Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6

УДК 517.95

КРИТЕРИЙ ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА — БЕЛЬТРАМИ НА КВАЗИМОДЕЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

А. В. Светлов

Аннотация: Исследуется спектр оператора Лапласа — Бельтрами на некомпактных римановых многообразиях специального вида, в частности модельных многообразиях. Получен критерий дискретности спектра в терминах объема и емкости некоторых областей на многообразии.

Ключевые слова: некомпактные римановы многообразия, оператор Лапласа — Бельтрами, дискретный спектр

§ 1. Введение

Одним из направлений изучения оператора Лапласа — Бельтрами

$$-\Delta = -\operatorname{div}\nabla \tag{1}$$

на некомпактных римановых многообразиях является анализ его спектра. Первые результаты появились в 70-е годы XX века; это были исследования зависимости различных характеристик спектра от кривизны многообразия. Например, в работах Х. П. МакКина [1] и С. Т. Яу [2] получены нижние оценки инфимума спектра на многообразиях отрицательной гауссовой кривизны. В случае кривизны, ограниченной снизу некоторым неположительным числом, верхнюю оценку точной нижней грани спектра получил С. Я. Ченг [3]. Для двумерных поверхностей неположительной гауссовой кривизны М. Пински [4] доказал двусторонние оценки инфимума спектра и инфимума непрерывной части спектра в терминах метрики поверхности. Для произвольных многообразий отрицательной кривизны его результаты обобщили Х. Доннелли и П. Ли [5]. В работе А. Бейдера [6] получен критерий дискретности спектра оператора Лапласа — Бельтрами на искривленных римановых произведениях. На многообразиях с концами для случая, когда концы, в сущности, — частный случай модельных многообразий, структуру спектра оператора (1) исследовал В. Мюллер [7]. Р. Брукс [8, 9] доказал двусторонние оценки точной нижней грани непрерывной части спектра в терминах роста объема многообразия.

В данной работе рассматривается зависимость спектра оператора (1) от метрики многообразия. Мы рассматриваем полное некомпактное риманово многообразие M без края, представимое в виде $B \cup D$, где B — компакт, D изометрично произведению $\mathbb{R}_+ \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \dots \times \mathrm{S}_k$ (где $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, а S_i — компактные римановы многообразия без края) с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + q_1^2(r)\, d\theta_1^2 + \dots + q_k^2(r)\, d\theta_k^2,$$

где $d\theta_i^2$ — метрика на S_i, а $q_i(r)$ — гладкие положительные на $\mathbb{R}_+$ функции. Будем считать, что $\dim \mathrm{S}_i = n_i$, тогда $\dim D = n_1 + n_2 + \dots + n_k + 1 = n$. Поведение гармонических функций (т. е. решений уравнения $\Delta u = 0$) на этих многообразиях достаточно подробно исследовал А. Г. Лосев [10, 11], который предложил называть многообразия, подобные D, простыми скрещенными произведениями порядка k. Такие многообразия, очевидно, обобщают модельные, т. е. сферически симметричные, многообразия. Следовательно, частным случаем ($k = 1$, $q_1(r) \equiv q(r)$, $\mathrm{S}_1 = \mathbb{S}^{n-1} - (n-1)$ -мерная сфера) исследуемых многообразий являются $\mathbb{R}^n$ $(q(r) = r)$, гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$ $(q(r) = \operatorname{sh} r)$, а также все поверхности вращения.

Многообразие M называют *многообразием с концом* [11–13]. Поскольку его конец D — простое скрещенное произведение, оно является простейшим случаем квазимодельного многообразия [11]. Заметим, что нас будет интересовать случай, когда борелева мера μ многообразия M не обязательно совпадает с римановым объемом. В этом случае пару (M, μ) называют *весовым многообразием*. В цитируемых работах исследованы такие свойства этих многообразий, как разрешимость задачи Дирихле, выполнение теорем типа Лиувилля и др. В данной работе получен критерий дискретности спектра оператора Лапласа — Бельтрами на описанных многообразиях. А именно, доказано, что оператор Лапласа — Бельтрами $-\Delta$ на весовом многообразии (M, μ) имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда в случае конца конечного весового объема выполнены условия

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V_\mu(D \setminus B(o,r))}{\operatorname{cap}_\mu(B(o,1), B(o,r))} = 0, \quad \operatorname{cap}_\mu B(o,1) = 0,$$

а в случае конца бесконечного весового объема — условия

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V_\mu(B(o,r))}{\operatorname{cap}_\mu B(o,r)} = 0, \quad \operatorname{cap}_\mu B(o,1) > 0.$$

Здесь $V_\mu(\cdot)$ означает весовой объем соответствующей области, $\operatorname{cap}_\mu(\cdot,\cdot)$ — весовую емкость соответствующего конденсатора, а $\operatorname{cap}_\mu(\cdot)$ — весовую емкость шара (эти объекты вводятся ниже) и подразумевается, что $B(o,r) \subset D$, o — полюс D.

Структура работы следующая: в § 2 напоминаем некоторые фундаментальные определения и формулируем используемые далее известные утверждения, в § 3 доказываем основную теорему и приводим несколько примеров.

§ 2. Основные определения и некоторые известные теоремы

Рассмотрим произвольный неограниченный оператор A, заданный в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. При этом будем считать, что он определен не на всем $\mathscr{H}$, а лишь на некотором плотном линейном подмножестве этого пространства. Далее такие операторы будем называть *плотно определенными*. Область определения оператора A будем обозначать через $D(A)$. Нас будут интересовать два подмножества в спектре этого оператора. Множество всех собственных значений оператора A с конечной кратностью будем называть *точечным спектром*, остальную часть спектра — *непрерывным спектром*. Если множество точек непрерывного спектра пусто, будем говорить, что *оператор A имеет дискретный спектр*. Следуя [6, 14, 15], говоря о спектре незамкнутого, но замыкаемого оператора, мы имеем в виду спектр замыкания, т. е. слова «спектр оператора Лапласа — Бельтрами» на самом деле относятся к спектру расширения по Фридрихсу этого оператора (см., например, [14, 15]).

Далее будем рассматривать операторы на римановых многообразиях. Пусть X — гладкое многообразие размерности n, которое для простоты будем считать связным. Кроме того, считаем, что на X задана локальная система координат и $\|\mathrm{g}_{ij}\|$ — риманов метрический тензор на X, т. е. метрика имеет вид

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{g}_{ij}\, dx_i dx_j.$$

Обозначим через g^{ij} элементы матрицы $\|\mathrm{g}_{ij}\|^{-1}$ и

$$\mathrm{g} = \det \|\mathrm{g}_{ij}\| = (\det \|\mathrm{g}^{ij}\|)^{-1}.$$

Напомним (см., например, [16]), что дивергенция векторного поля $F = F_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ на описанном многообразии вычисляется по формуле

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{\mathrm{g}} F_i),$$

а компоненты градиента функции f — по формуле

$$(\nabla f)^j = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{g}^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Рассмотрим случай, когда на X задана некоторая борелева мера μ, не обязательно совпадающая с римановым объемом. Будем предполагать, что μ имеет плотность $\sigma(x)$, где $\sigma(x)$ — гладкая положительная функция. (Очевидно, что если μ — риманов объем на X, то $\sigma(x) \equiv 1$.) Пару (X, μ) называют *весовым многообразием.* Тогда дивергенция как оператор, сопряженный ∇ относительно меры многообразия, будет вычисляться следующим образом:

$$\operatorname{div}_\mu\ F = \frac{1}{\sigma(x)\sqrt{\mathrm{g}}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma(x)\sqrt{\mathrm{g}} F_i).$$

Мы определили оператор Лапласа — Бельтрами

$$-\Delta = -\operatorname{div}_\mu\ \nabla$$

на многообразии X. Он задан на $\mathscr{L}^2(X)$, а его областью определения, плотной в этом пространстве, считаем $C_0^\infty(X)$.

Пусть теперь Z — риманово многообразие, изометричное произведению $X \times Y$ (где X — произвольное многообразие размерности n, а Y — компактное размерности m) с метрикой

$$dz^2 = dx^2 + \gamma^2(x)\, dy^2,$$

где $\gamma(x)$ — гладкая положительная функция, dx^2 и dy^2 — метрики на X и Y соответственно.

Предположим, что плотность борелевой меры на этом многообразии можно представить как $\sigma(z) = \tau(x)\eta(y)$. Непосредственным вычислением оператора Лапласа — Бельтрами в криволинейных координатах, заданных на описанном многообразии, можно прийти к следующему результату.

Лемма. *Оператор Лапласа — Бельтрами на многообразии (Z,μ) имеет вид*

$$-\Delta_Z = A_0 + \gamma^{-2}(-\Delta_\eta),$$

где A_0 — оператор Лапласа — Бельтрами на многообразии X с весовой функцией $\gamma^m(x)\tau(x)$, а $-\Delta_\eta$ — оператор Лапласа — Бельтрами на многообразии Y с мерой, обладающей плотностью $\eta(y)$.

Сформулируем теперь критерий дискретности спектра оператора Лапласа — Бельтрами на рассматриваемом многообразии Z. Для этого обозначим через ν меру с весом $\gamma^m(x)\tau(x)$ на многообразии X.

Теорема 1 [6]. *Оператор Лапласа — Бельтрами на многообразии $(X \times Y,\mu)$ имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда спектр оператора Лапласа — Бельтрами на многообразии (X,ν) дискретен.*

Заметим, что на самом деле в [6] эта теорема доказана в случае, когда мера на многообразии Z порождается мерами многообразий X и Y и не имеет собственной весовой функции. Однако доказательство теоремы 1 почти дословно повторяет доказательство, приведенное в [6]. Единственное изменение — это лемма о представлении лапласиана на рассматриваемом многообразии, на которую опирается доказательство теоремы.

Далее рассмотрим такие характеристики, как объем и емкость. Нас будет интересовать их вычисление на простых скрещенных произведениях порядка k, описанных в § 1. Обозначим через $|S|$ объем компакта $\mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \dots \times \mathrm{S}_k$. Тогда объем шара радиуса r с центром в начале координат ($B(o,r) := \{x = (\rho,\theta) \in D : \rho \le r\}$) на таких многообразиях может быть вычислен по формуле

$$V(B(o,r)) = |S| \int\limits_0^r q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)\,dt.$$

Напомним, что если $B \subset D$ — открытое множество, а $C \subset B$ — компакт, то *емкостью множества C относительно множества B* называется число

$$\operatorname{cap}(C,B) = \inf \int\limits_D |\nabla\varphi|^2,$$

где инфимум берется по всем локально липшицевым функциям φ таким, что $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi|_C = 1$ и $\varphi|_{D\setminus B} = 0$. Пару (C,B) называют *конденсатором.* При этом на рассматриваемом многообразии емкость шара $B(o,r)$ относительно открытого шара $B(o,R)$ можно вычислить по формуле (см., например, [12])

$$\operatorname{cap}(B(o,r),B(o,R)) = |S| \left(\int\limits_r^R \frac{dt}{q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)} \right)^{-1}.$$

Так как $\operatorname{cap}(B(o,r),B(o,R))$ убывает при возрастании R и ограничена снизу нулем, существует предел

$$\operatorname{cap} B(o,r) = \lim_{R\to\infty} \operatorname{cap}(B(o,r),B(o,R)),$$

который называют емкостью шара $B(o,r)$. Соответственно это число может быть вычислено по формуле

$$\operatorname{cap} B(o,r) = |S| \left(\int\limits_r^\infty \frac{dt}{q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)} \right)^{-1}.$$

Поскольку нас будет интересовать случай, когда борелева мера μ на многообразии D имеет плотность, представимую как $\tau(r)\eta_1(\theta_1)\cdots\eta_k(\theta_k)$, будет удобно, если мы по аналогии с вышесказанным назовем весовым объемом шара $B(o,r)$ величину

$$V_\mu(B(o,r)) = |S| \int\limits_0^r \tau(t)q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)\,dt,$$

а весовой емкостью конденсатора $(B(o,r), B(o,R))$ — величину

$$\operatorname{cap}_\mu(B(o,r), B(o,R)) = |S| \left(\int\limits_r^R \frac{dt}{\tau(t)q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)} \right)^{-1}.$$

Аналогично получается и весовая емкость шара.

Наконец, сформулируем следующий критерий дискретности спектра оператора в $\mathbb{R}$, который будет необходим нам в дальнейшем.

Теорема 2 [17, с. 93; 18]. *Для того чтобы оператор*

$$-\rho^{-1}(x)\frac{d^2}{dx^2}, \quad x \in (0, L), \tag{2}$$

имел неотрицательный дискретный спектр, необходимо и достаточно, чтобы в случае $L = +\infty$ выполнялось условие

$$\lim_{x\to\infty} x \int\limits_x^\infty \rho(\xi)\,d\xi = 0,$$

а в случае $\int\limits_0^L \rho(\xi)\,d\xi = +\infty$ — условие

$$\lim_{x\to L} (L-x) \int\limits_0^x \rho(\xi)\,d\xi = 0.$$

Заметим, что в первом условии подразумевается, что $\int\limits_0^\infty \rho(\xi)d\xi < \infty$, а во втором — что $L < \infty$. Таким образом, необходимым условием дискретности спектра задачи (2) является конечность одной и только одной из указанных величин.

§ 3. Дискретность спектра на весовых квазимодельных многообразиях

Рассмотрим полное риманово многообразие M без края, представимое в виде $M = B \cup D$, где B — компактное многообразие, а D — простое скрещенное произведение порядка k, описанное в § 1. Зададим на нем борелеву меру μ такую, что на конце D ее плотность имеет вид $\tau(r)\eta_1(\theta_1)\cdots\eta_k(\theta_k)$. Прежде чем перейти к исследованию спектра оператора Лапласа — Бельтрами $-\Delta$, введем обозначения

$$W(r) = \int\limits_1^r \frac{dt}{\tau(t)q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)} \int\limits_r^\infty \tau(t)q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)\,dt,$$

$$\overline{W}(r) = \int\limits_r^\infty \frac{dt}{\tau(t)q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)} \int\limits_1^r \tau(t)q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)\,dt,$$

где $r > 1$. Кроме того, через o обозначаем полюс многообразия D и считаем, что шар $B(o, r)$ содержится в D. Получен следующий критерий дискретности спектра лапласиана на многообразии M с весом μ.

Основная теорема. *Спектр оператора Лапласа — Бельтрами $-\Delta$ на весовом многообразии (M, μ) дискретен тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

$$V_\mu(D) < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{r\to\infty} W(r) = 0, \quad \operatorname{cap}_\mu B(o,1) = 0$$

или

$$V_\mu(D) = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{r\to\infty} \overline{W}(r) = 0, \quad \operatorname{cap}_\mu B(o,1) > 0.$$

Доказательство. Из принципа декомпозиции [5; 17, с. 59; 19, с. 192] следует, что спектр оператора Лапласа — Бельтрами на многообразии дискретен тогда и только тогда, когда он дискретен вне любого компакта на этом многообразии, т. е. дискретность спектра на многообразии $M = B \cup D$ равносильна дискретности спектра на многообразии D.

Рассмотрим многообразия $X = \mathbb{R}_+ \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \dots \times \mathrm{S}_{k-1}$, $Y = \mathrm{S}_k$ и многообразие $Z = X \times Y$ с метрикой

$$dz^2 = dx^2 + q_k^2(r)\, dy^2,$$

на котором $\tau_1(x)\eta_k(\theta_k)$ — борелева мера, где $\tau_1(x) = \tau(r)\eta_1(\theta_1)\cdots\eta_{k-1}(\theta_{k-1})$, т. е. многообразие Z совпадает с многообразием D. Тогда по теореме 1 оператор Лапласа — Бельтрами на многообразии D имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда дискретен спектр лапласиана на многообразии X с весом $q_k^{n_k}(r)\tau_1(x) = q_k^{n_k}(r)\tau(r)\eta_1(\theta_1)\cdots\eta_{k-1}(\theta_{k-1})$.

Рассмотрим многообразия $X_1 = \mathbb{R}_+ \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \dots \times \mathrm{S}_{k-2}$, $Y_1 = \mathrm{S}_{k-1}$ и многообразие $Z_1 = X_1 \times Y_1$ с метрикой

$$dz_1^2 = dx_1^2 + q_{k-1}^2(r)\, dy_1^2$$

и весовой функцией $q_k^{n_k}(r)\tau_2(x_1)\eta_{k-1}(\theta_{k-1})$, $\tau_2(x_1) = \tau(r)\eta_1(\theta_1)\cdots\eta_{k-2}(\theta_{k-2})$, т. е. оператор Лапласа — Бельтрами на многообразии Z_1 совпадает с оператором, дискретность которого мы исследуем. Опять применяем теорему 1 и получаем: дискретность спектра лапласиана на многообразии X с указанным весом эквивалентна дискретности спектра оператора Лапласа — Бельтрами на многообразии X_1 с весом

$$q_{k-1}^{n_{k-1}}(r)q_k^{n_k}(r)\tau_2(x_1) = q_{k-1}^{n_{k-1}}(r)q_k^{n_k}(r)\tau(r)\eta_1(\theta_1)\cdots\eta_{k-2}(\theta_{k-2}).$$

Повторяя то же самое еще $k-2$ раз, в итоге получим, что дискретность спектра оператора Лапласа — Бельтрами на многообразии D эквивалентна дискретности спектра оператора Лапласа на $\mathbb{R}_+$ с весом $\tau(r)q_1^{n_1}(r)\cdots q_k^{n_k}(r)$. Обозначим $s(r) = \tau(r)q_1^{n_1}(r)\cdots q_k^{n_k}(r)$. Тогда оператор имеет вид

$$A_0 = s^{-1}(r)\frac{d}{dr}\left(s(r)\frac{d}{dr}\right).$$

Упростим оператор A_0, введя новую переменную $v = v(r)$, которую определяет уравнение $v' = s^{-1}(r)$, $v(1) = 0$. Для этого заметим, что $\frac{dr}{dv} = s(r(v))$ как производная обратной функции, т. е.

$$s(r)\frac{d}{dr} = \frac{d}{dr}\frac{dr}{dv} = \frac{d}{dv}.$$

Таким образом,

$$A_0 = -s^{-1}(r)\frac{d}{dr}\left(s(r)\frac{d}{dr}\right) = -s^{-1}(r)\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dv}\right)\frac{\frac{dr}{dv}}{\frac{dr}{dv}} = -s^{-1}(r)\frac{d^2}{dv^2}v' = -\psi^{-2}(v)\frac{d^2}{dv^2},$$

где $\psi(v)=s(r(v))$. Теперь мы можем применить теорему 2 (критерий дискретности И. С. Каца и М. Г. Крейна): оператор $-\psi^{-2}\frac{d^2}{dv^2}$, где $v\in(0,L)$, имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

$$L=\infty \quad \text{и} \quad \lim_{v\to\infty} v\int\limits_v^\infty \psi^2(\xi)d\xi=0 \tag{3}$$

или

$$\int\limits_0^\infty \psi^2(\xi)d\xi=\infty \quad \text{и} \quad \lim_{v\to L}(L-v)\int\limits_0^v \psi^2(\xi)d\xi=0. \tag{4}$$

Рассмотрим каждое из этих условий отдельно.

Условие (3), очевидно, подразумевает, что $\int\limits_0^\infty \psi^2(\xi)d\xi<\infty$. Будем рассматривать это условие в качестве дополнительного, чтобы не было неопределенности в понимании предела. Возвращаясь к переменной r, получаем (в соответствующем порядке)

$$L=\int\limits_1^\infty s^{-1}(t)\,dt=\infty, \quad \lim_{r\to\infty}\int\limits_1^r s^{-1}(t)\,dt\int\limits_r^\infty s(t)\,dt=0, \quad \int\limits_1^\infty s(t)\,dt<\infty.$$

Отсюда

$$\int\limits_1^\infty \frac{dt}{\tau(t)q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)}=\infty,$$

т. е. $(\operatorname{cap}_\mu B(o,1))^{-1}=\infty$ и $\operatorname{cap}_\mu B(o,1)=0$,

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_1^r \frac{dt}{\tau(t)q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)}\int\limits_r^\infty \tau(t)q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)\,dt=0,$$

т. е. $\lim\limits_{r\to\infty}W(r)=0$,

$$\int\limits_1^\infty \tau(t)q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)\,dt<\infty,$$

откуда $V_\mu(D\setminus B(o,1))<\infty$ и $V_\mu(D)<\infty$. Тем самым мы получили первую группу условий теоремы.

Аналогично в (4) считаем, что $L<\infty$. Переходя к переменной r, имеем

$$\int\limits_1^\infty s(t)\,dt=\int\limits_1^\infty \tau(t)q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)\,dt=\infty,$$

т. е. $V_\mu(D\setminus B(o,1))=\infty$ и $V_\mu(D)=\infty$,

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_r^\infty s^{-1}(t)\,dt\int\limits_1^r s(t)\,dt$$
$$=\lim_{r\to\infty}\int\limits_r^\infty \frac{dt}{\tau(t)q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)}\int\limits_1^r \tau(t)q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)\,dt=0,$$

т. е. $\lim\limits_{r\to\infty} \overline{W}(r) = 0$,

$$L = \int\limits_1^\infty s^{-1}(t)\,dt = \int\limits_1^\infty \frac{dt}{\tau(t) q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)} < \infty,$$

откуда $(\mathrm{cap}_\mu B(o,1))^{-1} < \infty$ и $\mathrm{cap}_\mu B(o,1) > 0$.

Переформулируем теперь эту теорему в терминах объема и емкости шаров на многообразии D. Используем для этого соответствующие формулы, приведенные в § 2. Сразу же замечаем, что

$$W(r) = \mathrm{const}\,\frac{V_\mu(D\setminus B(o,r))}{\mathrm{cap}_\mu(B(o,1),B(o,r))}, \quad \overline{W}(r) = \mathrm{const}\,\frac{V_\mu(B(o,r)\setminus B(o,1))}{\mathrm{cap}_\mu B(o,r)}.$$

Таким образом, условие $\lim\limits_{r\to\infty} W(r) = 0$ эквивалентно условию

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V_\mu(D\setminus B(o,r))}{\mathrm{cap}_\mu(B(o,1),B(o,r))} = 0,$$

а условие $\lim\limits_{r\to\infty} \overline{W}(r) = 0$ — условию

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V_\mu(B(o,r)\setminus B(0,1))}{\mathrm{cap}_\mu B(o,r)} = 0. \tag{5}$$

Но из условия $\mathrm{cap}_\mu B(o,1) > 0$ следует, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V_\mu(B(o,1))}{\mathrm{cap}_\mu B(o,r)} = V_\mu(B(o,1)) \lim_{r\to\infty} (\mathrm{cap}_\mu B(o,r))^{-1} = 0,$$

т. е. (5) эквивалентно

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V_\mu(B(o,r))}{\mathrm{cap}_\mu B(o,r)} = 0.$$

Таким образом, доказана основная теорема и одновременно показана справедливость варианта ее формулировки, упомянутого в § 1.

Замечания (о граничных случаях). 1. Из теоремы, очевидно, следует, что в случае $V_\mu(D) = \infty$, $\mathrm{cap}_\mu B(o,1) = 0$ спектр оператора $-\Delta$ на D недискретен.

2. Другой граничный случай $V_\mu(D) < \infty$, $\mathrm{cap}_\mu B(o,1) > 0$, очевидно, невозможен. Пусть $s(r)$ такое же, как при доказательстве теоремы. Тогда этот случай означает, что

$$\int\limits_1^\infty s(t)\,dt < \infty, \quad \int\limits_1^\infty \frac{dt}{s(t)} < \infty. \tag{6}$$

Рассмотрим два множества

$$A = \{t \in [1,\infty) : s(t) \ge 1\}, \quad B = [1,\infty)\setminus A = \{t\in[1,\infty) : s(t) < 1\}.$$

Тогда

$$\int\limits_1^\infty s(t)\,dt = \int\limits_A s(t)\,dt + \int\limits_B s(t)\,dt < \infty.$$

Отсюда, очевидно, вытекает, что $|A| < \infty$, но тогда $|B| = \infty$. Поскольку $s(t)|_B < 1$, а значит, $\frac{1}{s(t)}\big|_B > 1$, имеем

$$\int\limits_1^\infty \frac{dt}{s(t)} = \int\limits_A \frac{dt}{s(t)} + \int\limits_B \frac{dt}{s(t)} \ge \int\limits_B \frac{dt}{s(t)} > |B| = \infty.$$

Таким образом, если верно первое из условий (6), то второе не может быть выполнено. Следовательно, основная теорема охватывает все возможные случаи.

Приведем несколько примеров использования полученного результата. Так как исследование дискретности спектра на квазимодельном многообразии сводится к изучению его концов, дадим примеры только для простых скрещенных произведений. Кроме того, для простоты и большей наглядности ограничимся их простейшим случаем — модельными многообразиями. Также для простоты считаем, что борелевы меры всех рассматриваемых многообразий совпадают с римановым объемом. Заметим, что везде далее будем обозначать через ω_n объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Пример 1. $\mathbb{R}^2$ (т. е. $q(r) = r$, $\mathrm{S}_1 = \mathbb{S}$).

Очевидно, $V(\mathbb{R}^2) = \omega_2 \int\limits_0^\infty t\,dt = \infty$ и $\operatorname{cap} B(o,1) = \omega_2 \left(\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t}\right)^{-1} = 0$. Следовательно, ни одно из условий основной теоремы заведомо не выполнено, т. е. в спектре оператора Лапласа присутствует непрерывная часть.

Пример 2. $\mathbb{R}^n$, $n > 2$ (т. е. $q(r) = r$, $\mathrm{S}_1 = \mathbb{S}^{n-1}$).

Аналогично $V(\mathbb{R}^n) = \omega_n \int\limits_0^\infty t^{n-1}\,dt = \infty$, но

$$\operatorname{cap} B(o,1) = \omega_n \left(\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t^{n-1}}\right)^{-1} = \omega_n(n-2) > 0.$$

Нужно проверить третье условие. Имеем

$$\lim_{r\to\infty} \overline{W}(r) = \lim_{r\to\infty} \int\limits_r^\infty \frac{dt}{t^{n-1}} \int\limits_1^r t^{n-1}\,dt = \lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{n(n-2)} = \infty,$$

т. е. спектр тоже недискретен.

Пример 3. Рассмотрим такое многообразие D, что $q(r) = e^{r^2}$, $\mathrm{S}_1 = \mathbb{S}$. Тогда

$$V(D) = \omega_2 \int\limits_0^\infty e^{t^2}\,dt = \infty,$$

$$\operatorname{cap} B(o,1) = \omega_2 \left(\int\limits_1^\infty e^{-t^2}\,dt\right)^{-1} > \omega_2 \left(\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt\right)^{-1} = \frac{2\omega_2}{\sqrt{\pi}} > 0.$$

Проверяем последнее условие теоремы, применяя правило Лопиталя:

$$\lim_{r\to\infty} \overline{W}(r) = \lim_{r\to\infty} \int\limits_r^\infty e^{-t^2}\,dt \int\limits_1^r e^{t^2}\,dt = 0.$$

По основной теореме получаем, что спектр оператора Лапласа — Бельтрами на многообразии D дискретен.

Замечание. Как легко следует из доказательства основной теоремы, аналогичный критерий справедлив и для квазимодельных многообразий $M = B \cup D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_p$, где B — компакт, а D_i — простые скрещенные произведения. В этом случае условия, указанные в основной теореме, должны быть выполнены на каждом конце D_i.

ЛИТЕРАТУРА

1. *McKean H. P.* An upper bound for the spectrum of Δ on a manifold of negative curvature // J. Differential Geom. 1970. V. 4. P. 359–366.

2. *Yau S. T.* Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a complete Riemannian manifold // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4). 1975. V. 8. P. 487–507.

3. *Cheng S. Y.* Eigenvalue comparison theorem and its geometric applications // Math. Z. 1975. Bd 143. S. 289–297.

4. *Pinsky M.* The spectrum of the Laplacian on a manifold of negative curvature I // J. Differential Geom. 1978. V. 13. P. 87–91.

5. *Donnelly H., Li P.* Pure point spectrum and negative curvature for noncompact manifolds // Duke Math. J. 1979. V. 46. P. 497–503.

6. *Baider A.* Noncompact Riemannian manifolds with discrete spectra // J. Differential Geom. 1979. V. 14. P. 41–57.

7. *Müller W.* Spectral theory for Riemannian manifolds with cusps and a related trace formula // Math. Nachr. 1983. V. 111. P. 197–288.

8. *Brooks R.* A relation between growth and the spectrum of the Laplacian // Math. Z. 1981. Bd 178. S. 501–508.

9. *Brooks R.* On the spectrum of non-compact manifolds with finite volume // Math. Z. 1984. Bd 187. S. 425–432.

10. *Лосев А. Г.* О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 87–93.

11. *Лосев А. Г.* Эллиптические уравнения на квазимодельных римановых многообразиях: Автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск: НГУ, 2000.

12. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Ограниченные решения уравнения Шрёдингера на римановых произведениях // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, № 1. С. 84–110.

13. *Grigor'yan A. A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1999. V. 36. P. 135–249.

14. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х томах. М.: Мир, 1977. Т. 1: Функциональный анализ; Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность.

15. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.

16. *Позняк Э. Г., Шикин Е. В.* Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 1990.

17. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963.

18. *Кац И. С., Крейн М. Г.* Критерий дискретности спектра сингулярной струны // Изв. вузов. Математика. 1958. Т. 2. С. 136–153.

19. *Schechter M.* Spectra of partial differential operators. Amsterdam: North-Holland, 1971.

Статья поступила 16 января 2002 г.

Светлов Андрей Владимирович
Волгоградский гос. университет, математический факультет,
ул. 2-я Продольная, 30, Волгоград 400062
andrew.svetlov@volsu.ru