,\ l = l_\varepsilon,\ y = \gamma(l)$. Пусть $\tau \mapsto x_\tau \in \partial D$ $(0 \le \tau < \delta)$ — гладкая кривая в ∂D, выходящая из x в направлении ξ, т. е. $x_0 = x$ и $dx_\tau/d\tau|_{\tau=0} = \xi$.

Сначала предположим, что геодезическая $\gamma(t)$ пересекает границу ∂D трансверсально в точке $y = \gamma(l)$. В этом случае единственная геодезическая γ_τ, соединяющая точки x_τ и y, лежит полностью в $\overline{D}$ при достаточно малом τ. Параметризуем геодезическую γ_τ тем же отрезком $[0,l]$. Таким образом, $\gamma_\tau : [0,l] \to \overline{D},\ \gamma_\tau(0) = x_\tau,\ \gamma_\tau(l) = y$. Точка $\gamma_\tau(t)$ гладко зависит от $(\tau,t) \in [0,\delta) \times [0,l]$ и $\gamma_\tau(t) \in D$ при $(\tau,t) \in [0,\delta) \times (0,l)$.

Поскольку f удовлетворяет условию (1.7), имеем

$$\int\limits_0^{l} f_{i_1\dots i_m}(\gamma_\tau(t))\dot\gamma^{i_1}_\tau(t)\dots\dot\gamma^{i_m}_\tau(t)dt = 0, \tag{2.17}$$

где подынтегральное выражение написано в подходящей системе координат. Подынтегральное выражение гладко зависит от $(\tau,t) \in [0,\delta) \times [0,l]$. Дифференцируем равенство (2.17) по τ и затем полагаем $\tau = 0$:

$$\int\limits_0^{l} \frac{\partial f_{i_1\dots i_m}}{\partial x^k}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}(t)\dots\dot\gamma^{i_m}(t)\frac{\partial\gamma^k_\tau(t)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}dt$$
$$+ m\int\limits_0^{l} f_{i_1\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}(t)\dots\dot\gamma^{i_{m-1}}(t)\frac{\partial\dot\gamma^{i_m}_\tau(t)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}dt = 0. \tag{2.18}$$

Векторное поле

$$J(t) = \frac{\partial\gamma_\tau(t)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}$$

является полем Якоби вдоль геодезической γ, поскольку оно — поле геодезической вариации γ_τ. Это поле Якоби удовлетворяет краевым условиям

$$J(0) = \xi, \quad J(l) = 0. \tag{2.19}$$

Следующее утверждение является ключевым моментом нашего доказательства: поле $J(t)$ совпадает с $(1 - t/l)\dot\gamma(t)$ с точностью до ε-малого слагаемого. Это утверждение уточняется далее.

Прежде всего перепишем (2.18) в ковариантном виде. Для этого выразим производные $\partial f/\partial x^k$ и $\partial^2(\gamma^i_\tau(t))/\partial t\partial\tau$ из формул

$$\nabla_k f_{i_1\dots i_m} = \frac{\partial f_{i_1\dots i_m}}{\partial x^k} - \sum_{a=1}^{m}\Gamma^p_{ki_a} f_{i_1\dots i_{a-1}pi_{a+1}\dots i_m}$$

и

$$J'^i = \frac{\partial \dot\gamma^i_\tau}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} + \dot\gamma^k \Gamma^i_{kp} J^p,$$

где J' — ковариантная производная поля J вдоль γ, и подставим эти выражения в (2.18). Таким образом, получаем

$$\int\limits_0^l J^k(t)\nabla_k f_{i_1\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}\dots\dot\gamma^{i_m}\,dt + m\int\limits_0^l J'^k(t) f_{ki_2\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_2}\dots\dot\gamma^{i_m}\,dt = 0. \tag{2.20}$$

Теперь оценим поле Якоби J. В силу (2.19) J линейно зависит от ξ. Ввиду соотношений

$$\dot\gamma(0) = \xi_\varepsilon = \xi + \varepsilon\nu_x, \quad \|\xi\| = \|\nu_x\| = 1, \quad \langle \xi, \nu_x\rangle = 0 \tag{2.21}$$

вектор ξ представим следующим образом:

$$\xi = \dot\gamma(0)/(1+\varepsilon^2) + \varepsilon\eta, \quad \text{где} \quad \eta \perp \dot\gamma(0), \quad \|\eta\| = (1+\varepsilon^2)^{-1} < 1. \tag{2.22}$$

Поэтому

$$J(t) = (1+\varepsilon^2)^{-1}(1 - t/l)\dot\gamma(t) + \varepsilon J_\eta(t), \tag{2.23}$$

где J_η — поле Якоби вдоль γ, определяемое граничными условиями

$$J_\eta(0) = \eta, \quad \|\eta\| \le 1, \quad \eta\perp\dot\gamma(0); \quad J_\eta(l) = 0. \tag{2.24}$$

Используя эти соотношения и уравнение Якоби, легко доказать оценку

$$\|J_\eta(t)\| \le C, \quad \|J'_\eta(t)\| \le C, \tag{2.25}$$

равномерную по всем геодезическим $\gamma : [0, l] \to M$ с $l \ge l_0 > 0$, $1 \le \|\dot\gamma\| \le 2$ и по всем векторам $\eta\perp\dot\gamma(0)$, удовлетворяющим неравенству $\|\eta\| \le 1$. Постоянная C в (2.25) зависит только от l_0 и C^1-нормы тензора кривизны.

Подставляя выражение (2.23) для $J(t)$ в (2.20), получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_0^l \left(1 - \frac{t}{l}\right)\dot\gamma^k\nabla_k f_{i_1\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}\dots\dot\gamma^{i_m}\,dt - \frac{m}{l}\int\limits_0^l \dot\gamma^k f_{ki_2\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_2}\dots\dot\gamma^{i_m}\,dt \\ + \varepsilon(1+\varepsilon^2)\int\limits_0^l J^k_\eta \nabla_k f_{i_1\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}\dots\dot\gamma^{i_m}\,dt \\ + \varepsilon(1+\varepsilon^2)\int\limits_0^l J'^k_\eta f_{ki_2\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_2}\dots\dot\gamma^{i_m}\,dt = 0.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Заметим, что второй интеграл в (2.26) равен нулю, поскольку f удовлетворяет условию (1.7). Преобразуем первый интеграл, используя соотношение

$$\dot\gamma^k\nabla_k f_{i_1\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}\dots\dot\gamma^{i_m} = \frac{d}{dt}(f_{i_1\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}\dots\dot\gamma^{i_m}),$$

следующим образом:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^l (1 - t/l)\dot\gamma^k\nabla_k f_{i_1\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}\dots\dot\gamma^{i_m}\,dt \\ = -f_{i_1\dots i_m}(\gamma(0))\dot\gamma^{i_1}(0)\dots\dot\gamma^{i_m}(0) + \frac{1}{l}\int\limits_0^l f_{i_1\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}\dots\dot\gamma^{i_m}\,dt.\end{aligned}$$

Интеграл в правой части последней формулы равен нулю, поскольку f удовлетворяет условию (1.7). Что касается первой суммы из правой части, то мы можем отбросить все слагаемые, в число индексов которых входит n, на основании (2.14), а также заменить $\dot\gamma^\alpha(0)$ на ξ^α на основании (2.21). Таким образом, получаем

$$\int\limits_0^l (1-t/l)\dot\gamma^k\nabla_k f_{i_1\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}\dots\dot\gamma^{i_m}\,dt = -f_{\alpha_1\dots\alpha_m}(x)\xi^{\alpha_1}\dots\xi^{\alpha_m}.$$

Подставляя это выражение в (2.26) и оценивая последние два интеграла в (2.26) с помощью (2.25), приходим к окончательной оценке

$$|f_{\alpha_1\dots\alpha_m}(x)\xi^{\alpha_1}\dots\xi^{\alpha_m}| \le \varepsilon C\|f\|_{C^1} \tag{2.27}$$

с некоторой постоянной C, не зависящей от ε и f.

Напомним, что предыдущие рассуждения проводились в предположении, что геодезическая $\gamma(t)$ трансверсально пересекает ∂D в точке $y=\gamma(l)$. Если это предположение не выполнено, то участвующая в (2.17) геодезическая γ_τ может частично проходить вне множества $\overline{D}$. Конечно, мы можем продолжить f нулем в дополнение множества $\overline{D}$ без нарушения равенства (2.17). Однако в таком случае подынтегральное выражение в (2.17) может оказаться разрывным и дифференцирование этого равенства по параметру τ станет проблематичным. К счастью, имеется другая возможность, позволяющая избежать разрывных подынтегральных выражений.

Итак, рассматриваем случай, когда вектор $\dot\gamma(l)$ принадлежит $T_y(\partial D)$, $y=\gamma(l)$. Введем следующее определение: точка $x'\in\partial D$ *видна* из точки y, если существует такая геодезическая $\gamma':[0,a]\to\overline{D}$, что $\gamma'(0)=y$, $\gamma'(a)=x'$ и $\gamma'(t)\in D$ при $t\in(0,a)$. Например, точка x видна из y (напомним, что точка x фиксирована на протяжении доказательства леммы 2.3). Следующее утверждение описывает локальную структуру в окрестности точки x множества видимых из y точек.

(*) *Существует гладкая гиперповерхность $H\subset\partial D$, проходящая через x, которая представляет любую достаточно малую окрестность $U\subset\partial D$ точки x в виде такого дизъюнктного объединения $U=U^+\cup(H\cap U)\cup U^-$, что одна из полуокрестностей U^+ или U^- целиком состоит из точек, видимых из y.*

Действительно, пусть $\delta(t)=\gamma(l-(1+\varepsilon^2)^{-1/2}t)$ означает геодезическую γ^{-1}, параметризованную отрезком $[0,L]$, где $L=l(1+\varepsilon^2)^{1/2}$ — длина геодезической γ. Таким образом, $\delta:[0,L]\to\overline{D}$, $\delta(0)=y$, $\delta(L)=x$ и $\delta(t)\in D$ при $t\in(0,L)$. Вектор $\dot\delta(0)$ имеет единичную длину: $\|\dot\delta(0)\|=1$. Геодезическая $\delta(t)$ трансверсально пересекает ∂D в точке $x=\delta(L)$.

Пусть Ω_y — единичная сфера касательного пространства T_yM и ν_y — единичный вектор внутренней нормали к краю ∂D в точке y. Рассматривая ν_y в качестве северного полюса сферы Ω_y, представим сферу в виде дизъюнктного объединения $\Omega_y=\Omega_y^+\cup E\cup\Omega_y^-$, где E — экватор и Ω_y^+ (Ω_y^-) — открытая северная (южная) полусфера.

Если η — вектор из достаточно малой окрестности $V\subset\Omega_y$ вектора $\dot\delta(0)$, то геодезическая $t\mapsto\exp_y t\eta$ трансверсально пересекает ∂D в единственной точке $\varphi(\eta)=\exp_y(L(\eta)\eta)$, где $L(\eta)$ близко к L. Функция $L(\eta)$ гладка в V и построенное таким образом отображение $\varphi:V\to U$ является диффеоморфизмом на некоторую окрестность $U\subset\partial D$ точки x.

Представляя V в виде объединения $V = V^+ \cup (E \cap V) \cup V^-$ с $V^\pm = V \cap \Omega_y^\pm$ и перенося это представление на ∂D посредством диффеоморфизма φ, получаем представление

$$U = U^+ \cup H \cup U^-, \quad H = \varphi(E \cap V), \quad U^\pm = \varphi(V^\pm) \tag{2.28}$$

некоторой окрестности $U \subset \partial D$ точки x. Покажем, что при достаточно малой V все точки полуокрестности U^+ видны из y. Действительно, для $\eta \in V^+$ и для достаточно малых $t > 0$ точки $\exp_y t\eta$ принадлежат D, поскольку $\eta \in \Omega_y^+$. Начиная с некоторого $t_0 > 0$ все точки $\exp_y t\eta$ $(t_0 < t < L(\eta))$ принадлежат произвольной окрестности множества $\delta([t_0, L))$ в D, если V достаточно мала. Таким образом, геодезическая $t \mapsto \exp_y t\eta$ $(0 \le t \le L(\eta))$ целиком проходит в $\overline{D}$. Это доказывает утверждение (*).

Пусть

$$T_x(\partial D) = T_x^+(\partial D) \cup T_x H \cup T_x^-(\partial D)$$

— представление векторного пространства $T_x(\partial D)$ в виде дизъюнктного объединения двух открытых полупространств и гиперплоскости, соответствующее представлению (2.28). Один из двух векторов ξ или $-\xi$ принадлежит замкнутому полупространству $T_x^+(\partial D) \cup T_x H$. Следовательно, существует такой единичный вектор $\xi' \in T_x^+(\partial D)$, что справедливо одно из двух неравенств

$$\|\xi' - \xi\| < \varepsilon_1 \quad \text{или} \quad \|\xi' + \xi\| < \varepsilon_1 \tag{2.29}$$

с произвольным $\varepsilon_1 > 0$. В обоих случаях справедлива оценка

$$1 - \varepsilon_1^2/2 \le |\langle \xi, \xi' \rangle| \le 1. \tag{2.30}$$

Теперь повторим вышеприведенные рассуждения, заменив в них ξ вектором ξ'. А именно, пусть $\tau \mapsto x_\tau$ — гладкая кривая в ∂D, выходящая из точки x в направлении ξ', т. е. $x_0 = x$ и $dx_\tau/d\tau|_{\tau=0} = \xi'$. Тогда $x_\tau \in U^+$ при достаточно малых положительных τ, т. е. все точки x_τ видны из y. Поэтому геодезическая $\gamma_\tau(t)$ $(0 \le t \le l)$, соединяющая x_τ и y, проходит в $\overline{D}$. Теперь мы можем написать формулу (2.17) и повторить все рассуждения, приведенные после этой формулы. Таким образом, мы снова придем к равенству (2.20), в котором поле Якоби $J(t)$ вдоль γ определяется краевыми условиями

$$J(0) = \xi', \quad J(l) = 0. \tag{2.31}$$

Аналогично (2.22) мы представляем вектор ξ' в виде

$$\xi' = \frac{\langle \xi', \xi \rangle}{1 + \varepsilon^2} \dot\gamma(0) + \varepsilon\eta, \quad \text{где} \quad \eta \perp \dot\gamma(0), \quad \|\eta\|^2 = \frac{1 + \varepsilon^2 - \langle \xi', \xi \rangle^2}{\varepsilon^2(1 + \varepsilon^2)}. \tag{2.32}$$

Из последнего равенства и (2.30) вытекает оценка

$$\|\eta\|^2 \le \frac{1 + (\varepsilon_1/\varepsilon)^2}{1 + \varepsilon^2}.$$

В частности,

$$\|\eta\| \le 1, \tag{2.33}$$

если $\varepsilon_1 < \varepsilon^2$.

Согласно (2.32) поле Якоби J может быть представлено в виде

$$J(t) = \frac{\langle \xi', \xi \rangle}{1 + \varepsilon^2} (1 - t/l) \dot\gamma(t) + J_\eta(t) \tag{2.34}$$

с некоторым якобиевым полем J_η, удовлетворяющим (2.24).

Подставляя (2.34) в (2.20) и повторяя аргументы, приведшие нас к (2.27), получим

$$|f_{\alpha_1\dots\alpha_m}(x)\xi^{\alpha_1}\dots\xi^{\alpha_m}| \le (\varepsilon+\varepsilon_1)C\|f\|_{C^1}.$$

Поскольку ε_1 произвольно, это доказывает (2.27) в случае нетрансверсального пересечения.

Наконец, (2.15) следует из (2.27), так как ε произвольно. Лемма 2.3 доказана, равно как и теорема 1.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sharafutdinov V. A.* Integral Geometry of Tensor Fields. Utreht, the Netherlands: VSP, 1994.
2. *Croke C. B.* Rigidity and distance between boundary points // J. Differential Geom. 1991. V. 33. P. 445–464.
3. *Croke C. B.* Rigidity for surfaces of non-positive curvature // Comm. Math. Helvetici. 1998. V. 65. P. 158–169.
4. *Шарафутдинов В. А.* Интегральная геометрия тензорных полей. Новосибирск: Наука, 1993.
5. *Sharafutdinov V.* Ray Transform on Riemannian Manifolds. Eight Lectures on Integral Geometry. http://math.washington.edu/~sharafut/Ray_transform.dvi.

Статья поступила 9 сентября 2002 г.

Шарафутдинов Владимир Альтафович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sharaf@math.nsc.ru