Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6

УДК 510.643

КРИТЕРИЙ НАСЛЕДОВАНИЯ ДОПУСТИМЫХ ПРАВИЛ ВЫВОДА $K4$

А. Н. Руцкий, Б. Р. Федоришин

Аннотация: Приведен критерий наследования допустимых правил вывода модальной логики $K4$ для финитно аппроксимируемых модальных логик, расширяющих $K4$. Отрицательно решен вопрос о наследовании допустимых правил $K4$ для табличных логик. Приведен ряд примеров модальных логик, наследующих или не наследующих допустимые правила вывода $K4$.

Ключевые слова: правило вывода, модальная логика, финитная аппроксимируемость, допустимое правило, фрейм

1. Введение

Допустимые правила вывода являются важным объектом изучения в современных исследованиях неклассических логик. Веденные П. Лоренценом еще в 1955 г. эти правила, благодаря своей инвариантности относительно фиксируемых в заданной логике схем аксиом и правил вывода, оказались удобным инструментом теории доказательств формальных систем. Допустимые правила вывода имеют и прямой алгебраический аналог — квазитождества на свободных алгебрах соответствующих квазимногообразий. Исследования допустимых правил вывода ведутся во многих направлениях, к которым относятся проверка разрешимости по допустимости, определение базиса допустимых правил вывода, решение логических уравнений с метапеременными, проверка истинности квазитождеств на свободных алгебрах квазимногообразий, исследование уравнений в свободных алгебрах и др.

В последние годы изучение допустимых правил вывода проводится также и в связи с исследованиями свойств наследования для модальных и суперинтуиционистских формальных систем. Исторически вопрос о наследовании допустимых правил впервые был поставлен при исследовании суперинтуиционистских логик [1], не сохраняющих допустимые правила интуиционистской логики Гейтинга H. Известно [2–6], что произвольная логика λ_2, расширяющая другую логику λ_1, может и не наследовать правил вывода, допустимых для логики λ_1. Для структурно полных модальных и суперинтуиционистских логик [3, 5] свойство наследования допустимых правил вывода выполняется по определению. В общем же случае вопрос распознавания логик, наследующих правила вывода данной логики, является нетривиальным и остается открытым.

В статье В. В. Рыбакова, Т. Онера и Г. Генсера [7] получен критерий наследования правил вывода, допустимых для $S4$, финитно аппроксимируемыми модальными логиками, расширяющими $S4$, а также с помощью этого критерия указаны табличные модальные логики, наследующие допустимые правила вывода $S4$. В заключении статьи был поставлен ряд открытых вопросов для дальнейшего изучения свойств наследования допустимых правил вывода. По мнению авторов статьи [7], наиболее существенной задачей является нахождение критерия наследования правил вывода, допустимых в $K4$, так как эта логика является базовой как наименьшая транзитивная нормальная модальная логика.

В настоящей статье решены два из сформулированных в [7] вопроса, а именно получен критерий наследования правил вывода, допустимых для $K4$, и решен вопрос о наследовании правил вывода табличными модальными логиками. Как и предполагалось в [7], с помощью сходной техники удается получить критерий наследования правил вывода, допустимых для $K4$, произвольной финитно аппроксимируемой логикой λ, доказанный в теореме 3.3. Для этого также было применено свойство ко-накрытия над $K4$. Впервые свойство ко-накрытия было введено для исследования проблемы наследования в суперинтуиционистских логиках. Позже было предложено применить его и для исследования модальных логик. Так, в статье [7] показано, что свойство ко-накрытия является необходимым и достаточным для наследования правил вывода, допустимых в $S4$.

Дальнейшее изучение проблемы наследования допустимых правил вывода потребовало конкретизировать определение этого свойства и ввести отдельные определения ко-последователя и свойства ко-накрытия над $K4$ и $S4$.

Вопрос о наследовании правил вывода, допустимых для $K4$, табличными логиками решен отрицательно: в лемме 4.1 приведено доказательство отсутствия свойства ко-накрытия над $K4$ для табличных модальных логик, откуда и следует, что любая табличная модальная логика, расширяющая $K4$, не наследует правил вывода, допустимых для $K4$. Также с помощью полученного критерия решен вопрос о наследовании правил вывода $K4$ и в других известных модальных логиках, расширяющих $K4$. Так, показано, что логики $S4$, GL и ряд других не наследуют допустимых правил $K4$, а модальная логика $K4.1$ наследует.

2. Предварительные сведения

Основные понятия, определения и теоремы изложены, например, в [2, 8]. Здесь лишь кратко приведем необходимые для доказательств теоремы и построения.

Фреймом Крипке F (или просто *фреймом*) называется пара $\langle W, R\rangle$, где W — непустое множество элементов (миров) фрейма F, R — бинарное отношение на W. Если для элементов $a, b \in W$ выполнено соотношение aRb, то говорят «a достигает b» или «a видит b». Фрейм F называется *рефлексивным* или *транзитивным*, если бинарное отношение W на нем является таковым. Пусть $\{p_1, \ldots, p_n\}$ — множество пропозициональных переменных. *Означиванием* V *на фрейме* F называется отображение, ставящее в соответствие каждой переменной p_i подмножество $V(p_i) \subseteq W$. *Моделью Крипке* $\mathscr{M}$ (или просто *моделью*) называется тройка $\langle W, R, V\rangle$, где $\langle W, R\rangle$ — фрейм, а V — означивание на его мирах пропозициональных переменных из множества $\mathrm{Dom}(V) = \{p_1, \ldots, p_n\}$, называемого *областью означивания* V. Определения модального языка, формул, правил вывода и определение истинности формулы в мире изложены, например, в [8]. Истинность формулы α в элементе a модели $\mathscr{M}$ будем обозначать через $a \Vdash_V \alpha$; если формула α истинна в каждом мире фрейма F, то будем писать $F \Vdash_V \alpha$. Для логики λ фрейм F называется *λ-фреймом* или *фреймом, адекват-*

ным логике λ, если для любого $\alpha \in \lambda$ при любом означивании V будет $F \Vdash_V \alpha$. Логика λ *финитно аппроксимируема* (имеет fmp), если она порождается некоторым классом Fr_λ (конечным либо бесконечным) конечных λ-фреймов, т. е. $\forall \beta \notin \lambda\ \exists F \in Fr_\lambda : F \nVdash \beta$. Этот класс называется также *характеристическим классом фреймов.*

Правило вывода $\mathbf{r} := \alpha_1(\bar{x}), \dots, \alpha_n(\bar{x})/\beta(\bar{x})$ называется *допустимым в модальной логике* λ, если при любой подстановке формул $\bar{\gamma} \to \bar{x}$ из того, что $\alpha_1(\bar{\gamma}) \in \lambda, \dots, \alpha_n(\bar{\gamma}) \in \lambda$, следует $\beta(\bar{\gamma}) \in \lambda$. Правило вывода $\mathbf{r}$ называется *истинным в модели* $\mathscr{M} = \langle W, R, V\rangle$, если из $V(\alpha_n) = W, \dots, V(\alpha_n) = W$ вытекает $V(\beta) = W$.

Пусть $F = \langle W, R\rangle$ — транзитивный фрейм. *Сгустком* (или *кластером*) *фрейма* F называется подмножество $C \in W$ такое, что $\forall a, b \in C\ \forall c \in W$ $(aRb)\&(bRa)$ и $((aRc)\&(cRa) \Rightarrow (c \in C))$ или $C = \{a\}$ — иррефлексивный одноэлементный (вырожденный) сгусток. Через $C(a)$ обозначим сгусток, содержащий мир a. Сгусток C_1 «видит» сгусток C_2 в модели $\mathscr{M}$ (в обозначениях C_1RC_2), если существуют $a \in C_1$, $b \in C_2$ такие, что aRb. Сгусток C_1 называется *непосредственным* R*-предшественником сгустка* C_2, если C_1RC_2 и $\forall C((C \neq C_1)\&(C_1RC)\&(CRC_2) \Rightarrow (C = C_2))$; в этом случае сгусток C_2 будет называться *непосредственным* R*-последователем* (R*-потомком*) *сгустка* C_1. *Цепью сгустков фрейма* F называется множество сгустков A, если для любых двух сгустков $C_1, C_2 \in A$ в фрейме F либо C_1RC_2, либо C_2RC_1. Количество сгустков в цепи A будем называть ее *длиной*. *Антицепью сгустков фрейма* F называется множество сгустков A, попарно R-несравнимых в фрейме F, т. е. для любых двух сгустков $C_1, C_2 \in A$ во фрейме F будет $\neg(C_1RC_2)$ и $\neg(C_2RC_1)$. Элемент a фрейма F *имеет глубину* n, если n — максимальная длина цепи во фрейме F, начинающейся со сгустка $C(a)$. *Слоем глубины* n *фрейма* F будем называть множество всех элементов фрейма F глубиной n, обозначим его через $Sl_n(F)$. Сгустки фрейма F, входящие в верхний слой $Sl_1(F)$, будем называть также *максимальными в* F. Множество всех элементов фрейма F глубиной не больше n будем обозначать через $S_n(F)$.

Фрейм F назовем *корневым*, если найдется $a \in F$ такой, что $\forall b \in F\ (aRb)$, в этом случае $C(a)$ называется *корнем* данного фрейма. Фрейм $F = \langle W, R\rangle$ называется *прямой суммой семейства фреймов* $F_i = \langle W_i, R_i\rangle$, $i \in I$, где $W_i \cap W_j = \varnothing$ при $i \neq j$, если $W = \bigcup\limits_{i \in I} W_i$ и $R = \bigcup\limits_{i \in I} R_i$, при этом используется обозначение $F = \bigsqcup\limits_{i \in I} F_i$. Множество $Y^{R\leq} = \{x \mid x \in W,\ \exists y \in Y,\ yRx\}$ будем называть *верхним конусом, порожденным множеством элементов* $Y \subseteq W$. Аналогично определяем множество $Y^{R<} = \{x \mid x \in W,\ \exists y \in Y,\ (yRx)\&\neg(xRy)\}$. Сгусток C будем называть *ко-накрытием для антицепи сгустков* A *из* F, если $C^{R<} = \bigcup\limits_{C_1 \in A} \bigl(C_1^{R<} \cup C_1\bigr)$.

Фрейм $F_1 = \langle W_1, R_1\rangle$ называется *открытым подфреймом* (*открытым подпространством*) *фрейма* $F_2 = \langle W_2, R_2\rangle$, если $W_1 \subseteq W_2$, $R_1 = (W_1 \times W_1) \cap R_2$ и $\forall a \in W_1\ \forall b \in W_2\ (aR_2b \Rightarrow b \in W_1)$, и обозначается через $F_1 \sqsubseteq F_2$. Отображение f фрейма $\langle W_1, R_1\rangle$ на фрейм $\langle W_2, R_2\rangle$ называется p*-морфизмом*, если

$$\forall a, b \in W_1\ ((aR_1b) \Rightarrow (f(a)R_2f(b))),$$
$$\forall a, b \in W_1\ (f(a)R_2f(b)) \Rightarrow \exists c \in W_1((aR_1c)\&(f(c) = f(b))).$$

Отображение f называется p*-морфизмом модели* $\mathscr{M}_1 = \langle W_1, R_1, V_1\rangle$ *на модель*

$\mathscr{M}_2 = \langle W_2, R_2, V_2\rangle$, если f — p-морфизм фрейма $\langle W_1, R_1\rangle$ на фрейм $\langle W_2, R_2\rangle$, $\mathrm{Dom}(V_1) = \mathrm{Dom}(V_2)$, $\forall p \in \mathrm{Dom}(V_1)\forall a \in W_1$ $(a \Vdash_{V_1} p \Longleftrightarrow f(a) \Vdash_{V_2} p)$.

Определение 2.1 [8]. Модель Крипке K_n называется *n-характеристической для нормальной модальной логики* λ, если область определения означивания V из K_n будет множеством P, содержащим n различных пропозициональных переменных, и если $\alpha \in \lambda \iff K_n \Vdash \alpha$ для любой формулы α, построенной из пропозициональных переменных из P.

Построение n-характеристической модели $\mathrm{Ch}_\lambda(n)$ следующее. Пусть λ — финитно аппроксимируемая модальная логика, $K4 \subseteq \lambda$ и $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ — множество пропозициональных букв. Пусть S_1 — множество всевозможных сгустков с всевозможными означиваниями пропозициональных букв из P с тем условием, что в каждом сгустке нет двух элементов с одинаковыми означиваниями пропозициональных букв, в множестве S_1 нет двух различных сгустков, изоморфных как подмодели, и каждый сгусток множества S_1 является λ-фреймом. Первый слой модели $\mathrm{Ch}_\lambda(n)$ определяем так: $Sl_1(\mathrm{Ch}_\lambda(n)) := S_1$. Если подмодель $S_m(\mathrm{Ch}_\lambda(n))$ для некоторого m построена, то построение подмодели $S_{m+1}(\mathrm{Ch}_\lambda(n))$ следующее: произвольным образом выбираем антицепь Y из подмодели $S_m(\mathrm{Ch}_\lambda(n))$, имеющей по крайней мере один сгусток глубиной не меньше m, и добавляем к ней любой сгусток C из множества S_1 как непосредственный R-предшественник сгустков из Y при условии, что

1) фрейм $C^{R\leq}$ будет λ-фреймом;

2) если Y состоит только из одного рефлексивного сгустка C_1, то C не будет подмоделью C_1.

Продолжая этот процесс, получаем модель $\mathrm{Ch}_\lambda(n)$.

Теорема 2.2 [8]. *Пусть f — p-морфизм модели $\mathscr{M}_1 = \langle W_1, R_1, V_1\rangle$ на модель $\mathscr{M}_2 = \langle W_2, R_2, V_2\rangle$. Тогда для любой формулы α, построенной из пропозициональных переменных* $\mathrm{Dom}(V_1)$, *справедливо утверждение* $\forall a \in W_1$ $(a \Vdash_{V_1} \alpha \Longleftrightarrow f(a) \Vdash_{V_2} \alpha)$.

Теорема 2.3 [8]. *Пусть $\mathscr{K}_n{=}\langle W_n, R_n, V_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность n-характеристических моделей для модальной логики λ. Правило вывода $\mathbf{r} := \alpha_1(\bar{x}), \dots, \alpha_n(\bar{x})/\beta(\bar{x})$ допустимо в λ тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждого формульного означивания S переменных из $\mathbf{r}$ в $\mathscr{K}_n$ правило $\mathbf{r}$ истинно в модели $\langle W_n, R_n, S\rangle$, т. е. из $S(\alpha_1) = W_n, \dots, S(\alpha_n) = W_n$ следует $S(\beta) = W_n$.*

Теорема 2.4 [8]. *Любой элемент модели $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$ формульный. В частности, для любой нормальной модальной логики λ, расширяющей $K4$ и имеющей fmp, каждый элемент модели $\mathrm{Ch}_\lambda(k)$ формульный.*

Лемма 2.5 [8]. *Пусть λ — модальная логика, расширяющая $K4$, или суперинтуиционистская логика, которая имеет fmp. Если существует означивание S переменных правила вывода $\mathbf{r} := \alpha_1(\bar{x}), \dots, \alpha_n(\bar{x})/\beta(\bar{x})$ во фрейме некоторой p-характеристической модели $\mathrm{Ch}_\lambda(p)$, которое опровергает правило r, то существует означивание S этих переменных во фрейме модели $\mathrm{Ch}_\lambda(k)$, где k — число переменных правила вывода $\mathbf{r}$, которое также опровергает правило $\mathbf{r}$.*

Определение 2.6. Модальная логика λ_2 *наследует допустимые правила вывода модальной логики* λ_1 $(\lambda_1 \subseteq \lambda_2)$ (*сохраняет допустимость правил вывода* λ_1), если каждое допустимое в λ_1 правило вывода будет допустимым в λ_2.

Обозначим через $F_r(1)$ и $F_i(1)$ рефлексивный и иррефлексивный одноэлементные фреймы соответственно.

Определение 2.7. Пусть задан произвольный корневой конечный фрейм F. *Ко-последователем фрейма F над $K4$* назовем фрейм G, построенный из F с помощью последовательности фреймов $F_0, \dots, F_n$. Пусть $F_0 := F$. Фрейм F_1 строим из фрейма F_0, как показано ниже:

$$F_1 := \begin{cases} F_0, & \text{если } F_i(1) \sqsubseteq F_0 \text{ и } F_r(1) \sqsubseteq F_0; \\ F_0 \sqcup F_i(1), & \text{если } F_r(1) \sqsubseteq F_0 \text{ и } F_i(1) \not\sqsubseteq F_0; \\ F_0 \sqcup F_r(1), & \text{если } F_i(1) \sqsubseteq F_0 \text{ и } F_r(1) \not\sqsubseteq F_0; \\ F_0 \sqcup F_r(1) \sqcup F_i(1), & \text{если } F_i(1) \not\sqsubseteq F_0 \text{ и } F_r(1) \not\sqsubseteq F_0. \end{cases} \tag{1}$$

Фрейм F_{k+1} строим из фрейма F_k следующим образом. Фиксируем произвольным образом множество нетривиальных антицепей сгустков $A_0, \dots, A_n$ из F_k, состоящих более чем из одного сгустка либо из одного иррефлексивного сгустка. Для каждой антицепи A_i из заданного множества добавляем во фрейм F_k одноэлементное рефлексивное или иррефлексивное ко-накрытие антицепи A_i, если она не имела в нем рефлексивного или иррефлексивного ко-накрытия. Процесс построения последовательности фреймов F_i завершаем на произвольном шаге $n \geq 1$ и полагаем $G := F_n$.

Определение 2.8. Модальная логика λ *имеет свойство ко-накрытия над $K4$*, если любой ко-последователь над $K4$ произвольного конечного корневого λ-фрейма будет также λ-фреймом.

Аналогично определяется и свойство ко-накрытия над $S4$, при этом просто не рассматриваются иррефлексивные сгустки. Отметим, что если модальная логика λ имеет свойство ко-накрытия над $K4$, то она имеет также свойство ко-накрытия над $S4$. Обратное неверно — так, модальная логика $S4.1$ обладает только свойством ко-накрытия над $S4$.

3. Критерий наследования допустимых правил вывода $K4$

Лемма 3.1. *Если финитно аппроксимируемая модальная логика λ, $K4 \subseteq \lambda$, имеет свойство ко-накрытия над $K4$, то она наследует допустимые правила вывода для $K4$.*

Доказательство. Действительно, предположим, что существует правило $r = \alpha(x)/\beta(x)$, допустимое в $K4$, но недопустимое в логике λ. Тогда найдутся формулы γ_i с пропозициональными переменными из множества $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ такие, что $\alpha(\gamma_i) \in \lambda$, но $\beta(\gamma_i) \notin \lambda$. Следовательно, для n-характеристической модели $\mathrm{Ch}_\lambda(n)$ выполняются $\mathrm{Ch}_\lambda(n) \Vdash_V \alpha(\gamma_i)$ и $\mathrm{Ch}_\lambda(n) \nVdash_V \beta(\gamma_i)$. При формульном означивании $S(x_i) := V(\gamma_i)$ правило r опровергается на подфрейме $F := a^{R\leq} \cup \{a\}$ из $\mathrm{Ch}_\lambda(n)$. Построим для фрейма F бесконечную последовательность фреймов $F_0, F_1, \dots$ по определению ко-последователей над $K4$. При этом на каждом шаге рассматриваем все антицепи из фрейма F_k и добавляем во фрейм F_{k+1} как рефлексивное, так и иррефлексивные ко-накрытия для этих антицепей. Так как логика λ обладает свойством ко-накрытия над $K4$, то все фреймы последовательности $F_0, F_1, \dots$ будут λ-фреймами и некоторыми открытыми подфреймами фрейма модели $\mathrm{Ch}_\lambda(n)$. Из определения 2.7 получим, что каждый фрейм F_m будет открытым подфреймом фрейма F_{m+1}. Пусть

$F_\infty := \bigcup\limits_{m<\infty} F_m$. Очевидно, что F_∞ также будет открытым подфреймом фрейма модели $\mathrm{Ch}_\lambda(n)$.

По построению фрейма F_∞ в силу того, что при некотором формульном означивании $S(x_i)$ правило r опровергается на фрейме модели $\mathrm{Ch}_\lambda(n)$, получим, что для F_∞ найдется означивание V_1 переменных правила вывода r, которое опровергает r на подфрейме $a^{R\leq} \cup \{a\} \sqsubseteq F_\infty$ и также на всем фрейме F_∞.

Согласно построению n-характеристических моделей и тому, что модальные логики λ и $K4$ обладают свойством ко-накрытия над $K4$, выполняется соотношение $\mathrm{Ch}_\lambda(n) \sqsubseteq \mathrm{Ch}_{K4}(n)$. Фрейм F_∞ также имеет рефлексивные и иррефлексивные ко-накрытия для всех нетривиальных конечных антицепей сгустков, если эти антицепи могут иметь такие ко-накрытия в $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$. Отсюда вытекает, что мы можем построить p-морфизм f из фрейма модели $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$ на фрейм F_∞ следующим образом.

Определим p-морфизм f индуктивно. Из выбора F_1 и конструкции n-характеристической модели $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$ следует, что существует p-морфизм f_1 из фрейма $F \cup S_1(\mathrm{Ch}_{K4}(n))$ на фрейм $G_1 := F \cup S_1(F_\infty)$ и $\mathrm{Dom}(f_1) = F \cup S_1(\mathrm{Ch}_{K4}(n))$. При этом f_1 будет тождественным отображением F на F.

Пусть определен такой p-морфизм f_m из фрейма $F \cup S_m(\mathrm{Ch}_{K4}(n))$ на фрейм $G_m := F \cup S_m(F_\infty)$, что f_m будет тождественным отображением для F. Определим p-морфизм f'_m из конечного открытого подфрейма $F \cup S_{m+1}(\mathrm{Ch}_{K4}(n))$ на $F_{m+1} := F \cup S_{m+1}(F_\infty)$ как расширение отображения f_m. При этом каждый новый элемент $c \in F_{m+1} \backslash F_m$ будет образом сгустка U: $f'_m(U) = c$, выбранного из $S_{m+1}(\mathrm{Ch}_{K4}(n))$ по следующему алгоритму. Так как $c \notin F$, то c будет одноэлементным сгустком ко-накрытия для некоторой конечной непустой антицепи сгустков $\{C_1, \ldots, C_k\}$ из F_m. Поскольку $\mathrm{Dom}(f_m) = F \cup S_m(\mathrm{Ch}_{K4}(n))$ и f_m определен как p-морфизм «на», то найдется антицепь сгустков $\{U_1, \ldots, U_k\}$ из $S_m(\mathrm{Ch}_{K4}(n))$ такая, что $f_m(U_j) = C_j$ и $||C_j|| \leq ||U_j||$, $1 \leq j \leq k$. Если элемент c рефлексивный, то, принимая во внимание построение модели $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$, возьмем прообразами элемента c все рефлексивные сгустки U, которые будут ко-накрытиями для антицепи $\{U_1, \ldots, U_k\}$ во фрейме модели $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$: $U^{R<} = \bigcup\limits_{1\leq j\leq k} \left(U_j^{R\leq} \cup U_j\right)$. Аналогично если элемент c иррефлексивный, то возьмем его прообразами иррефлексивные сгустки U, которые будут ко-накрытиями для этой антицепи $\{U_1, \ldots, U_k\}$.

Пусть $U \in Sl_{m+1}(\mathrm{Ch}_{K4}(n)) \backslash [F \cup \mathrm{Dom}(f'_m)]$. Определим отображение g следующим образом. Пусть $\{U_1, \ldots, U_k\}$ — множество непосредственных R-последователей сгустка U. Так как эти сгустки принадлежат области определения f_m, то $f_m(U_1), \ldots, f_m(U_k) \in S_m(F_\infty)$. Пусть сгусток U рефлексивный. Если среди сгустков $f_m(U_1), \ldots, f_m(U_k)$ существует R-минимальный рефлексивный сгусток $f_m(U_j)$, то отобразим U на произвольный элемент c из $f_m(U_j)$. Если такового нет, то по построению модели F_∞ найдется одноэлементный сгусток ко-накрытия C для антицепи $f_m(U_1), \ldots, f_m(U_k)$ и тогда определим g так: $g(U) := C$. Аналогично если сгусток U иррефлексивный и среди сгустков $f_m(U_1), \ldots, f_m(U_k)$ существует R-минимальный иррефлексивный сгусток $f_m(U_j)$, то отобразим U на иррефлексивное ко-накрытие для $f_m(U_j)$, иначе по построению модели F_∞ найдется иррефлексивный R-минимальный сгусток, являющийся ко-накрытием C для антицепи $f_m(U_1), \ldots, f_m(U_k)$, и $g(U) := C$.

Определим отображение

$$f_{m+1}(x) := \begin{cases} f'_m(x), & \text{если } x \in F \cup \mathrm{Dom}(f'_m); \\ g(x), & \text{если } x \in Sl_{m+1}(\mathrm{Ch}_{K4}(n)) \backslash [F \cup \mathrm{Dom}(f'_m)]. \end{cases}$$

Легко заметить, что f_{m+1} является p-морфизмом с требуемыми свойствами.

Отображение $f = \bigcup\limits_{m \leq \infty} f_m$ и будет требуемым p-морфизмом из фрейма $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$ на фрейм F_∞. С помощью этого p-морфизма мы получим означивание V_2 на фрейме $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$ переводом означивания V_1: $V_2(x) := \{a \mid f(a) \in V_1(x)\}$. Очевидно, при означивании V_2 правило вывода r опровергается на фрейме $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$. По теореме 2.3 это означает, что правило r недопустимо в $K4$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, модальная логика λ наследует все правила вывода, допустимые для $K4$. $\square$

Лемма 3.2. *Если финитно аппроксимируемая модальная логика λ, расширяющая $K4$, наследует правила вывода, допустимые для $K4$, то она имеет свойство ко-накрытия над $K4$.*

Доказательство. Допустим обратное, т. е. существует финитно аппроксимируемая модальная логика λ, расширяющая $K4$, наследующая допустимые правила вывода $K4$, но не имеющая свойства ко-накрытия над $K4$. Тогда либо $F_r(1) \notin Fr_\lambda$, либо $F_i(1) \notin Fr_\lambda$, либо существует последовательность фреймов $F_0, \dots, F_k$ со следующими свойствами.

(a) Фрейм $F_0 := a^{R\leq} \cup \{a\}$ — открытый подфрейм фрейма модели $\mathrm{Ch}_\lambda(n)$, порожденный сгустком a.

(b) Последовательность $F_0, \dots, F_n$ построена как последовательность из определения 2.7. Отметим, что каждый фрейм F_m этой последовательности также будет открытым подфреймом фрейма модели $\mathrm{Ch}_\lambda(n)$.

(c) Во фрейме F_k существует нетривиальная антицепь сгустков Δ, состоящая более чем из одного сгустка либо из одного иррефлексивного сгустка. При этом сгустки антицепи Δ имеют глубину не более k, а хотя бы один из них — глубину в точности k и Δ не имеет либо рефлексивного, либо иррефлексивного ко-накрытия во фрейме модели $\mathrm{Ch}_\lambda(n)$.

Рассмотрим случай, когда $F_r(1) \notin Fr_\lambda$. Правило вывода $r_1 := \Box(\neg a \wedge a) \vee \Diamond\Box(\neg a \wedge a)/(\neg a \wedge a)$ допустимо в $K4$. Действительно, формулы $\Box(\neg a \wedge a)$ и $\Diamond\Box(\neg a \wedge a)$ не могут быть истинными на максимальных рефлексивных сгустках фрейма модели $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$, поэтому при подстановке любой формулы $\gamma \in For_{K4}$ получим $\Box(\neg\gamma \wedge \gamma) \vee \Diamond\Box(\neg\gamma \wedge \gamma) \notin K4$. Для любого конечного фрейма $F \in Fr_\lambda$ слой $Sl_1(F)$ не содержит рефлексивных сгустков, тем самым формула $\Box(\neg a \wedge a)$ будет истинна на $Sl_1(F)$, а формула $\Diamond\Box(\neg a \wedge a)$ истинна на $F \backslash Sl_1(F)$. Следовательно, формула $\Box(\neg a \wedge a) \vee \Diamond\Box(\neg a \wedge a)$ — теорема λ, и правило вывода r_1 недопустимо в λ. Таким образом, если $F_r(1) \notin Fr_\lambda$, то такая модальная логика λ не наследует допустимых правил вывода $K4$, что противоречит нашему предположению.

Рассмотрим второй возможный случай, когда $F_i(1) \notin Fr_\lambda$. Правило вывода $r_2 := \Diamond(\neg a \vee a)/(\neg a \wedge a)$ допустимо в $K4$. Действительно, формула $\Diamond(\neg a \vee a)$ не будет истинной на максимальных иррефлексивных сгустках фрейма модели $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$, поэтому при подстановке любой формулы $\gamma \in For_{K4}$ получим $\Diamond(\neg\gamma \vee \gamma) \notin K4$. Если $F_i(1) \notin Fr_\lambda$, то для любого конечного фрейма $F \in Fr_\lambda$ слой $Sl_1(F)$ не содержит иррефлексивных сгустков. Поэтому $\Diamond(\neg a \vee a) \in \lambda$ и правило вывода r_2 недопустимо в λ. Следовательно, модальная логика λ не наследует допустимых правил вывода $K4$; противоречие.

Рассмотрим последний из возможных случаев. Введем следующие модели: $M = S_k(\mathrm{Ch}_\lambda(n)) \cup F_k$ и $M_1 = M \cup Sl_{k+1}(\mathrm{Ch}_\lambda(n))$. Для каждого сгустка $j \subseteq M_1$ введем новую пропозициональную переменную p_j. Формулу $f(j)$ определим индукцией по глубине сгустка j.

(a) Для максимального сгустка $j \subseteq S_1(M_1)$

$$f(j) := \begin{cases} p_j \wedge \Box p_j \wedge \Diamond p_j, & \text{если } j \text{ — рефлексивный сгусток,} \\ p_j \wedge \Box(\neg p_j \wedge p_j), & \text{если } j \text{ — иррефлексивный сгусток.} \end{cases} \tag{2}$$

(b) Если формула $f(i)$ определена для всех сгустков i из $S_t(M_1)$, то для сгустка $j \in Sl_{t+1}(M_1)$ определим формулу $f(j)$ следующим образом:

$$f(j) := \begin{cases} \varphi(j) \wedge \Diamond\varphi(j) \wedge \Box[\varphi(j) \vee \bigvee_{jRi, i\subseteq S_t(M_1)} f(i)], \\ \qquad\qquad \text{если } j \text{ — рефлексивный сгусток,} \\ \varphi(j) \wedge \neg\Diamond\varphi(j) \wedge \Box[\bigvee_{jRi, i\subseteq S_t(M_1)} f(i)], \\ \qquad\qquad \text{если } j \text{ — иррефлексивный сгусток,} \end{cases} \tag{3}$$

где

$$\varphi(j) := [\Box p_j \wedge p_j] \wedge \Big[\bigwedge_{\neg(iRj), i\subseteq S_{t+1}(M_1)} \neg(\Box p_i \wedge p_i)\Big] \\ \wedge \Big[\bigwedge_{jRi, \neg(iRj), i\subseteq S_t(M_1)} \Diamond f(i)\Big] \wedge \Big[\bigwedge_{\neg(jRi), i\subseteq S_t(M_1)} \neg\Diamond f(i)\Big]. \tag{4}$$

Пусть

$$g := \Big[\bigwedge_{i\subseteq M_1} \neg f(i)\Big] \wedge \Big[\bigvee_{i\subseteq Sl_{k+1}(M_1)} \Diamond f(i)\Big].$$

Рассмотрим правило вывода $r_3 := \bigvee_{i\subseteq M_1} f(i) \vee g/\neg f(a)$, где a — корневой сгусток фрейма F_0. Покажем, что правило вывода r_3 недопустимо в модальной логике λ. Для n-характеристической модели $\mathrm{Ch}_\lambda(n)$ определим означивание S: $S(p_i) := \{j \mid iRj\} \cup \{i\}$. Легко убедиться, что означивание S формульное и при этом означивании для любых $j \in M_1$, $b, d \in \mathrm{Ch}_\lambda(n)$

$$d \Vdash_S f(j) \iff \begin{cases} d = j, \text{ где } j \text{ — иррефлексивный сгусток модели } M_1 \text{ или} \\ d \in j, \text{ и } j \text{ — рефлексивный сгусток модели } M_1; \end{cases}$$
$$b \Vdash_S g \iff b \in \mathrm{Ch}_\lambda(n)\backslash M_1.$$

Следовательно, посылка правила r_3 будет истинна на всей модели $\mathrm{Ch}_\lambda(n)$, но в R-минимальном рефлексивном сгустке a фрейма $F_0 \sqsubseteq \mathrm{Ch}_\lambda(n)$ следствие r_3 не будет выполняться. По теореме 2.3 это влечет недопустимость правила r_3 в модальной логике λ.

Покажем, что правило вывода r_3 допустимо в $K4$. Допустим обратное, тогда по теореме 2.3 в некоторой модели $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$ правило r_3 будет опровергаться при некотором формульном означивании S, т. е. для каждого сгустка d из $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$

$$\exists i \subseteq M_1 : d \Vdash_S f(i) \text{ или } d \Vdash_S g, \tag{5}$$

при этом в некотором сгустке $b_a \in \mathrm{Ch}_{K4}(n)$

$$b_a \Vdash_S f(a). \tag{6}$$

Для сгустков $c \in \mathrm{Ch}_{K4}(n)$ таких, что $c \Vdash_S f(i)$, будем использовать обозначения $b_i := c$. Покажем, что если сгустки i, j несравнимы в модели M_1, то сгустки b_i и b_j несравнимы в модели $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$. Действительно, для любых таких сгустков $b_i, b_j \in \mathrm{Ch}_{K4}(n)$ по определению (2)–(4) формулы $f(i)$ выполняется

$$[b_i \Vdash_S f(i)]\&[j \subseteq M_1]\&[iRj]\&\neg[jRi] \Rightarrow \exists b_j[b_iRb_j]\&[b_j \Vdash_S f(j)], \qquad (7)$$

откуда

$$[b_i \Vdash_S f(i)]\&[b_j \Vdash_S f(j)]\&[b_iRb_j] \Rightarrow [iRj], \qquad (8)$$

что и дает требуемую несравнимость сгустков b_i и b_j:

$$[b_i \Vdash_S f(i)]\&[b_j \Vdash_S f(j)]\&\neg[iRj]\&\neg[jRi] \Rightarrow \neg[b_iRb_j]\&\neg[b_jRb_i]. \qquad (9)$$

Из определения (2)–(4) формулы $f(i)$ и (6), (8) получим

$$[b_i \Vdash_S f(i)]\&[b_iRd] \Rightarrow \exists j[iRj]\&[d \Vdash_S f(j)], \qquad (10)$$

$$\forall j[aRj] \Rightarrow \exists b_j[b_aRb_j]\&[b_j \Vdash_S f(j)]. \qquad (11)$$

Из (11) следует, что в модели $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$ найдется множество $D := \{b_x \mid x \in \Delta\}$. Согласно (8) множество D также будет антицепью сгустков. При этом из построения последовательности $F_0, \dots, F_k$ и формулы (2) вытекает, что она будет состоять более чем из одного сгустка либо из единственного иррефлексивного сгустка. Из построения модели $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$ следует, что любая такая антицепь сгустков D имеет рефлексивное и иррефлексивное ко-накрытия. Возьмем сгусток w, который будет рефлексивным ко-накрытием для антицепи D в модели $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$, если Δ не имеет рефлексивного ко-накрытия, или иррефлексивным ко-накрытием для антицепи D в модели $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$, если Δ не имеет иррефлексивного ко-накрытия. Покажем, что для некоторого сгустка $j \subseteq M_1$ будет справедливо

$$w \Vdash_S f(j). \qquad (12)$$

Допустив обратное, из (5) получим $w \Vdash_S g$. Тогда найдется сгусток $x \subseteq Sl_{k+1}(M_1)$ такой, что $w \Vdash_S \Diamond f(x)$ и для каждого сгустка $j \subseteq M_1$ будет $w \Vdash_S \neg f(j)$. Это означает, что найдется сгусток b_x такой, что wRb_x, $\neg(b_xRw)$, $b_x \Vdash_S f(x)$ и либо $b_x \in D$, либо найдется другой сгусток $b_i \in D$, b_iRb_x. Из (10) получим, что либо $x \in \Delta$, либо $\exists i \in \Delta\ iRx$, а это невозможно, так как $x \subseteq Sl_{k+1}(M_1)$ и глубина Δ не больше k. Таким образом, $w \nVdash_S g$, что и доказывает (12). Отметим, что если w — иррефлексивное ко-накрытие для антицепи D, то по определению (2) формулы $f(j)$ сгусток j будет иррефлексивным. Если же w — рефлексивное ко-накрытие для антицепи D, то из (11) и (2) следует, что сгусток j будет рефлексивным.

В силу (10) и (9) сгусток j является ко-накрытием для антицепи Δ. Действительно, по нашему предположению $\forall i \in \Delta\ \{[b_i \Vdash_S f(i)]\&[wRb_i]\&\neg[b_iRw]\}$. Тогда согласно (8) получим $\forall i \in \Delta\ jRi$. Допустим, что существует сгусток $l \in M_1$ — строгий последователь сгустка j — и $l \notin \Delta$. Согласно (11) в модели $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$ найдется сгусток b_l такой, что $[b_l \Vdash_S f(l)]\&[wRb_l]\&\neg[b_lRw]$. Таким образом, b_iRb_l для некоторого сгустка $i \in \Delta$, что влечет iRl, а это невозможно, так как l — строгий последователь сгустка j. Пришли к противоречию: антицепь Δ должна иметь и рефлексивное, и иррефлексивное ко-накрытия, а это противоречит нашему выбору антицепи Δ.

Таким образом, правило вывода r_3 допустимо в $K4$ и недопустимо в λ, что противоречит предположению о наследовании модальной логикой λ правил вывода, допустимых в $K4$. Следовательно, последний из возможных случаев также невыполним, и лемма доказана.

Из лемм 3.1 и 3.2 непосредственно следует требуемый критерий наследования правил вывода, допустимых для $K4$.

Теорема 3.3. *Финитно аппроксимируемая модальная логика λ, $K4 \subseteq \lambda$, наследует все допустимые правила вывода $K4$ тогда и только тогда, когда она имеет свойство ко-накрытия над $K4$.*

4. Применение критерия наследования допустимых правил вывода $\boldsymbol{K4}$ для ряда известных модальных логик

Рассмотрим некоторые известные модальные логики, расширяющие $K4$, и определим с помощью полученного критерия, наследуют ли они допустимые правила вывода $K4$.

1. Рассмотрим вопрос о наследовании правил вывода, допустимых для $K4$, табличными логиками. Напомним (см. [8]), что логика λ называется *табличной*, если существует конечная алгебра U, порождающая данную логику. Это означает, что каждая табличная логика может быть порождена некоторым конечным фреймом Q: $\lambda := \{\alpha \mid Q \Vdash \alpha\}$.

Лемма 4.1. *Любая табличная модальная логика λ, $K4 \subseteq \lambda$, не имеет свойства ко-накрытия над $K4$.*

Доказательство. Пусть λ — табличная модальная логика, $K4 \subseteq \lambda$. Допустим, что она обладает свойством ко-накрытия над $K4$, и пусть Q будет конечным λ-фреймом, порождающим логику λ. Построим бесконечную последовательность λ-фреймов $F_0, F_1, \dots$. Определим фрейм F_0 так: если фрейм Q является корневым с иррефлексивным корнем, то $F_0 := Q$, в противном случае во фрейме Q выбираем иррефлексивный элемент a и тогда $F_0 := a^{R\leq} \cup \{a\}$. Если во фрейме Q отсутствуют иррефлексивные элементы, то рассмотрим фрейм $Q \sqcup F_i(1)$ и фрейм F_0, полученный добавлением иррефлексивного ко-накрытия для антицепи, состоящей из корня фрейма Q и сгустка $F_i(1)$. По определению ко-последователя и свойства ко-накрытия над $K4$ эти фреймы также будут λ-фреймами. Для каждого $k \leq 0$ строим фрейм F_{k+1}, добавляя к фрейму F_k новый иррефлексивный корневой сгусток в качестве ко-накрытия для корневого иррефлексивного сгустка F_k.

Согласно свойству ко-накрытия над $K4$ каждый фрейм F_i этой последовательности является λ-фреймом и, очевидно, глубина F_n не меньше n. Рассмотрим формулы ϕ_n, определенные следующим образом:

$$\phi_0 := \neg a \wedge a, \quad \phi_{n+1} := p_{n+1} \vee \Box(\Box p_{n+1} \to \phi_n).$$

Известно [8], что формула ϕ_k истинна при любом означивании только на фреймах глубиной не более k. Так как фрейм Q порождает логику λ, то формула ϕ_k, где k — глубина фрейма Q, будет теоремой λ. По построению формула ϕ_k будет опровергаться при некотором означивании на фрейме F_n при $n>k$, что невозможно, так как F_n — λ-фрейм.

Из леммы 4.1 и теоремы 3.3 непосредственно получаем

Следствие 4.2. *Любая табличная модальная логика, расширяющая $K4$, не наследует правил вывода, допустимых для $K4$.*

2. Приведем пример нетабличной модальной логики, наследующей все допустимые правила вывода $K4$. Модальная логика $K4.1$ порождается классом всех конечных корневых транзитивных фреймов, максимальные сгустки которых одноэлементные. Очевидно, ко-последователь любого $K4.1$-фрейма над $K4$ также будет $K4.1$-фреймом и $K4.1$ обладает свойством ко-накрытия над $K4$. Значит, по теореме 3.3 $K4.1$ наследует все допустимые правила вывода $K4$.

3. Рассмотрим известные модальные системы, не наследующие допустимых правил вывода $K4$.

Характеристическим классом для модальной логики $K4.2$ является класс всех конечных корневых транзитивных фреймов, имеющих единственный максимальный сгусток. Рассмотрим одноэлементный рефлексивный фрейм $F_r(1)$. Этот фрейм будет $K4.2$-фреймом, но его корневой ко-последователь над $K4$ будет иметь 2 максимальных сгустка и, очевидно, не будет λ-фреймом. Следовательно, $K4.2$ не имеет свойства ко-накрытия над $K4$, и по теореме 3.3 $K4.2$ не наследует правил вывода, допустимых для $K4$.

Модальная логика $K4.3$ порождается классом всех конечных корневых транзитивных слабосвязанных фреймов:

$$\forall x, y, z \in |\mathscr{F}| \ [(xRy)\&(xRz)] \Rightarrow [(zRy) \vee (zRy)].$$

Очевидно, что также одноэлементный рефлексивный фрейм $F_r(1)$ будет $K4.3$-фреймом, а его корневой ко-последователь — нет. Поэтому $K4.3$ также не имеет свойства ко-накрытия над $K4$ и не наследует правил вывода, допустимых для $K4$.

Модальная логика GL порождается классом всех конечных корневых, транзитивных и иррефлексивных фреймов. Модальная логика $S4$ порождается классом всех конечных, корневых, транзитивных и рефлексивных фреймов. Эти модальные логики не имеют свойства ко-накрытия над $K4$, так как фреймы, адекватные этим логикам, не имеют либо рефлексивных, либо иррефлексивных элементов. Поэтому по теореме 3.3 GL и $S4$ не наследуют правил вывода, допустимых для $K4$. Более того, случаи этих логик рассмотрены в доказательстве леммы 3.2 на примере правил r_1 и r_2, допустимых в $K4$ и недопустимых в GL или $S4$. Модальные логики Grz, $S4.1$, $S4.2$, $S4.3$, $S5$ и вообще любые модальные логики, расширяющие GL или $S4$, не имеют свойства ко-накрытия над $K4$ и тем самым не могут наследовать правил вывода, допустимых для $K4$.

В заключение отметим, что ряд открытых вопросов о наследовании допустимых правил вывода, сформулированных ранее (см. [7, 8]), остался не решенным. К таким вопросам можно отнести проблемы, связанные с изучением логик, наследующих правила вывода, допустимые для $K4$ и $S4$: получение алгоритмических критериев наследования, описание структуры этих логик, выяснение, является ли множество таких логик замкнутым относительно решеточных операций, есть ли среди них логики без свойства финитной аппроксимируемости и др. Остается нерешенной и общая задача получения критерия наследования допустимых правил вывода для произвольной модальной логики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rybakov V. V.* Intermediate logics preserving admissible inference rules of Heyting calculus // Math. Logic Quart. 1993. V. 39, N 3. P. 403–415.

2. *Chagrov A, Zakharyaschev M.* Modal logic. Oxford: Oxford Univ. Press, 1997.
3. *Циткин А. И.* О структурально полных суперинтуиционистских логиках // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 1. С. 40–43.
4. *Минц Г. Е.* Производность допустимых правил // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1972. Т. 32. С. 85–99.
5. *Rybakov V. V.* Hereditary structurelly complete modal logics // J. Symbolic logic. 1995. V. 60, N 1. P. 266–288.
6. *Rybakov V. V.* Preserving of admissible inference rules in modal logic // Logical Foundations of Computer Science / Eds.: A. Nerode, Yu. V. Matiyasevich. Berlin: Springer Verl., 1994. P. 304–316. (Lecture Notes in Comput. Sci.; v. 813).
7. *Rybakov V. V., Gencer G., Oner T.* Description of modal logics inheriting admissible rules for $S4$ // Logic J. of IGPL. 1999. V. 7, N 5. P. 655–663.
8. *Rybakov V. V.* Admissibility of logical inference rules. New York; Amsterdam: Book Elseiver Sci. Publ.; North-Holland, 1997. (Stud. Logic Found. Math.; v. 136).

Статья поступила 10 января 2002 г.

Руцкий Алексей Николаевич, Федоришин Богдан Романович
Красноярский гос. университет, факультет математики и информатики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
`rutskey@lan.krasu.ru, fedb@lan.krasu.ru`