Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6

УДК 515.162

ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СЕРИЙ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Е. А. Фоминых

Аннотация: Известно, что множество нормальных поверхностей в трехмерном многообразии относительно операции сложения образует частичный моноид, минимальной системой образующих которого являются фундаментальные поверхности. Существующий алгоритм нахождения системы фундаментальных поверхностей носит чисто теоретический характер и не допускает практической реализации. В статье изложено полное и простое с геометрической точки зрения описание структуры частичных моноидов нормальных поверхностей для линзовых пространств, обобщенных пространств кватернионов и многообразий Столлингса со слоем проколотый тор.

Ключевые слова: нормальные поверхности, линзовые пространства, обобщенные пространства кватернионов, многообразия Столлингса

Введение

Теория нормальных поверхностей Хакена играет важную роль в топологии трехмерных многообразий. Она лежит в основе таких знаменитых алгоритмов, как алгоритмы распознавания тривиального узла [1], многообразия Хакена [2], трехмерной сферы [3, 4]. Множество поверхностей в компактном трехмерном многообразии M, нормальных по отношению к заданному разбиению многообразия M на ручки, относительно операции сложения, образует частичный коммутативный моноид. Минимальный набор образующих этого моноида составляют фундаментальные поверхности. Известно [1], что множество фундаментальных поверхностей конечно и может быть построено алгоритмически.

Стандартный способ нахождения фундаментальных поверхностей состоит в следующем. Каждой нормальной поверхности сопоставляется вектор с целыми неотрицательными координатами, определяемый пересечением поверхности с ручками индекса 0. Каждый такой вектор является решением конечной системы $\mathscr{S}$ линейных однородных уравнений. При этом система $\mathscr{S}$ зависит только от разбиения многообразия на ручки. Векторы, соответствующие фундаментальным поверхностям, являются фундаментальными решениями системы $\mathscr{S}$ в классе всех целых неотрицательных решений.

Практическая реализация данного подхода весьма затруднительна даже для самых простых разбиений на ручки. Причина состоит в том, что число неизвестных и число уравнений системы $\mathscr{S}$ довольно велико. Кроме того, среди

Работа выполнена при финансовой поддержке фондами INTAS (грант № YSF 2001–2/38), РФФИ (коды проектов 02–01–01013, 02–01–06102), Минобразования (код проекта E00–1.0–211) и программы «Университеты России» (код проекта 04.01.033).

фундаментальных решений много лишних, которые не реализуются нормальными поверхностями.

Настоящая работа продолжает исследование, начатое в [5, 6]. Автором получено полное описание частичных моноидов нормальных поверхностей для следующих трех бесконечных серий стандартно разбитых на ручки трехмерных многообразий: линзовых пространств, обобщенных пространств кватернионов и многообразий Столлингса со слоем проколотый тор и гиперболическим отображением монодромии. Возможность такого описания была предсказана В. Джейко и Х. Рубинштайном, которые в процессе исследования эффективных триангуляций полностью поняли структуру нормальных поверхностей в специальным образом триангулированных полноториях (слоеных торах).

Автор пользуется случаем выразить благодарность своему научному руководителю С. В. Матвееву за многочисленные обсуждения и постоянное внимание к работе.

1. Уравновешенные поверхности

Напомним, что двумерный полиэдр P называется *простым*, если линк каждой его точки гомеоморфен окружности, окружности с диаметром или окружности с тремя радиусами. Объединение точек первого типа состоит из нескольких связных двумерных многообразий, которые называются 2-*компонентами* полиэдра P. Оставшиеся точки образуют *особый граф* полиэдра P, причем точки третьего типа называются его *вершинами.* Простой полиэдр называется *специальным*, если он имеет хотя бы одну вершину и все его 2-компоненты являются клетками.

Подполиэдр P трехмерного многообразия M называется его *спайном*, если либо $\partial M \neq \varnothing$ и многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно $\partial M \times (0, 1]$, либо $\partial M = \varnothing$ и многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно открытому шару.

Хорошо известно, что каждый специальный спайн P многообразия M порождает его разбиение ξ_P на ручки следующим образом. Нужно заменить каждую вершину полиэдра P ручкой индекса 0 (*шаром*), каждое ребро — ручкой индекса 1 (*балкой*), каждую 2-компоненту — ручкой индекса 2 (*плиткой*). При этом объединение этих ручек должно либо совпадать с многообразием M, либо (если M замкнуто) получаться из него удалением шара (который в данном случае можно рассматривать как ручку индекса 3). Компоненты связности пересечения шаров с балками называются *островами*, шаров с плитками — *мостами.*

Определение 1. Замкнутая поверхность $F \subset M$ называется *нормальной* по отношению к разбиению ξ_P, если

1) пересечение поверхности F с каждой плиткой $D^2 \times I$ либо пусто, либо состоит из нескольких параллельных дисков вида $D^2 \times \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, где $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — набор внутренних точек отрезка I;

2) пересечение поверхности F с каждой балкой $I \times D^2$ состоит из полосок вида $I \times l$, где l — дуга в D^2 с концами на ∂D^2 (диск D^2 можно отождествить с островом $\{0\} \times D^2$);

3) пересечение поверхности F с каждым шаром состоит из дисков (эти диски называются *элементарными*);

4) пересечение каждого элементарного диска с каждым мостом либо пусто, либо состоит из одной дуги с концами на тех островах, которые соединяет рассматриваемый мост.

Пусть F — нормальная поверхность в M, E — балка разбиения ξ_P и C_1, C_2, C_3 — примыкающие к E плитки. Разумеется, может случиться, что некоторые из плиток совпадают. Для каждого i, $1 \leq i \leq 3$, обозначим через y_i плиточную степень поверхности F по отношению к плитке C_i, т. е. число дисков в $F \cap C_i$. Будем говорить, что нормальная поверхность F *уравновешена на балке* E, если среди чисел y_1, y_2, y_3 нет строго максимального. Другими словами, для некоторой перестановки π чисел 1, 2, 3 должно выполняться соотношение $y_{\pi(1)} = y_{\pi(2)} \geq y_{\pi(3)}$.

Определение 2. Нормальная поверхность в M, уравновешенная на каждой балке разбиения ξ_P, называется *уравновешенной*.

1.1. Связные нормальные поверхности. Приведем два важных примера уравновешенных поверхностей.

1. Пусть S — непустая связная замкнутая подповерхность спайна P. Тогда S является нормальной поверхностью.

2. Пусть G — непустой связный простой подполиэдр спайна P такой, что либо он имеет особые точки, либо является односторонней поверхностью. Обозначим через $M(G)$ объединение тех шаров, балок и плиток разбиения ξ_P, которые имеют непустые пересечения с полиэдром G. Заметим, что край многообразия $M(G)$ всегда можно немного продавить внутрь и получить поверхность $F(G)$, лежащую внутри многообразия $M(G)$. Будем говорить, что она *параллельна краю.* Тогда $F(G)$ является нормальной поверхностью, которая ограничивает некоторую регулярную окрестность полиэдра G.

Итак, мы построили два типа поверхностей: связная подповерхность спайна (тип I) и край регулярной окрестности отличного от двусторонней поверхности связного простого подполиэдра спайна (тип II).

Следующая теорема дает полное описание всех связных нормальных поверхностей в многообразиях, содержащих только уравновешенные поверхности.

Теорема 1. *Пусть P — специальный спайн трехмерного многообразия M и ξ_P — отвечающее ему разбиение на ручки. Если любая нормальная поверхность в M является уравновешенной, то непустая нормальная поверхность $F \subset M$ связна тогда и только тогда, когда она имеет тип* I *или тип* II.

Доказательство. Пусть F — непустая связная нормальная поверхность в M и C — одна из плиток. Тогда пересечение $F \cap C$ либо пусто, либо имеет вид $D^2 \times \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Диски $D^2 \times \{x_1\}$ и $D^2 \times \{x_n\}$ будем называть *внешними*, остальные — *внутренними.* Если $n = 1$, то плитка содержит только один внешний диск $D^2 \times \{x_1\}$. Легко показать, что связная компонента уравновешенной поверхности не может содержать одновременно и внешние, и внутренние диски. Так как у непустой нормальной поверхности внешние диски есть всегда, то F содержит только внешние диски. Поэтому степень любой плитки разбиения ξ_P не превосходит двух. Мы утверждаем, что все ненулевые плиточные степени поверхности F равны. Рассуждая от противного, предположим, что среди плиток разбиения ξ_P имеются плитки и степени 1, и степени 2. В силу связности поверхности F найдется такая балка E, к которой примыкают и плитка степени 1, и плитка степени 2. Тогда степень третьей плитки, примыкающей к E, равна 1, что противоречит уравновешенности поверхности F. Итак, все ненулевые плиточные степени F равны между собой и равны либо 1, либо 2, а тогда она имеет соответственно либо тип I, либо тип II.

Докажем теорему в другую сторону: если нормальная поверхность F имеет тип I или тип II, то она связна. Каждая поверхность типа I связна по определению. Если поверхность F, имеющая тип II, является краем регулярной окрестности связной односторонней поверхности, то она также связна. Осталось рассмотреть случай, когда поверхность F имеет тип II и является краем регулярной окрестности связного простого подполиэдра G спайна P, причем полиэдр G имеет особые точки.

Напомним, что многообразие $M(G)$ есть объединение тех шаров, балок и плиток разбиения ξ_P, которые имеют непустые пересечения с полиэдром G. Так как поверхность F параллельна краю многообразия $M(G)$, достаточно доказать связность поверхности $\partial M(G)$. Рассуждая от противного, предположим, что край многообразия $M(G)$ не связен.

Покрасим одну из компонент края многообразия $M(G)$ в белый, остальные компоненты — в черный цвет. Каждая балка в $M(G)$ пересекает край. Будем называть ее *белой*, если она имеет непустое пересечение только с белым краем, *черной*, если только с черным, и *двухцветной*, если она пересекает и белый, и черный край. Определим валентность балки в $M(G)$ как число примыкающих к ней плиток многообразия $M(G)$ (с учетом кратности). Так как полиэдр G связен и имеет особые точки, то в $M(G)$ найдется двухцветная балка E валентности 3 (см. [4, лемма 2]). Тогда пересечение $\partial M(G) \cap E$ состоит из трех полосок, две из которых имеют один и тот же (пусть черный) цвет. Продавив черные компоненты края $\partial M(G)$ внутрь многообразия $M(G)$, мы получим неуравновешенную поверхность F_1. Действительно, одну из плиток, примыкающих к балке E, поверхность F_1 пересекает по двум дискам, а две другие плитки — по одному. Так как неуравновешенность поверхности F_1 противоречит условию теоремы, край многообразия $M(G)$, а следовательно, и поверхность F связны. Теорема доказана.

1.2. Фундаментальные поверхности. Пусть ξ_P — разбиение трехмерного многообразия M на ручки, отвечающее его специальному спайну P. Обозначим через $\mathscr{N}(P)$ множество всех поверхностей, нормальных по отношению к разбиению ξ_P. Хорошо известно, что относительно операции сложения множество $\mathscr{N}(P)$ является частичным коммутативным моноидом. Нормальная поверхность называется *фундаментальной*, если ее нельзя представить в виде суммы двух непустых нормальных поверхностей. Множество всех фундаментальных поверхностей является минимальной системой порождающих частичного моноида $\mathscr{N}(P)$.

Обозначим через $\mathscr{C}(P) = \{P_1, \ldots, P_k\}$ множество всех непустых связных простых подполиэдров специального спайна P. Построим отображение $\Psi\colon \mathscr{C}(P) \to \mathscr{N}(P)$ следующим образом. Если $S \in \mathscr{C}(P)$ — подповерхность спайна P, то S — нормальная поверхность типа I, и мы полагаем $\Psi(S) = S$. Если же $S \in \mathscr{C}(P)$ — простой подполиэдр с непустым множеством особых точек, то в качестве $\Psi(S)$ мы берем край его малой регулярной окрестности, т. е. нормальную поверхность типа II.

Данное ниже следствие теоремы 1 показывает, что образ $\operatorname{Im}\Psi$ отображения Ψ содержит почти все связные нормальные поверхности.

Следствие 1. *Пусть P — специальный спайн трехмерного многообразия M и ξ_P — отвечающее ему разбиение на ручки. Если любая нормальная поверхность в M является уравновешенной, то непустая нормальная поверхность*

$F \subset M$ связна тогда и только тогда, когда либо F лежит в $\operatorname{Im}\Psi$, либо она представима в виде $F = 2\Psi(P_i)$, где P_i — односторонняя подповерхность в P, $1 \le i \le k$.

Доказательство. По теореме 1 непустая нормальная поверхность $F \subset M$ связна тогда и только тогда, когда она имеет тип I или тип II. Так как множество $\mathscr{C}(P)$ содержит все непустые связные простые подполиэдры спайна P, то все поверхности типа I лежат в $\operatorname{Im}\Psi$. Остается заметить, что поверхность F, имеющая тип II, не принадлежит $\operatorname{Im}\Psi$ тогда и только тогда, когда она представима в виде $F = 2\Psi(P_i)$, где P_i — односторонняя подповерхность в P, $1 \le i \le k$.

Следующая теорема содержит полное описание множества всех фундаментальных поверхностей.

Теорема 2. *Пусть P — специальный спайн трехмерного многообразия M и ξ_P — отвечающее ему разбиение на ручки. Если любая нормальная поверхность в M является уравновешенной, то отображение Ψ определяет биекцию множества $\mathscr{C}(P)$ на множество всех фундаментальных поверхностей многообразия M.*

Доказательство. Так как для любых двух полиэдров P_i, P_j из множества $\mathscr{C}(P)$, $1 \le i < j \le k$, найдется плитка разбиения ξ_P, которую пересекает только один из них, то поверхности $\Psi(P_i)$, $\Psi(P_j)$ различны, т. е. отображение Ψ инъективно. Докажем, что множество всех фундаментальных поверхностей многообразия M совпадает с образом $\operatorname{Im}\Psi$ отображения Ψ.

В силу следствия 1 любая непустая связная нормальная поверхность в M либо лежит в $\operatorname{Im}\Psi$, либо может быть получена суммированием поверхностей из $\operatorname{Im}\Psi$. Поскольку каждая нормальная поверхность есть сумма своих связных компонент, то $\operatorname{Im}\Psi$ порождает частичный моноид $\mathscr{N}(P)$. Поэтому любая фундаментальная поверхность лежит в $\operatorname{Im}\Psi$.

Покажем, что любая поверхность F из $\operatorname{Im}\Psi$ фундаментальна. Рассуждая от противного, допустим, что она представима в виде суммы $F = G_1 + G_2$ двух непустых нормальных поверхностей. Так как поверхность F связна (следствие 1), можно считать (см. [7, лемма 12.1]), что поверхности G_1, G_2 также связны. Тогда они обязаны пересекаться в плитках. Итак, через некоторую плитку C разбиения ξ_P проходят все три поверхности F, G_1, G_2, причем суммарное число дисков в пересечениях $G_1 \cap C$ и $G_2 \cap C$ равно числу дисков в $F \cap C$. Так как все три поверхности связны, по теореме 1 поверхность F имеет тип II, а поверхности G_1, G_2 — тип I. Тогда возможны два случая.

(а) $G_1 = G_2$. Тогда G_1 — односторонняя подповерхность в P, так как поверхность $F = 2G_1$ связна. Поэтому $G_1 \in \mathscr{C}(P)$ и $F = 2\Psi(G_1)$. Это противоречит тому, что поверхность F лежит в $\operatorname{Im}\Psi$.

(б) $G_1 \ne G_2$. Тогда найдется такая балка E разбиения ξ_P, что ровно одна из трех примыкающих к E плиток имеет непустое пересечение с каждой из поверхностей G_1 и G_2. Следовательно, поверхность F является неуравновешенной на E, что противоречит условию теоремы.

Так как оба случая приводят к противоречию, любая поверхность из $\operatorname{Im}\Psi$ фундаментальна.

1.3. Частичный моноид нормальных поверхностей. Пусть P — специальный спайн трехмерного многообразия M и $\mathscr{C}(P) = \{P_1, \dots, P_k\}$ — множество всех его непустых связных простых подполиэдров.

Определение 3. Формальная линейная комбинация $x_1P_1+\ldots+x_kP_k$, где все x_i — целые неотрицательные числа, называется *допустимой*, если для любых $x_i\neq 0$, $x_j\neq 0$ полиэдр $P_i\cap P_j$ является простым.

Обозначим через $\mathscr{L}(P)$ множество всех допустимых комбинаций. Так как сумма допустимых комбинаций не обязана быть допустимой, множество $\mathscr{L}(P)$ является частичным коммутативным моноидом относительно естественной операции сложения линейных комбинаций. При этом $\mathscr{C}(P)$ — минимальная система порождающих этого частичного моноида.

Предложение 1. *Пусть P — специальный спайн трехмерного многообразия M и ξ_P — отвечающее ему разбиение на ручки. Если любая нормальная поверхность в M является уравновешенной, то отображение $\Psi\colon\mathscr{C}(P)\to\mathscr{N}(P)$ продолжается по линейности до сюръективного гомоморфизма $\Psi\colon\mathscr{L}(P)\to\mathscr{N}(P)$ частичных моноидов.*

Доказательство предложения удобно начать с леммы.

Лемма 1. *Пусть P — специальный спайн трехмерного многообразия M и ξ_P — отвечающее ему разбиение на ручки. Если любая нормальная поверхность в M является уравновешенной, то сумма поверхностей $F_i=\Psi(P_i)$ и $F_j=\Psi(P_j)$, где $1\leq i,j\leq k$, определена тогда и только тогда, когда линейная комбинация P_i+P_j допустима.*

Доказательство. Пусть сумма поверхностей F_i и F_j определена. Рассуждая от противного, предположим, что линейная комбинация P_i+P_j не является допустимой. Тогда полиэдр $P_i\cap P_j$ непуст и не является простым. Нетрудно доказать, что полиэдр $P_i\cap P_j$ содержит хотя бы одну 2-компоненту спайна P. Тогда в особом графе спайна P найдется такое ребро e, к которому примыкают три различные 2-компоненты спайна, причем только одна из них содержится в $P_i\cap P_j$. Обозначим через E балку разбиения ξ_P, содержащую ребро e. Тогда ровно одна из плиток, примыкающих к E, имеет непустое пересечение с каждой из поверхностей F_i и F_j. Это означает, что поверхность F_i+F_j не является уравновешенной на балке E, что противоречит условию леммы. Следовательно, линейная комбинация P_i+P_j допустима.

Напомним, почему сумма нормальных поверхностей определена не всегда. Край каждого шара разбиения ξ_P содержит четыре острова и шесть мостов, причем каждые два острова соединены ровно одним мостом. Элементарный диск будем называть *треугольным* или *четырехугольным*, если пересечение его края с мостами шара состоит соответственно из трех или четырех дуг. Будем говорить, что два элементарных диска в шаре разбиения ξ_P *эквивалентны*, если существует инвариантная на островах и мостах изотопия шара, переводящая край одного диска в край другого. Хорошо известно, что сумма двух нормальных поверхностей определена тогда и только тогда, когда их элементарные диски можно реализовать без пересечений. Это равносильно тому, что все четырехугольные диски обеих поверхностей в каждом шаре разбиения ξ_P эквивалентны.

Докажем лемму в обратную сторону. Пусть линейная комбинация P_i+P_j допустима. Тогда по определению полиэдр $P_i\cap P_j$ является простым. Возможны два случая.

1. $P_i\cap P_j=\varnothing$. Тогда найдутся такие регулярные окрестности N_i и N_j соответственно полиэдров P_i и P_j, что $N_i\cap N_j=\varnothing$. В силу определения отоб-

ражения Ψ можно считать, что $F_i \subset N_i$ и $F_j \subset N_j$. Поэтому $F_i \cap F_j = \varnothing$ и, следовательно, поверхность $F_i + F_j$ определена.

2. $P_i \cap P_j \neq \varnothing$. Рассуждая от противного, предположим, что сумма поверхностей F_i и F_j не определена. Тогда эти поверхности пересекают некоторый шар V разбиения ξ_P по неэквивалентным четырехугольным дискам. Заметим, что край любого четырехугольного диска пересекает все острова шара, в котором этот диск содержится. Следовательно, каждый из полиэдров P_i и P_j, а значит, и полиэдр $P_i \cap P_j$, содержит все ребра, примыкающие к вершине $v \subset V$ спайна P. Обозначим через $N(v, P)$ регулярную окрестность вершины v в P. Она гомеоморфна конусу над полным графом с четырьмя вершинами. Конусы над открытыми ребрами графа, т. е. компоненты связности пересечения окрестности $N(v, P)$ с 2-компонентами спайна P, будут называться *крыльями*. Таким образом, $N(v, P)$ имеет 6 крыльев. Заметим, что ни один из полиэдров P_i и P_j не может содержать все 6 крыльев. Действительно, если один из них, скажем P_i, содержит все 6 крыльев, то он имеет особые точки. Тогда поверхность $F_i = \Psi(P_i)$ является краем регулярной окрестности полиэдра P_i и, следовательно, пересекает шар V только по треугольным дискам. Пусть полиэдр P_i не содержит крыло w_i, а полиэдр P_j — крыло w_j. Тогда эти крылья различны и примыкают к одному ребру (обозначим его через e) спайна, иначе в шаре V четырехугольные диски поверхностей были бы эквивалентны. Итак, полиэдр $P_i \cap P_j$ содержит ребро e, но не содержит двух крыльев, примыкающих к e. Это противоречит тому, что он является простым. Поэтому сумма $F_i + F_j$ определена.

Доказательство предложения 1. Пусть $x_1P_1 + \ldots + x_kP_k$ — допустимая комбинация. Тогда для любых $x_i \neq 0$, $x_j \neq 0$ линейная комбинация $P_i + P_j$ также допустима. Следовательно, в силу леммы 1 определена сумма поверхностей $\Psi(P_i)$ и $\Psi(P_j)$. Это обеспечивает существование поверхности $x_1\Psi(P_1) + \ldots + x_k\Psi(P_k)$, т. е. отображение $\Psi\colon \mathscr{C}(P) \to \mathscr{N}(P)$ продолжается по линейности до отображения $\Psi\colon \mathscr{L}(P) \to \mathscr{N}(P)$.

Докажем его сюръективность. Пусть F — нормальная поверхность. Поскольку по теореме 2 поверхности $\Psi(P_1), \ldots, \Psi(P_k)$ порождают частичный моноид $\mathscr{N}(P)$, поверхность F представима в виде суммы $F = x_1\Psi(P_1) + \ldots + x_k\Psi(P_k)$. Тогда в силу леммы 1 линейная комбинация $x_1P_1 + \ldots + x_kP_k$ является допустимой, причем $\Psi(x_1P_1 + \ldots + x_kP_k) = F$. Предложение доказано.

Наша ближайшая цель — выделить в частичном моноиде $\mathscr{L}(P)$ такое подмножество $\mathscr{L}_0(P)$, что сужение отображения Ψ на $\mathscr{L}_0(P)$ будет биективно. Определим функцию $\delta\colon \mathscr{C}(P) \times \mathscr{C}(P) \to \mathbb{Z}$ следующим образом:

$$\delta(P_i, P_j) = \begin{cases} 0, & \text{если либо } P_i \subseteq P_j, \text{ либо } P_j \subseteq P_i, \text{ либо } P_i \cap P_j = \varnothing; \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для удобства обозначений вместо $\delta(P_i, P_j)$ будем писать δ_{ij}.

Определение 4. *Сложностью* формальной линейной комбинации $L = x_1P_1 + \ldots + x_kP_k$, где все x_i — целые неотрицательные числа, будем называть число

$$c(L) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} x_i x_j \delta_{ij}.$$

Обозначим через $\mathscr{L}_0(P)$ множество всех формальных линейных комбинаций вида $x_1P_1 + \ldots + x_kP_k$, где все x_i — целые неотрицательные числа, имеющих сложность 0. Очевидно, что $\mathscr{L}_0(P) \subset \mathscr{L}(P)$. Пусть Ψ_0 — сужение отображения Ψ на множество $\mathscr{L}_0(P)$.

Оказывается, что так введенное множество $\mathscr{L}_0(P)$ параметризует множество нормальных поверхностей.

Предложение 2. *Пусть P — специальный спайн трехмерного многообразия M и ξ_P — отвечающее ему разбиение на ручки. Если любая нормальная поверхность в M является уравновешенной, то отображение $\Psi_0\colon \mathscr{L}_0(P) \to \mathscr{N}(P)$ биективно.*

Доказательство. Построим отображение $\Phi\colon \mathscr{N}(P) \to \mathscr{L}_0(P)$ следующим образом. Пусть F — нормальная поверхность. Представим F в виде суммы своих связных компонент. В силу следствия 1 каждую связную компоненту поверхности F можно однозначно записать либо как $\Psi(P_i)$, либо как $2\Psi(P_i)$, где $P_i \in \mathscr{C}(P)$. Таким образом, мы имеем разложение $F = x_1\Psi(P_1) + \ldots + x_k\Psi(P_k)$ поверхности F в сумму фундаментальных поверхностей $\Psi(P_1), \ldots, \Psi(P_k)$ (если $F = \varnothing$, то все коэффициенты в разложении равны нулю). Пусть $L = x_1P_1 + \ldots + x_kP_k$. Положим $\Phi(F) = L$.

Докажем, что $c(L) = 0$. Для этого достаточно показать, что условие $x_ix_j > 0$ влечет $\delta_{ij} = 0$, где $1 \le i < j \le k$. Пусть $x_ix_j > 0$. Тогда поверхности $\Psi(P_i)$ и $\Psi(P_j)$ можно реализовать в M без пересечения, так как хотя бы одна поверхность из каждой пары $(\Psi(P_i), 2\Psi(P_i))$, $(\Psi(P_j), 2\Psi(P_j))$ является связной компонентой поверхности F. Более того, найдутся такие малые регулярные окрестности N_i и N_j соответственно полиэдров P_i и P_j, что $\partial N_i \cap \partial N_j = \varnothing$. Тогда либо $N_i \cap N_j = \varnothing$, либо $N_i \subset N_j$, либо $N_j \subset N_i$. Следовательно, либо $P_i \cap P_j = \varnothing$, либо $P_i \subset P_j$, либо $P_j \subset P_i$. Это означает, что $\delta_{ij} = 0$.

Очевидно, что $\Psi_0\Phi = 1_{\mathscr{N}(P)}$. Докажем, что $\Phi\Psi_0 = 1_{\mathscr{L}_0(P)}$.

Опишем правило, которое каждой допустимой комбинации $L = x_1P_1 + \ldots + x_kP_k$ сопоставляет набор $\mathscr{R}(L)$ связных нормальных поверхностей. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ нужно взять либо x_i экземпляров поверхности $\Psi(P_i)$, если полиэдр P_i не является односторонней поверхностью, либо $[x_i/2]$ экземпляров поверхности $2\Psi(P_i)$ и $x_i \bmod 2$ экземпляров поверхности $\Psi(P_i)$, если P_i — односторонняя поверхность. Построенный набор нормальных поверхностей является характеристическим в следующем смысле: если $\mathscr{R}(L_1) = \mathscr{R}(L_2)$, то $L_1 = L_2$ для любых допустимых комбинаций $L_1, L_2 \in \mathscr{L}(P)$. Это очевидно в силу следствия 1.

Пусть $L_1 \in \mathscr{L}_0(P)$ и $L_2 = \Phi\Psi_0(L_1)$. Так как $\Psi_0\Phi = 1_{\mathscr{N}(P)}$, то $\Psi_0(L_2) = \Psi_0(L_1)$. Ключевой момент доказательства состоит в том, что $\mathscr{R}(L_1) = \mathscr{R}(L_2)$. Действительно, так как $c(L_i) = 0$, то все поверхности набора $\mathscr{R}(L_i)$, $i = 1, 2$, можно реализовать в M без пересечения. Тогда $\mathscr{R}(L_i)$ — множество всех связных компонент поверхности $\Psi_0(L_i)$. Так как связные компоненты любой поверхности определены однозначно, то равенство поверхностей $\Psi_0(L_1) = \Psi_0(L_2)$ влечет равенство наборов $\mathscr{R}(L_1) = \mathscr{R}(L_2)$. Следовательно, $L_1 = L_2$ и $\Phi\Psi_0 = 1_{\mathscr{L}_0(P)}$. Предложение доказано.

Пусть любая нормальная по отношению к разбиению ξ_P поверхность в многообразии M является уравновешенной. Зададим на множестве $\mathscr{L}_0(P)$ частичную операцию $\oplus$. Так как по предложению 2 отображение Ψ_0 биективно, определено отображение

$$r = \Psi_0^{-1}\Psi\colon \mathscr{L}(P) \to \mathscr{L}_0(P).$$

Пусть $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_0(P)$. Будем считать, что сумма $L_1 \oplus L_2$ определена тогда и только тогда, когда в частичном моноиде $\mathscr{L}(P)$ определена сумма $L_1 + L_2$. При этом полагаем

$$L_1 \oplus L_2 = r(L_1 + L_2).$$

Следующую теорему можно рассматривать как полное описание частичного моноида нормальных поверхностей.

Теорема 3. *Пусть P — специальный спайн трехмерного многообразия M и ξ_P — отвечающее ему разбиение на ручки. Если любая нормальная поверхность в M является уравновешенной, то множество $\mathscr{L}_0(P)$ с операцией $\oplus$ является частичным коммутативным моноидом, изоморфным частичному моноиду $\mathscr{N}(P)$ нормальных поверхностей, а отображение Ψ_0 — соответствующий изоморфизм.*

Доказательство. Коммутативность операции $\oplus$ следует из коммутативности сложения допустимых комбинаций. Для доказательства ассоциативности операции введем на множестве $\mathscr{L}(P)$ отношение эквивалентности $\sim$: допустимые комбинации L_1 и L_2 эквивалентны, если $\Psi(L_1) = \Psi(L_2)$. Очевидно, что $r(L) \sim L$ для любой допустимой комбинации L. Тогда справедлива следующая последовательность преобразований:

$$\begin{aligned}(L_1 \oplus L_2) \oplus L_3 = r(r(L_1 + L_2) + L_3) \sim r(L_1 + L_2) + L_3 \sim L_1 + L_2 + L_3 \\ \sim L_1 + r(L_2 + L_3) \sim r(L_1 + r(L_2 + L_3)) = L_1 \oplus (L_2 \oplus L_3).\end{aligned}$$

Так как на $\mathscr{L}_0(P)$ эквивалентность совпадает с равенством, то $(L_1 \oplus L_2) \oplus L_3 = L_1 \oplus (L_2 \oplus L_3)$. Поэтому множество $\mathscr{L}_0(P)$ с операцией $\oplus$ является частичным коммутативным моноидом.

Докажем линейность отображения Ψ_0. В самом деле,

$$\Psi_0(L_1 \oplus L_2) = \Psi_0 r(L_1 + L_2) = \Psi(L_1 + L_2) = \Psi(L_1) + \Psi(L_2) = \Psi_0(L_1) + \Psi_0(L_2).$$

Так как по предложению 2 отображение Ψ_0 биективно отображает $\mathscr{L}_0(P)$ на $\mathscr{N}(P)$, теорема доказана.

2. Нормальные поверхности в многообразиях с симметричными цепными спайнами

Незамкнутой цепочкой будем называть регулярный граф степени 4, состоящий из двух петель и нескольких двойных ребер. Если все ребра регулярного графа степени 4 являются двойными, то такой граф называется *замкнутой цепочкой*. Под *звеном* цепочки понимается либо петля, либо двойное ребро графа. Будем считать, что ребра замкнутой цепочки, содержащей ровно две вершины, некоторым образом разбиты на два звена.

Определение 5. Специальный полиэдр P называется *симметричным цепным полиэдром*, если он удовлетворяет трем условиям:

1) особый граф полиэдра P есть замкнутая или незамкнутая цепочка;

2) P не содержит 2-компоненту, граничная кривая которой проходит по не более чем двум вершинам и по каждой из них ровно один раз;

3) существует инвариантная на каждой 2-компоненте инволюция φ полиэдра P, которая (а) неподвижна на вершинах цепочки, (б) имеет ровно одну неподвижную точку внутри каждой петли, (в) переставляет ребра каждого звена цепочки.

Для иллюстрации определения на рис. 1 изображена регулярная окрестность особого графа симметричного цепного спайна линзового пространства $L_{11,2}$.

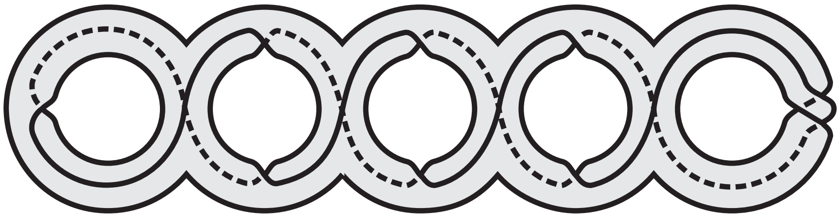

Рис. 1

2.1. Основная теорема.

Теорема 4. *Пусть P — симметричный цепной спайн трехмерного многообразия M и ξ_P — отвечающее ему разбиение на ручки. Тогда любая нормальная поверхность в M является уравновешенной.*

Идея доказательства теоремы состоит в анализе того, как связаны между собой плиточные степени нормальной поверхности F по отношению ко всем четырем плиткам, которые примыкают к одному шару V. Пусть балки E_1, E_1', E_2, E_2' примыкают к шару V, причем E_1, E_1' отвечают ребрам одного звена цепочки, E_2, E_2' — другого. Если звено цепочки является петлей, то $E_i = E_i'$, где $i = 1, 2$. Обозначим через C_1, C_2 плитки, которые дважды проходят через V с балок одного звена на балки другого. Пусть плитка C_3 проходит через V с балки E_1 на балку E_1', плитка C_4 — с балки E_2 на балку E_2'. Степень поверхности F по отношению к плитке C_i обозначим через y_i, $1 \le i \le 4$.

Лемма 2. *Если поверхность F на балках E_1, E_1' не уравновешена, причем максимальная степень равна y_1, то на балках E_2, E_2' она тоже не уравновешена, причем ее максимальная степень равна y_4 и $y_4 > y_1$.*

Доказательство. Рассмотрим три суммы: $y_1 + y_1$, $y_2 + y_2$ и $y_3 + y_4$. Каждая из этих сумм показывает, сколько раз элементарные диски поверхности пересекают соответствующую пару противоположных (т. е. не примыкающих к одному острову) мостов шара V. Так как каждый треугольный диск проходит ровно по одному из двух противоположных мостов, он вносит равный вклад во все три суммы. По условию леммы $y_1 > y_2$, поэтому среди элементарных дисков поверхности F в шаре V есть четырехугольные диски. Поскольку каждый четырехугольный диск проходит только по двум парам противоположных мостов, он вносит равный вклад в две суммы из трех. Значит, четырехугольные диски проходят по мостам плиток C_1, C_3, C_4. Поэтому $2y_1 = y_3 + y_4 > 2y_2$. Так как $y_1 > y_3$, то $y_4 > y_1$. Таким образом, среди плиточных степеней y_1, y_2, y_4 поверхности F на балках E_2, E_2' есть строго максимальная степень y_4. Это означает, что поверхность F не уравновешена на балках E_2, E_2'. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Рассуждая от противного, предположим, что найдутся такие нормальная поверхность F и балка E_1, что F не уравновешена на E_1. Тогда одна из плиток (скажем C_1), примыкающих к балке E_1, имеет степень, строго большую, чем степень каждой из двух оставшихся плиток (C_2 и C_3), также примыкающих к E_1. Так как в P нет 2-компонент, граничные кривые которых проходят только по одному звену цепочки, то плитка C_1 переходит с балки E_1 на балки, соответствующие другим звеньям цепочки. Воспользуемся обозначениями, описанными перед леммой 2. В силу леммы 2 поверхность F не уравновешена на балке E_2, причем ее максимальная степень равна y_4 и больше, чем максимальная степень y_1 поверхности F на балке E_1. Как легко заметить, все три плитки C_1, C_2, C_4, примыкающие к E_2, различны, так как $y_4 > y_1 > y_2$. Повторяя предыдущее рассуждение, перейдем от балки E_2 к балке E_3, максимальная степень опять возрастает, и т. д. Разумеется, при завершении обхода замкнутой цепочки такое возрастание степеней приводит к противоречию. В случае же незамкнутой цепочки мы остановимся на балке, соответствующей петле цепочки. При этом все три плитки, примыкающие к ней, различны. Тогда граничная кривая одной из 2-компонент симметричного цепного спайна P проходит только по петле, что противоречит определению. Теорема доказана.

В заключение данного пункта отметим, что условие теоремы 4 является достаточным для уравновешенности всех нормальных поверхностей, но не является необходимым. Нетрудно проверить, что любая поверхность в фактор-пространстве сферы S^3 по линейному действию группы $P_{24} = \langle x, y \mid x^2 = (xy)^3 = y^3,\ x^4 = 1\rangle$ нормальная по отношению к разбиению на ручки, порожденному минимальным специальным спайном (см. рисунок в [8, 9]), является уравновешенной.

2.2. Алгоритм нахождения суммы $L_1 \oplus L_2$. Пусть P — симметричный цепной спайн трехмерного многообразия M и $\mathscr{C}(P) = \{P_1, \dots , P_k\}$ — множество всех его непустых связных простых подполиэдров. Напомним, что частичный моноид $\mathscr{L}_0(P)$, состоящий из допустимых комбинаций вида $x_1P_1 + \ldots + x_kP_k$, имеющих сложность 0, изоморфен частичному моноиду нормальных поверхностей. Определенный в п. 1.3 способ нахождения суммы $L_1 \oplus L_2$, где $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_0(P)$, неудобен с практической точки зрения. Действительно, для нахождения $L_1 \oplus L_2$ вначале нужно построить нормальную поверхность $\Psi(L_1 + L_2)$, а затем найти соответствующую этой поверхности допустимую комбинацию $\Psi_0^{-1}\Psi(L_1 + L_2)$ сложности 0. Наша цель — построить эффективный алгоритм нахождения суммы $L_1 \oplus L_2$ в случае симметричного цепного спайна.

Опишем элементарное преобразование μ допустимых комбинаций. Пусть $L_1 = x_1P_1 + \ldots + x_kP_k \in \mathscr{L}(P)$ и $c(L_1) > 0$. Тогда найдутся такие i, j, $1 \le i < j \le k$, что $x_ix_j\delta_{ij} > 0$. Нетрудно доказать, что все простые подполиэдры в P связны и поэтому $\mathscr{C}(P)$ совпадает с множеством всех непустых простых подполиэдров спайна P. Так как полиэдры $P_i \cup P_j$, $P_i \cap P_j$ просты, они содержатся в $\mathscr{C}(P)$. Поэтому найдутся такие s, l, $1 \le s, l \le k$, что $P_s = P_i \cup P_j$, $P_l = P_i \cap P_j$, причем числа i, j, s, l различны. Каждому полиэдру P_t, $1 \le t \le k$, сопоставим число ε_t по следующему правилу: $\varepsilon_t = 2$, если полиэдр P_t является поверхностью, и $\varepsilon_t = 1$, если он имеет особые точки. Заменив в L_1 коэффициенты x_i, x_j, x_s, x_l соответственно на $x_i \dot{-} x_j$, $x_j \dot{-} x_i$, $x_s + \min(x_i, x_j)$, $x_l + \varepsilon_l \min(x_i, x_j)$, мы получим линейную комбинацию L_2 (где $x_i \dot{-} x_j = x_i - x_j$, если $x_i \ge x_j$, и $x_i \dot{-} x_j = 0$, если $x_i < x_j$). Будем говорить, что L_2 получается из L_1 с помощью преобразования μ.

Напомним, что в доказательстве теоремы 3 мы на множестве $\mathscr{L}(P)$ задали отношение эквивалентности $\sim$: допустимые комбинации L_1 и L_2 эквивалентны, если $\Psi(L_1) = \Psi(L_2)$.

Лемма 3. *Пусть P — симметричный цепной спайн трехмерного многообразия M. Пусть линейная комбинация L_2 получается из допустимой комбинации $L_1 = x_1P_1 + \ldots + x_kP_k$ с помощью преобразования μ. Тогда $L_2 \in \mathscr{L}(P)$, $L_2 \sim L_1$ и $c(L_2) < c(L_1)$.*

Доказательство. Для удобства обозначений можно считать, что преобразование μ определяется полиэдрами P_1 и P_2, причем $x_1 \geq x_2$ и $P_3 = P_1 \cup P_2$, $P_4 = P_1 \cap P_2$. Допустимость комбинации L_2 следует из очевидного утверждения: если полиэдры $P_1 \cap P_2$, $P_1 \cap P_m$ и $P_2 \cap P_m$ просты, то полиэдры $P_1 \cap P_2 \cap P_m$ и $(P_1 \cup P_2) \cap P_m$ тоже просты, где $1 \leq m \leq k$.

Рассмотрим три линейные комбинации:

$$L = x_3P_3 + \ldots + x_kP_k, \quad L'_1 = x_1P_1 + x_2P_2, \quad L'_2 = (x_1 - x_2)P_1 + x_2P_3 + \varepsilon_4 x_2 P_4.$$

Очевидно, что $L_1 = L'_1 + L$ и $L_2 = L'_2 + L$. В силу линейности отображения Ψ утверждение $L_2 \sim L_1$ равносильно равенству $\Psi(L'_2) = \Psi(L'_1)$. В справедливости последнего легко убедиться, вычислив плиточные степени поверхностей $\Psi(L'_1)$ и $\Psi(L'_2)$.

Докажем, что $c(L_2) < c(L_1)$. Пусть

$$A_m = x_1\delta_{1m} + x_2\delta_{2m}, \quad B_m = (x_1 - x_2)\delta_{1m} + x_2\delta_{3m} + \varepsilon_4 x_2 \delta_{4m}.$$

Тогда

$$c(L_1) = c(L'_1) + c(L) + \sum_{m=3}^{k} x_m A_m, \quad c(L_2) = c(L'_2) + c(L) + \sum_{m=3}^{k} x_m B_m.$$

Так как $c(L'_1) = x_1x_2 > 0$ и $c(L'_2) = 0$, достаточно показать для каждого $m = 3, 4, \ldots, k$ справедливость неравенства $B_m \leq A_m$ при $x_m > 0$. Во-первых, заметим, что $\varepsilon_4 x_2 \delta_{4m} = x_2\delta_{4m}$. Действительно, если $\varepsilon_4 = 2$, то поверхность P_4 обязана содержаться в P_m, что влечет $\delta_{4m} = 0$. Во-вторых, нетрудно доказать, что $\delta_{3m} + \delta_{4m} \leq \delta_{1m} + \delta_{2m}$. Тогда

$$B_m = (x_1 - x_2)\delta_{1m} + x_2\delta_{3m} + x_2\delta_{4m} \leq (x_1 - x_2)\delta_{1m} + x_2\delta_{1m} + x_2\delta_{2m} = A_m.$$

Лемма доказана.

Алгоритм. Пусть $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_0(P)$, где P — симметричный цепной спайн. Мы хотим найти сумму $L_1 \oplus L_2$. Будем применять преобразование μ к $L_1 + L_2$ до тех пор, пока это возможно. Так как каждое преобразование уменьшает сложность допустимой комбинации, этот процесс закончится после конечного числа преобразований. В результате мы получим допустимую комбинацию L'. Докажем, что $L_1 \oplus L_2 = L'$. Действительно, из леммы 3 следует, что $L' \sim L_1 + L_2$. При этом $c(L') = 0$, иначе к L' можно применить преобразование μ.

3. Какие многообразия имеют симметричные цепные спайны?

Напомним, что $L_{p,q}$ и S^3/Q_{4n} обозначают линзовое пространство с параметрами p, q и фактор-пространство сферы S^3 по линейному действию обобщенной группы кватернионов $Q_{4n} = \langle x, y \mid x^2 = (xy)^2 = y^{2n} \rangle$. Обозначим через T_0 тор с удаленным открытым диском (*проколотый тор*).

Определение 6. Пусть $h\colon T_0 \to T_0$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм проколотого тора T_0 на себя. *Многообразием Столлингса* $M_h = (T_0 \times I)/h$ *со слоем* T_0 *и отображением монодромии* h называется многообразие, полученное из прямого произведения $T_0 \times I$ отождествлением каждой точки $(x, 0) \in T_0 \times \{0\}$ с точкой $(h(x), 1) \in T_0 \times \{1\}$.

Обозначим через $\mathrm{tr}(A)$ след матрицы $A \in SL(2,\mathbb{Z})$. Напомним, что матрица A имеет *эллиптический*, *параболический* или *гиперболический* тип, если соответственно $|\mathrm{tr}(A)| < 2$, $|\mathrm{tr}(A)| = 2$ или $|\mathrm{tr}(A)| > 2$. Зафиксируем какой-нибудь базис в $H_1(T_0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Так как отображение монодромии $h\colon T_0 \to T_0$ многообразия Столлингса M_h сохраняет ориентацию, индуцированный гомоморфизм $h_*\colon H_1(T_0) \to H_1(T_0)$ можно отождествить с матрицей $A_h \in SL(2,\mathbb{Z})$. Заметим, что тип отображения монодромии h определяется типом матрицы A_h.

Теорема 5. *Трехмерное ориентируемое многообразие M имеет симметричный цепной спайн тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(1) *$M = L_{p,q}$, где $p \geq 4$;*

(2) *$M = S^3/Q_{4n}$, где $n \geq 2$;*

(3) *M является многообразием Столлингса со слоем проколотый тор и сохраняющим ориентацию гиперболическим отображением монодромии.*

Доказательство. Симметричные цепные спайны многообразий $L_{p,q}$, $p \geq 4$, и S^3/Q_{4n}, $n \geq 2$, построены в работе [8]. Аналогичные спайны многообразий Столлингса со слоем проколотый тор и гиперболическим отображением монодромии были построены Т. Йоргенсеном. Их описание опубликовано в [10].

Пусть симметричный цепной спайн P ориентируемого многообразия M содержит n вершин. Докажем, что M является одним из указанных многообразий. Вначале определим число 2-компонент спайна. Так как любая нормальная поверхность в M уравновешена (теорема 4), по теореме 1 край регулярной окрестности спайна P в многообразии M связен. Простой анализ эйлеровой характеристики показывает, что число 2-компонент спайна P не превосходит $n+1$.

Напомним, что через φ мы обозначили инволюцию симметричного цепного спайна P. Для оценки числа 2-компонент снизу выберем по одной внутренней точке на каждом ребре особого графа спайна так, чтобы множество всех выбранных точек (обозначим его через X) было φ-инвариантно. Пусть β — 2-компонента спайна P. Тогда существует *характеристическое отображение* $f : D^2 \to P$, которое гомеоморфно отображает $\mathrm{Int}\, D^2$ на β, а его сужение на ∂D^2 является локальным вложением. Будем называть кривую $f_{|\partial D^2} : \partial D^2 \to P$ (как и ее образ $f_{|\partial D^2}(\partial D^2)$) *граничной кривой* 2-компоненты β. Точки прообраза $f^{-1}(X)$ разбивают ∂D^2 на дуги. При этом сужение характеристического отображения на каждую из дуг является локальным вложением. Образ дуги из ∂D^2 при отображении f будем называть дугой граничной кривой 2-компоненты β. Так как инволюция φ инвариантна на каждой 2-компоненте, то каждая граничная кривая содержит не более двух φ-инвариантных дуг. Заметим, что суммарное число φ-инвариантных дуг граничных кривых всех 2-компонент спайна P равно $2n$. Это следует из того, что дуга граничной кривой φ-инвариантна тогда и только тогда, когда ее крайние точки лежат на ребрах одного звена цепочки (особого графа). Поэтому число 2-компонент спайна P не может быть меньше, чем n.

Пусть особый граф спайна P есть незамкнутая цепочка. Так как граничная кривая, проходящая по петле цепочки ровно один раз, имеет менее двух φ-инвариантных дуг, число 2-компонент спайна P равно $n+1$. В этом случае P — спайн линзового пространства $L_{p,q}$, причем $p \geq 4$ (см. [8]). Если особый граф спайна P — замкнутая цепочка и число 2-компонент равно $n+1$, то мы имеем спайн многообразия S^3/Q_{4n} (см. [8]).

Пусть особый граф спайна P является замкнутой цепочкой и число 2-компонент равно n. Соединим каждую пару точек множества X, принадлежащих ребрам одного звена цепочки, попарно различными (за исключением общих концов) простыми дугами в P так, чтобы внутренние точки дуг не пересекали особый граф спайна. Это можно сделать, поскольку инволюция φ меняет ориентации всех 2-компонент. Мы получим набор θ-кривых (окружностей с диаметром). Они разбивают спайн на простые полиэдры с краем. Каждый такой полиэдр содержит одну вершину спайна P, а его край состоит из двух θ-кривых. Более того, каждый полиэдр гомеоморфен стандартному полиэдру J, описанному в [11]. Используя идею работы [11], а именно вложение полиэдра J в $T_0 \times I$, несложно показать, что M является многообразием Столлингса $M_h = (T_0 \times I)/h$ со слоем T_0. Мы будем отождествлять слой $T_0 \times \{0\}$ многообразия M_h с проколотым тором T_0.

Можно считать, что P расположен в M_h так, что пересечение каждого слоя многообразия M_h со спайном P есть либо θ-кривая, либо букет двух окружностей. Последнее возможно только тогда, когда слой содержит вершину спайна. Более того, будем считать, что $T_0 \cap P$ является θ-кривой. Разрезав по ней спайн P, мы получим полиэдр $P' \subset T_0 \times I$.

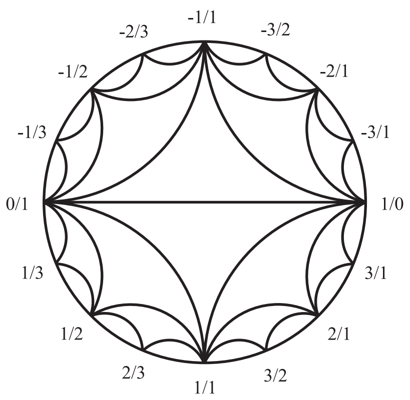

Рис. 2

Для доказательства гиперболичности отображения монодромии h нам понадобится классическая идеальная триангуляция $\mathscr{T}$ (рис. 2) гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ (см. [10]). В качестве модели $\mathbb{H}^2$ рассмотрим верхнюю полуплоскость комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченную окружностью $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Множество вершин триангуляции $\mathscr{T}$ состоит из точек $\mathbb{Q} \cup \{1/0\} \subset \partial\mathbb{H}^2$, где $1/0 = \infty$. При этом две вершины a/b, c/d соединены ребром (геодезической) тогда и только тогда, когда $ad - bc = \pm 1$.

Напомним, что простая замкнутая кривая $\ell \subset T_0$ называется *существенной*, если она определяет нетривиальный элемент группы $H_1(T_0)$. Хорошо известно, что отображение, сопоставляющее каждой существенной кривой ℓ число $b/a \in \mathbb{Q} \cup \{1/0\}$, где $\pm(a, b)$ — гомологический класс кривой ℓ, определяет биекцию между изотопическими классами существенных кривых на T_0 и вершинами триангуляции $\mathscr{T}$. Каждая неразбивающая θ-кривая на T_0 содержит три различные существенные кривые (назовем их *несущими*), каждая из которых состоит из двух ребер θ-кривой. При этом индекс пересечения любых двух несущих кривых равен ± 1. Это означает, что вершины триангуляции

$\mathscr{T}$, соответствующие трем несущим кривым данной θ-кривой, лежат в одном идеальном треугольнике. Поэтому имеется биекция σ между изотопическими классами неразбивающих θ-кривых на T_0 и треугольниками триангуляции $\mathscr{T}$.

Матрица A_h, как и любая другая матрица из группы $SL(2,\mathbb{Z})$, определяет дробно-линейное преобразование α_h гиперболической плоскости. Это преобразование продолжается на $\partial\mathbb{H}^2$ и является сохраняющей ориентацию изометрией $\mathbb{H}^2$. Легко проверить, что изометрия α_h сохраняет триангуляцию $\mathscr{T}$. Более того, для любой неразбивающей θ-кривой $\theta \subset T_0$ справедливо равенство $\sigma(h(\theta)) = \alpha_h(\sigma(\theta))$.

Путем в триангуляции $\mathscr{T}$ будем называть такую последовательность треугольников $\{\triangle_1, \dots, \triangle_k\}$, что для каждого $i = 1, 2, \dots, k-1$ треугольники $\triangle_i$ и $\triangle_{i+1}$ имеют ровно одно общее ребро. Путь $\{\triangle_1, \dots, \triangle_k\}$ называется *замкнутым*, если $\alpha_h(\triangle_1) = \triangle_k$.

Сопоставим полиэдру P' замкнутый путь следующим образом. Выберем числа $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ так, чтобы для каждого i, $0 \le i \le n-1$, многообразие $T_0 \times (t_i, t_{i+1})$ содержало ровно одну вершину полиэдра P'. Обозначим через $\theta_t \times \{t\}$ пересечение полиэдра P' с $T_0 \times \{t\}$, $t \in I$. Тогда $K_{P'} = \{\sigma(\theta_{t_0}), \dots, \sigma(\theta_{t_n})\}$ — требуемый замкнутый путь. Действительно, $\theta_{t_0}, \dots, \theta_{t_n}$ — θ-кривые, так как слои $T_0 \times \{t_0\}, \dots, T_0 \times \{t_n\}$ не пересекают вершин полиэдра P'. Более того, каждое $\theta_{t_{i+1}}$ получается из θ_{t_i} хорошо известным флип-преобразованием. Поскольку при флип-преобразовании изменяется гомологический класс ровно одной из трех несущих кривых θ-кривой, треугольники $\sigma(\theta_{t_i}), \sigma(\theta_{t_{i+1}})$ имеют ровно одно общее ребро. Далее, так как $\theta_{t_n} = h(\theta_{t_0})$, то $\sigma(\theta_{t_n}) = \alpha_h(\sigma(\theta_{t_0}))$. Заметим, что путь $K_{P'}$ определен однозначно. Действительно, если мы выберем другие числа $0 = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_n = 1$, то для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ треугольники $\sigma(\theta_{t_i}), \sigma(\theta_{t'_i})$ обязаны совпасть ввиду того, что θ-кривые $\theta_{t_i}, \theta_{t'_i}$ изотопны.

Напомним, что P имеет по крайней мере две вершины, не содержит 2-компонент, граничные кривые которых проходят по ребрам только одного звена цепочки, и все его 2-компоненты являются 2-клетками. Отсюда следует, что сопоставляемый полиэдру P' замкнутый путь $K_{P'}$ удовлетворяет следующим условиям:

(А) $K_{P'}$ содержит не менее трех треугольников;

(Б) $K_{P'}$ является *простым*, т. е. все треугольники пути попарно различны;

(В) $\alpha_h(\sigma(\theta_{t_0}) \cap \sigma(\theta_{t_1})) \ne \sigma(\theta_{t_{n-1}}) \cap \sigma(\theta_{t_n})$;

(Г) треугольники $\sigma(\theta_{t_0}), \sigma(\theta_{t_n})$ не имеют общих вершин.

Так как тип изометрии α_h (эллиптический, параболический или гиперболический) так же, как и тип отображения монодромии h, определяется типом матрицы A_h, нам достаточно показать гиперболичность α_h. Каждая эллиптическая изометрия гиперболической плоскости имеет единственную неподвижную точку в $\mathbb{H}^2$ и не имеет неподвижных точек в $\partial\mathbb{H}^2$, т. е. на круге Пуанкаре представляется вращением (см. [12]). В этом случае любой простой замкнутый путь не удовлетворяет либо условию (А), либо условию (В). Каждая параболическая изометрия имеет единственную неподвижную точку в $\partial\mathbb{H}^2$ (некоторую вершину v триангуляции $\mathscr{T}$) и не имеет неподвижных точек в $\mathbb{H}^2$. В этом случае любой простой замкнутый путь не удовлетворяет либо условию (В) (если первый треугольник пути не содержит v), либо условию (Г) (если все треугольники пути содержат v). Поэтому α_h — гиперболическая изометрия гиперболической плоскости, а h — гиперболическое отображение монодромии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Haken W.* Theorie der Normalflächen. Ein Isotopiekriterium für der Kreisknoten // Acta. Math. 1961. V. 105. P. 245–375.
2. *Jaco W., Oertel U.* An algorithm to decide if a 3-manifold is a Haken manifold // Topology. 1984. V. 23, N 2. P. 195–209.
3. *Thompson A.* Thin position and the recognition problem for S^3 // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 613–630.
4. *Матвеев С. В.* Алгоритм распознавания трехмерной сферы (по А. Томпсон) // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 5. С. 69–84.
5. *Фоминых Е. А.* Полное описание множества фундаментальных поверхностей для некоторых трехмерных многообразий // Тр. конф. «Геометрия и приложения», посвященной 70-летию В. А. Топоногова, Новосибирск, 13–16 марта 2000 г. Новосибирск: Ин-т математики, 2001. С. 204–214.
6. *Матвеев С. В., Фоминых Е. А.* Нормальные поверхности в трехмерных многообразиях // Докл. РАН. 2002. Т. 384, № 6. С. 727–730.
7. *Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. М.: Изд-во МГУ, 1991.
8. *Matveev S. V.* Tables of 3-manifolds up to complexity 6. Bonn, 1998. 50 p. (Препринт/Max-Planck-Institut für Mathematik; N 67).
9. *Фоменко А. Т.* Наглядная геометрия и топология. М.: Изд-во МГУ, 1993.
10. *Floyd W., Hatcher A.* Incompressible surfaces in punctured-torus bundles // Topology and its Applications. 1982. V. 13. P. 263–282.
11. *Овчинников М. А.* Представление гомеотопий тора простыми полиэдрами с краем // Мат. заметки. 1999. Т. 66, № 4. С. 533–539.
12. *Кассон Э., Блейлер С.* Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Терстону. М.: ФАЗИС, 1998.

Статья поступила 26 июня 2002 г.

Фоминых Евгений Анатольевич
Челябинский гос. университет, ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454021
fominykh@csu.ru